Dumitru Botnaru

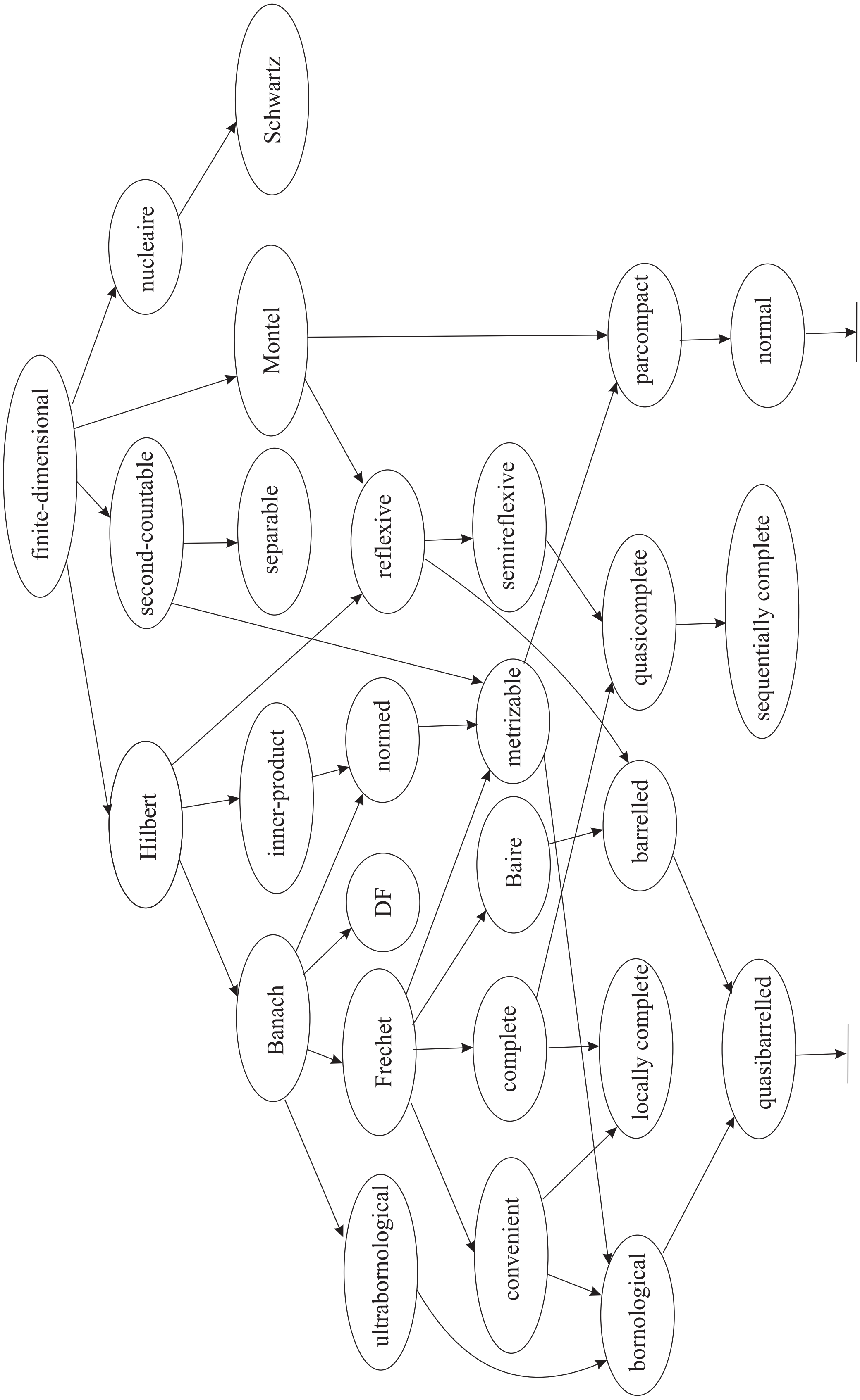
Aspecte categoriale ale spațiilor topologice vectoriale

Subcategorii semireflexive

Dumitru Botnaru

Les aspectes catégoriels des espaces topologiques vectoriels

Sous-catégories semireflexives


finite-dimensional
nucleaire
Schwartz
Montel
second-countable
separable
reflexive
semireflexive
parcompact
normal
quasicomplete
sequentially complete
metrizable
Hilbert
inner-product
normed
barrelled
Baire
DF
Banach
Frechet
complete
locally complete
quasibarrelled
ultrabornological
convenient
bornological

Subcategorii semireflexive

- $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})\}$, 6.1.8
- $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$, $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, 11.1.4
- $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = Q_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}), \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, 11.3.7
- $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, 12.2.8
- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \iff \mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, 12.2.6
- $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(k(\mathcal{R})) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ 11.3.15
- $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) =$
  $\mathcal{K} *_{dc} (\mathcal{K} \cap \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})), (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, 12.3.9
- $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, 12.2.9
- $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{R}), \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K} \in \mathbb{K}$, sau $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, 11.1.10
- $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{U}), (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, 11.1.11
- $\Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \iff \mathcal{K} *_{dc} \Gamma, (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, 11.4.8
- $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}), (\mathcal{L}, \mathcal{R}) \in \mathbb{P}$, 12.2.8

-$\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{U}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c, \mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}, r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ este exact la stânga, 10.4.7

			Izomorfismul direct	Izomorfismul invers
1.	a	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}ic$	$\mathcal{R} \mapsto \varepsilon\mathcal{R}$	$\mathcal{B} \mapsto \lambda(\mathcal{B})$
1*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}ic$	$\mathcal{K} \mapsto \mu\mathcal{K}$	$\mathcal{B} \mapsto \lambda^*(\mathcal{B})$
2.	i	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}_{bf}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{R}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M})$
2*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}_{bf}$	$\mathcal{K} \mapsto ((\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}_f, (\mu\mathcal{K})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}ono)$
3.	i	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}_{pb}$	$\mathcal{R} \mapsto (\mathcal{E}_u \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{R}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M})$
3*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}_{bp}$	$\mathcal{K} \mapsto ((\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap (\mu\mathcal{K})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u)$
4.	a	$\mathbb{R}_{nu} \sim \mathbb{B}_{\varepsilon u}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_p)$
4*.	a	$\mathbb{K}_{nu} \sim \mathbb{B}_{u\mu}$	$\mathcal{K} \mapsto (\mathcal{E}_p \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}\mathcal{M}_u \circ (\mu\mathcal{K}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E}_p \cap \mathcal{M})$
5.	a	$\mathbb{R} \sim \mathbb{B}_{\varepsilon p}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u)$
5*.	i	$\mathbb{K} \sim \mathbb{B}_{p\mu}$	$\mathcal{K} \mapsto (\mathcal{E}_u \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}$

1. $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.
2. $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}h)$.
3. $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$
4. $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$
5. $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.
6. $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Spații complete } q\text{-reflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{spații inductiv semireflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{B}\text{-inductiv semireflexive} \\
\mathcal{S}\text{-inductiv semireflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{spații semireflexive} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{spații } \alpha\text{-semireflexive} \\
& \text{spații } p\text{-semireflexive} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{spații inductiv reflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{spații reflexive} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{spații } p\text{-reflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{spații } k\text{-reflexive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{spații } c\text{-reflexive} \\
& \text{spații } \alpha\text{-reflexive} & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^s(\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathcal{Q}_\mathcal{B}"] \arrow[ddr, "\mathcal{Q}_\mathcal{E}"] & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{Q}_\mathcal{E}"] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\mathcal{S}_\mathcal{B}"] \arrow[r, "\mathcal{Q}_\mathcal{B}"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}_\mathcal{E}"'] & \mathbb{R}_f(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_\mathcal{B}"] \arrow[r, "\mathcal{Q}_\mathcal{E}"] & \mathbb{V}_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{S}_\mathcal{B}"] & \mathbb{V}^s_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) \\
& \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_\mathcal{B}"] \arrow[r, "\mathcal{S}_\mathcal{B}"] & \mathbb{V}^s(\mathcal{B},\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_\mathcal{B}"'] &
\end{tikzcd}$$

C U P R I N S

S O M M A I R E

Introducere

Monografia are ca punct de pornire următoarele două momente:

1. Profesorul moscovit Dmitrii Raïcov deseori repeta în faţa discipolilor săi, că în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ a spaţiilor vectoriale local convexe Hausdorff, unele afirmaţii pot fi formulate şi demonstrate categorial.

2. În această categorie multe noţiuni şi afirmaţii admit noţiunile duale. Aceasta se datoreşte mai multor factori:

- Existenţia subcategoriilor $\tilde{\mathcal{M}}$ a spaţiilor cu topologie Mackey şi $\mathcal{S}$ a spaţiilor cu topologie slabă. Aceste subcategorii sunt izomorfe şi formează o pereche de subcategorii conjugate. Un rol deosebit în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ îl joacă Teorema Mackey-Arens.

- Existenţa structurilor de factorizare duale $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ =(clasa epi universale, clasa mono precise) şi $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ =(clasa epi precise, clasa mono universale).

- Perechile de subcategorii conjugate care formează subcategorii izomorfe.

Menţionăm că categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ nu este autoduală şi pentru multe afirmaţii cele duale nu sunt juste. De exemplu, în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există suficiente obiecte $\mathcal{M}_p$-injective, dar nu există suficiente obiecte $\mathcal{E}_p$-proiective. Astfel clasa $\mathcal{M}_p$ este stabilă la dreapta, iar clasa $\mathcal{E}_p$ nu este stabilă la stânga.

Notaţii. *Vom nota* $\mathbb{K}$ *(respectiv:* $\mathbb{R}$*) clasa subcategoriilor coreflective (respectiv: reflective). Deoarece corpul* K **peste care** *sunt examinate spaţiile vectoriale este* **sumand** *direct în orice obiect nenul din* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*, rezultă că* $K \in |\mathcal{K}|$ *şi* $K \in |\mathcal{R}|$ *pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$*. Astfel* $\mathcal{R}$ *este* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$*-reflectivă şi* $\mathcal{K}$ *este* $(\mathcal{M}ono \cap \mathcal{E}_u)$*-coreflectivă. Cu litere mici vom nota functorii respectivi:* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$*.*

Fie $\mathcal{M}$ (respectiv: $\mathcal{E}$) o clasă de mono (respectiv: epi) şi $\mathcal{A}$ o subcategorie. Atunci cu $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ (respectiv: $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$) se notează subcategoria plină a tuturor $\mathcal{M}$-subobiectelor (respectiv: $\mathcal{E}$-factorobiectelor) obiectelor din $\mathcal{A}$, şi $P(\mathcal{A})$-subcategoria plină a obiectelor ce sunt produse a obiectelor din $\mathcal{A}$.

Subcategoriile reflective au fost definite de A.I.Maliţev [Ma, 1958]. Au fost studiate în multiple publicaţii ale matematicienilor germani H.Herrlich şi G.E.Strecker (vezi [A, H, S, 2004]).

Structurile de factorizare îşi au începutul cu un articol a doi matematicieni români M.Jurchescu şi A.Lascu [J, M, 1966], ca apoi să apară multiple publicaţii la această temă: C.M.Ringel [Rg, 1971], D.A.Raïcov [Ra, 1972], D.Pumpliim [Pm, 1972] etc. Se construiau cu ajutorul structurilor de factorizare categoriile de relaţii, categoriile de fracţii şi diversele bijecţii între structurile de factorizare şi subcategoriile reflective (vezi [B, 1974], [St, 1974]).

Au început să apară multe publicaţii despre structurile de factorizare după apariţia articolului lui J.F.Kennison [Ke, 1965] unde se demonstrează teorema Freyd-Isbell.

Pentru categoria algebrelor universale această teoremă a fost demonstrată de A.I. Malitev [Ma, 1958]. De aceea unii o numesc Teorema Malitev-Freyd-Isbell.

Fie $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono | k(m) \in \mathcal{I}so\}$, $\epsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi | r(e) \in \mathcal{I}so\}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

$(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ se numeşte o pereche de subcategorii conjugate, dacă $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Fiecare element al unei astfel de perechi îl determină în mod unic pe al doilea. Astfel de perechi formează clasa $\mathbb{P}_c$ şi componentele lor - clasele $\mathbb{K}_c$ ale subcategoriilor c-coreflective şi $\mathbb{R}_c$ a subcategoriilor c-reflective. Subcategorii ce joacă un rol important în analiza funcţională cum sunt subcategoriile $\mathcal{S}$ a spaţiilor cu topologie slabă, $u\mathcal{N}$ al spaţiilor ultranuceare şi $\mathcal{S}h$ a spaţiilor Schwartz apaţin clasei $\mathbb{R}_c$.

Menţionăm că $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ şi este cea mai mică pereche, şi $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ cea mai mare pereche în clasa $\mathbb{P}_c$.

Teoremă. 1. (Teorema 9.2.5) *Fie $\mathcal{A}$ o clasă de obiecte $\mathcal{M}_p$-injective. Atunci subcategoria $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(P(\mathcal{A})$ este o subcategorie c-reflectivă.*

2. (Teorema 9.2.12). *Laticele $\mathbb{P}_c, \mathbb{K}_c$ şi $\mathbb{R}_c$ conţin clase proprii de elemente.*

Noţiunea de subcategorie c-reflectivă a fost introdusă de autor [B, 1976]. Trebuie de menţionat, că exemple de subcategorii cu functorul reflector exact la stânga erau cunoscute şi până atunci (vezi [Br, 1968], [Gl, 1967]). În teza sa de doctor [B, 1979] autorul a expus proprietăţile principale ale subcategoriilor c-reflexive (vezi de asemenea [B, 2018b]).

Pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ vom nota $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (respectiv: $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ clasa tuturor subcategoriilor reflective închise în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte (respectiv: $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte) şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Definiţie. *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Subcategoria $\mathcal{R}$ se numeşte $\mathcal{L}$-semireflexivă dacă ea este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte. $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ este clasa subcategoriilor $\mathcal{L}$-semireflexive.*

Subcategoriile $\mathcal{L}$-semireflexive au fost introduse de autor (vezi [B, C, 2007], [B, C, 2009]). Au urmat o serie de publicaţii, unde s-au examinat proprietăţile subcategoriilor $\mathcal{L}$-semireflexive, au fost construite exemple [B, 2018a], [B, 2018b], [B, 2018c], [B, 2020], [B, 2021], [B, 2022], [B, 2023].

Primele exemple de subcategorii $\mathcal{L}$-semireflexive au fost construite cu $\mathcal{L}$ subcategorie c-reflectivă:

- $s\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor semireflexive, $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, [Sch, 1966];

- $i\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor inductiv semireflxive, $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}h)$, I.A. Berezanski [Be, 1968];

-p-$s\mathcal{R}$ a spaţiilor p-semireflexive, J.Dazord, M.Jourlin [D, J, 1971];

- $l\Gamma_0$ subcategoria spaţiilor local complete, $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, D.A.Raïcov [Ra, 1965];

- $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor $\mathcal{B}$-inductiv semireflexive, $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, V.S.Sekovanov [Sk, 1980], D.Botnaru [B, 2023].

Fie $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L}_2 \subset \varepsilon\mathcal{L}_1$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_1) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_2)$. Mai departe, $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R} = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V})$.

Există diverse condiţii necesare şi suficiente ca o subcategorie să fie $\mathcal{L}$-semireflexivă, îndeosebi când $\mathcal{L}$ este o subcategorie c-reflectivă. O să enumerăm câteva.

Definiţie. *Fie $\mathcal{A}$ o subcategorie şi $\mathcal{L}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Obiectul X se numeşte $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semireflexiv, dacă $\mathcal{L}$-replica lui aparţine subcategoriei $\mathcal{A}$. Subcategoria plină a tuturor obiectelor $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semireflexive se numeşte produsul semireflxiv al subcategoriilor $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{A}$ şi se notează*

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}.$$

Teoremă (Teorema 12.2.6). *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.*

Această teoremă indică rolul deosebit pe care-l joacă subcategoriile c-reflective în construcţia subcategoriilor semireflexive.

Teoremă (Teorema 12.3.9). *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci*

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} *(\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) =$

$= \mathcal{K} *_{dc} (\mathcal{K} \cap (\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}),$

unde $\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$ este produsul de dreapta al subcategoriei coreflective $\mathcal{K}$ şi celei reflective $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$; (11.1);

$\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{A}$ este produsul de dreapta cocartezian (11.3).

Teoremă (Teorema 12.7.3). *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $\mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $l(\mathcal{R}) = \mathcal{F}$.

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

4. Clasa $\mathcal{J}'(\mathcal{R})$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară şi pentru orice morfism $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ pătratul

$$r(b) \cdot r^X = r^Y \cdot b$$

este cocartezian.

Varietăţile şi subcategoriile bireflective au o expunere amplă în lucrările savanţilor J.Diestel, S.A.Morris şi A.Saxon [D, M, S, 1971] şi W.Y.Wulbur [W, 1971]. O subcategorie c-reflective $\mathcal{L}$ defineşte o clasă de varietăţi $\mathcal{L}$-semireflexive (Teorema 9.4.21).

Menţionăm de asemenea şi unele operaţii binare cu subcategorii ce ne conduc la grupoizi: grupoidului $\mathbb{R}$ (§10.3), $\mathbb{R}_c$ (§10.4), $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ (§12.8).

Un rol special în studierea subcategoriilor $\mathcal{L}$-semireflexive îl joacă nucleele (capitolul 13). O subcategorie $\mathcal{L}$-semireflexivă poate fi prezentată ca produs semireflexiv în diverse variante atât după primul cât şi după al doilea factor (Teoremele 12.2.6 şi 12.2.13).

Nucleele indică unele posibilităţi a prezentării unei subcategorii $\mathcal{L}$-semireflexive ca produs semireflexiv. Ele arată uneori domeniile de variaţie a factorilor produsului semireflexiv. Se stabileşte izomorfismul mai multor sublatici ale laticei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Un rol deosebit în studierea subcategoriilor $\mathcal{S}$-semireflexive îl joacă perechile de subcategorii (τ, σ)-duale. Este un izomorfism al clasei subcategoriilor $\mathcal{S}$-semireflexive şi al clasei subcategoriilor coreflective ce se conţin în subcategoria $\tilde{\mathcal{M}}$ a spaţiilor cu topologie Mackey. Astfel punctele (a), (c) şi (e) ale Teoremei 5.5 cap. IV [Sch, 1966] şi-au găsit o interpretare categorială:

a) E este semireflexiv;

c) E'_τ este tonelat;

e) E este quazicomplet în topologia $\sigma(E, E')$.

La această corespondentă subcategoriei spaţiilor semireflexive îi revine subcategoria spaţiilor tonelate, şi subcategoriei spaţiilor complete cu topologie slabă îi revine subcategoria spaţiilor cu cea mai fină topologie local convexă.

Această afirmaţie a fost extisă pentru orice element al clasei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

Teoremă (Teorema 15.2.7 p.3).*Există o corespondentă biunivocă între clasele* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ *şi* $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$.

Echivalenţa unor afirmaţii din această teoremă au fost demonstrate de savantul moscovit M.Buneaev [Bn, 1984]. Astfel se construesc perechi de subcategorii $(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ cu $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Aceste perechi de subcategorii îi permit lui M.Buneaev de-a demonstra legea exponenţială [Bn, 1977] şi [Bn, 1978] cât şi teorema despre graficul închis [Bn, 1982] (vezi de asemenea [K, 1964]).

Unele probleme examinate în monografie pot fi studiate şi în categoriile:

- $\mathcal{U}_2$ a spaţiilor uniforme Hausdorff [Is, 1964];
- $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$ a grupurilor abeline local convexe Hausdorff [Kn, 1970], [Lr, 1974];
- $\mathcal{T}h$ a spaţiilor Tihonov [E, 1985].

Printre aceste probleme menţionăm:

- definirea şi studierea perechilor de subcategorii conjugate;
- definirea şi studierea subcategoriilor semireflexive.

Monografia conţine 34 probleme, 90 exerciţii şi sute de exemple. Poate servi ca un curs facultativ pentru studenţi, ca sursă de cercetare pentru tinerii savanţi.

Aduc sincere mulţumiri colegelor mele Alina Ţurcan şi Olga Cerbu pentru susţinere zi de zi. De asemenea sunt recunoscător Doamnei Aurelia Roşca (Niţuleac) pentru paginarea computerizată.

Introduction

Cette monographie a comme point de départ les deux faits suivants:

1. Le professeur moscovite Dmitrii Raïcov répétait souvent à ses disciples que dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ des espaces localement convexes topologiques vectoriels Hausdorff certaines affirmations peuvent être formulées et démontrées catégorialement.

2. Dans cette catégorie, plusieures notions et énoncés admettent des correspondents duals. Ceci est dû à plusieurs facteurs:

- L'existence des sous-catégories $\tilde{\mathcal{M}}$ des espaces à topologie Mackey et $\mathcal{S}$ des espaces à topologie faible. Ces sous-catégories sont isomorphes et forment une paire de sous-catégories conjuguées. Le Théorème de Mackey-Arens joue un rôle particulier dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

- L'existence des structures de factorisation duales $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) =$ (la classe epi universelle, la classe mono précise) et $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) =$ (la classe épi précise, la classe mono universelle).

- Les couples de sous-catégories conjuguées, qui forment des sous-catégories isomorphes.

Mentionnons que la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ n'est pas autoduale et, pour plusieurs affirmations, celles duales ne sont pas justes. Par exemple, dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ il existe assez d'objets $\mathcal{M}_p$-injectifs, mais il n'existe pas assez d'objets $\mathcal{E}_p$-projectifs. Ainsi la classe $\mathcal{M}_p$ est stable à droite tandis que la classe $\mathcal{E}_p$ n'est pas stable à gauche.

Notations. *Notons par $\mathbb{K}$ (respectivement: $\mathbb{R}$) la classe des sous-catégories coréflectives (respectivement: réflectives). Puisque le corps K dont on examine les espaces vectoriels est sumand direct dans chaque objet non nul du $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, il résulte que $K \in |\mathcal{K}|$ et $K \in |\mathcal{R}|$ pour tout $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Ainsi $\mathcal{R}$ est $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-réflective et $\mathcal{K}$ est $(\mathcal{M}ono \cap \mathcal{E}_u)$-coréflective. Les foncteurs respectifs seront notés par des lettres minuscules: $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ et $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$.*

Soit $\mathcal{M}$ (respectivement: $\mathcal{E}$) une classe de mono (respectivement: epi) et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie. Alors avec $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ (respectivement: $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$) sera notée la sous-catégorie pleine de toutes $\mathcal{M}$-sous objets (respectivement: $\mathcal{E}$-factorobjets) des objets de $\mathcal{A}$, et $P(\mathcal{A})$-sous-catégorie pleine des objets qui sont des produits des objets de $\mathcal{A}$.

Les sous-catégories reflectives on été définies par A.I.Maliţev [Ma, 1958], *et étudiés dans plusieurs publications des mathématiciens allemands H.Herrlich et G.E.Strecker (voir* [A, H, S, 2004]).

Les structures de factorisation ont débuté par un article à deux mathématiciens roumains M.Jurchescu et A.Lascu [J, M, 1966], *ensuite ont paru plusieurs publications sur ce thème C.M.Ringel* [Rg, 1971], *D.A.Raïcov* [Ra, 1972],*D.Pumpliim* [Pm, 1972],*etc.*

Maintes ouvrage ont été publiés sur les structures de factorisation après la parution de l'article de J.F.Kennison [Ke, 1965], *oú est démontré le théorème de Freyd-Isbell,* *Pour la catégorie des algebres universelles ce théorème a été démontré par A.I.Maliţev* [Ma, 1958]. *C'est purquoi certains le nomme le Théorème Maliţev-Freyd-Isbell.*

Soit $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono | k(m) \in \mathcal{I}so\}, \epsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi | r(e) \in \mathcal{I}so\}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}.$

$(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ *est nommé un couple de sous-catégories conjuguées si* $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. *Chaque élément d'un pareil couple détérmine de manière unique le deuxième élément. De tels couples forment la classe* $\mathbb{P}_c$ *et leurs componentes forment la classe* $\mathbb{K}_c$ *des sous-catégories c-coréflectives et* $\mathbb{R}_c$ *des sous-catégories c-réflectives.*

Les sous-catégories qui jouent un rôle important dans l'analyse fonctionnelle telles que les sous-catégories $\mathcal{S}$ *des espaces à topologie faible,* $u\mathcal{N}$ *des espaces ultranucléaires et* $\mathcal{S}h$ *des espaces Schwartz appartiennent à la classe* $\mathbb{R}_c$.

Théorème 1. (Théorème 9.2.5) *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe d'objets* $\mathcal{M}_p$*-injectifs. Alors la sous-catégorie* $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(P(\mathcal{A}))$ *est une sous-catégorie c-réflective.*

2. (Théorème 9.2.12). *Les latices* $\mathbb{P}_c, \mathbb{K}_c$ *et* $\mathbb{R}_c$ *contiennent des classes propres d'éléments.*

Le notion de sous-catégorie c-réflective a été introduite par l'auteur [B, 1976]. Il faut mentionner que des exemples de sous-catégories avec le foncteur reflecteur exact à gauche étaient déjà connus (voir [Br, 1968], [Gl, 1967]. Dans sa thiese de docteur [B, 1979] l'auteur a décrit les propriétés principales des sous-catégories c-réflectives (voir aussi [B, 2018b]).

Pour $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ notons $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (respectivement: $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ la classe de toutes les sous-catégories réflectives fermées par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-sous objets (respectivement: $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets) et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Definition. *Soit* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *La sous-catégorie* $\mathcal{R}$ *se nomme* $\mathcal{L}$*-semi-réflexive si elle est fermée par rapport à* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-sous objets et* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-facteurobjets.* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *est la classe des sous-catégories* $\mathcal{L}$*-semi-réflexives.*

Les sous-catégories $\mathcal{L}$-semiréflexives ont été introduites par l'auteur (voir [B, C, 2007], [B, C, 2009]). *Una série de publications ont paru, où ont été examinées les propriétés des sous-catégories* $\mathcal{L}$*-semiréflexives, ont été construit des exemples* [B, 2018a], [B, 2018b], [B, 2018c], [B, 2020], [B, 2021], [B, 2022], [B, 2023].

Les premiers exemples de sous-catégories $\mathcal{L}$*-semi-réflexives ont été construites avec la* $\mathcal{L}$ *sous-catégorie c-réflective:*

- $s\mathcal{R}$ *la sous-catégorie des espaces semi-réflexifs,* $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$;

- $i\mathcal{R}$ *la sous-catégorie des espaces inductivement semi-réflexifs,* $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}h)$, *I.A. Berezanski* [Be, 1968].

-*p*-$s\mathcal{R}$ *des espaces p-semi-reflexifs, J.Dazord, M.Jourlin* [D, J, 1971];

- $l\Gamma_0$ *sous-catégorie des espaces localement complets,* $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, *D.A.Raïcov* [Ra, 1965];

- $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$ *sous-catégorie des espaces* $\mathcal{B}$*-inductifs semi-reflexifs,* $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, *V.S.Sekovanov*

[Sk, 1980], *D.Botnaru* [B, 2023].

Soit $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Alors $\varepsilon\mathcal{L}_2 \subset \varepsilon\mathcal{L}_1$ et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_1) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_2)$. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V})$.

Il y a diverses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une sous-catégorie soit $\mathcal{L}$-semi-réflexive, surtout quand $\mathcal{L}$ est une sous-catégorie c-réflective. On va indiquer quelelques unes.

Definition. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie et $\mathcal{L}$ une sous-catégorie réflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. L'objet X se nomme $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-réflexif si sa $\mathcal{L}$-réplique appartient à la sous-catégorie $\mathcal{A}$. La sous-catégorie pleine de tous les objets $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-réflexifs se nomme produit semi-réflexif des sous-catégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$, il est noté par*

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}.$$

Théorème (Théorème 12.2.6). *Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.*

Ce théorème indique le rôle particulier que jouent les sous-catégories c-réflecxives dans la construction des sous-catégories semi-réflexives.

Un rôle spécial dans l'étude des sous-catégories $\mathcal{L}$-semi-réflexives est joué par les noyaux (Chapitre 13). Une sous-catégorie $\mathcal{L}$-semi-réflexive peut être présentée comme produit semi-réflexif en diverses variantes tant après le premier qu'après le second facteur (Théorème 12.2.6).

Un rôle particulier dans l'étude des sous-catégories $\mathcal{S}$-semi-réflexives est joué par les couples de sous-catégories (τ, σ)-duales. C'est un isomorphisme de la classe des sous-catégories $\mathcal{S}$-semi-réflexives et de la classe des sous-catégories coréflectives qui se contiennent dansla sous-catégorie $\tilde{\mathcal{M}}$ des espaces à topologie Mackey. Ainsi les points (a), (c) et (e) du Théorème 5.5 chap. IV [Sch, 1966] ont une interprétation catégorielle: a) E est semi-réflexive; c) E'_τ est tonélés; e) E est quasicomplet dans la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème (Théorème 15.2.7 p.3). *Il existe une correspondance biunivoque entre les classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ et $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$.*

L'equivalence de certaines affirmations de ce théorème ont été démontreées par M.Buneaev [Bn, 1984]. On construit ainsi des couples de sous-catégories $(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Ces couples de sous-catégories permettent à M.Buneaev de démontrer la loi exponentielle [Bn, 1977] et [Bn, 1978] et aussi le théorème sur le grafe fermé [Bn, 1982] (voir aussi [K, 1964]).

Certains problèmes examinés dans la monographie peuvent être étudiés aussi dans les catégories: - $\mathcal{U}_2$ des espaces uniformes Hausdorff [Is, 1964]; - $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$ des groupes local convexes Hausdorff [Kn, 1970], [Lr, 1974]; - $\mathcal{T}h$ des espaces Tikhonov [E, 1985].

La monographie contient 34 problmes, 90 exercices et des centaines d'exemples. Elle peut servir comme un cours facultatif pour les étudiants et comme une source de recherche pour les jeunes savants.

Capitolul 1. Limite proiective şi inductive. Functori

1.1. Monomorfisme şi epimorfisme

1.1.1. Definiţie. *Morfismul f al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte monomorfism sau pe scurt mono, dacă din faptul că $f \cdot u = f \cdot v$, rezultă că $u = v$ (într-o egalitate monomorfismul f poate fi simplificat din stânga).*

d^* : *epimorfism sau epi.*

1.1.2. Definiţie.*Morfismul s al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte secţionabil sau secţiune dacă există un morfism r astfel încît $r \cdot s = 1$. Se mai spune că morfisml s posedă inversul de stânga r.*

d^* : morfism retractibil sau retracţie.

1.1.3. Notaţii. *Pentru o categorie arbitrară $\mathcal{C}$ fie:*

1) clasa tuturor monomorfismelor $\mathcal{M}ono$ sau $\mathcal{M}ono\,\mathcal{C}$ când se consideră mai multe categorii;

2) clasa tuturor epimorfismelor $\mathcal{E}pi$ sau $\mathcal{E}pi\ \mathcal{C}$;

3) clasa tuturor bimorfismelor $\mathcal{B}im$ sau $\mathcal{B}im\ \mathcal{C}$; $\mathcal{B}im = \mathcal{M}ono \cap \mathcal{E}pi$;

4) clasa tuturor isomorfismelor $\mathcal{I}so$ sau $\mathcal{I}so\ \mathcal{C}$;

5) clasa tuturor secţiunilor $\mathcal{S}ec$ sau $\mathcal{S}ec\ \mathcal{C}$;

6) clasa tuturor retracţiilor $\mathcal{R}et$ sau $\mathcal{R}et\ \mathcal{C}$.

1.1.4. Remarcă. *De obicei în categoriile algebrei universale monomorfismele sunt aplicaţii injective, iar epimorfismele sunt aplicaţii surjective. Dacă spaţiile topologice sunt Hausdorff, atunci clasa epimorfismelor devine cu mult mai mare: morfismul $f : (X, t) \longrightarrow (Y, u)$ este un epi dacă şi numai dacă $f(X)$ este o mulţime densă în Y.*

1.1.5. Definiţie.*Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}$. Compoziţia claselor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, care o vom nota-o $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, se numeşte clasa tuturor morfismelor de forma $a \cdot b$ pentru care această compoziţie există cu $a \in \mathcal{A}$ şi $b \in \mathcal{B}$.*

1.1.6. Definiţie. *Vom spune că clasa $\mathcal{A}$ de morfisme a categoriei $\mathcal{C}$ este închisă în raport cu compoziţia, dacă $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.*

1.1.7. Definiţie. *1. Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}$. Clasa $\mathcal{A}$ se numeşte $\mathcal{B}$-ereditară dacă din faptul $f \cdot g \in \mathcal{A}$ şi $f \in \mathcal{B}$, rezultă că $g \in \mathcal{A}$. Clasele $\mathcal{C}$-ereditare se numesc simplu ereditare.*

d^* : *mulţime $\mathcal{B}$-coereditară şi coereditară.*

2. Fie că mulţimea $\mathcal{A}$ este $\mathcal{A}$-ereditară. Atunci ea se numeşte a-ereditară.

d^* : *mulţime a-coereditară.*

1.1.8. Exerciţii.

1. $\mathcal{I}so \subset \mathcal{S}ec \subset \mathcal{M}ono$.

2. $\mathcal{E}pi \cap \mathcal{S}ec = \mathcal{I}so$.

3. Clasele $\mathcal{S}ec$ şi $\mathcal{M}ono$ sunt ereditare.

4. Clasele enumerate în p. 1.1.3 sunt închise în raport cu compoziţia.

1.1.9. Lemă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ morfismul $f : (E,t) \longrightarrow (F,u)$ este un epi dacă şi numai dacă $f(E)$ este un subspaţiu dens în spaţiul F.*

$\downarrow$ Fie f un *epi* şi fie că $f(E)$ nu este dens în spaţiu F. În acest caz putem prezenta spaţiul vectorial F ca produs de spaţii F_1 şi F_2 cu următoarele proprietăţi: $f(E) \subset F_1$ şi F_2 este nenul finit dimensional. Examinăm pe subspaţiile F_1 şi F_2 topologiile induse din spaţiul $(F,u) : (F_1,u_1)$ şi (F_2,u_2).

Deoarece F_2 este finit dimensional, deducem că (F,u) este produsul subspaţiilor (F_1,u_1) şi $(F_2,u_2) : (F,u) = (F_1,u_1) \times (F_2,u_2)$. Fie $p_2 : (F,u) \longrightarrow (F_2,u_2)$ proiecţia canonică, iar $q_2 : (F_2,u_2) \longrightarrow (F,u)$ incluziunea canonică. Atunci

$$(E,t) \xrightarrow{\ f\ } (F,u) \underset{q_2 \cdot p_2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} (F,u)$$

Figura 1.1.1

$$(q_2 \cdot p_2) \cdot f = 1 \cdot f,$$

iar

$$q_2 \cdot p_2 \neq 1.$$

Reciproc. Fie că morfismul $f : (E,t) \longrightarrow (F,u)$ are imagine densă şi o să demonstrăm că f este un *epi*. Într-adevăr fie

$$g \cdot f = h \cdot f.$$

Pentru un element arbitrar $y \in F$ există o dirijare $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ astfel încât $f(x_i) \longrightarrow y$. Atunci $gf(x_i) \longrightarrow g(y)$ şi $hf(x_i) \longrightarrow h(y)$. Luând în consideraţie că spaţiile sunt Hausdorff, deducem că $g(y) = h(y)$. $\uparrow$

1.1.10. Exemple. *Categorii în care epimorfismele nu sunt aplicaţii surjective.*

1. În categoria Ann_1 a inelelor cu unitate, urmatoarele incluziuni canonice, deci şi compoziţia lor,

$$Z \longrightarrow Q, \quad Q \longrightarrow R, \quad R \longrightarrow C$$

sunt epimorfisme.

Astfel fie A un inel cu unitate, şi $f, g : C \longrightarrow A$ sunt două omomorfisme de inele cu unitate ce coincid pe inelul Z. Atunci $f = g$.

2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ o teorie de torsiune în $\mathcal{C}$, şi $\mathcal{L}$ localizarea ei. Atunci $\mathcal{F}$ este o subcategorie epireflectivă a categoriei $\mathcal{C}$, iar $\mathcal{L}$ este o subcategorie monoreflectivă (deci şi epireflectivă) a categoriei $\mathcal{F}$. Astfel $\mathcal{L}$-replica oricărui obiect din $\mathcal{F}$ este un bimorfism în $\mathcal{F}$, dar nu întotdeauna (dacă $\mathcal{L} \neq \mathcal{F}$) un iso.

Aşadar în subcategoria $\mathcal{F}$ există epimorfisme ce nu sunt epimorfisme în categoria $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{E}pi\mathcal{F} \not\subset \mathcal{E}pi\mathcal{C}, \ \mathcal{B}im\mathcal{F} \not\subset \mathcal{B}im\mathcal{C}.$$

Ultimele afirmaţii pot fi scrise şi astfel

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{E}pi\mathcal{C} \subset \mathcal{E}pi\mathcal{F}, \ \mathcal{F} \cap \mathcal{B}im\mathcal{C} \subset \mathcal{B}im\mathcal{F}.$$

1.2. Produse şi sume

1.2.1. Definiţie. *Obiectul X şi mulţimea de morfisme $\{p_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$ se numeşte podusul familiei de obiecte $\{X_i \mid i \in I\}$ a categoriei $\mathcal{C}$ dacă ele posedă următoarea proprietate:*

Pentru orice obiect Y al categoriei $\mathcal{C}$ şi orice familie de morfisme $\{f_i : Y \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$ există un singur morfism $f : Y \longrightarrow X$ astfel încît

$$p_j \cdot f = f_j, \forall j \in I.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \prod X_i \arrow[d, "p_j"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "!f"] \arrow[r, "f_j"] & X_j
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.1

Se spune: Obiectul X este produsul (categorial) al familiei de obiecte $\{X_i \mid i \in I\}$ cu proiecţiile canonice $\{p_i \mid i \in I\}$.

Se notează: $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ sau $X = \prod\{X_i \mid i \in I\}$.

d^* : Se spune: Obiectul X este suma (categorială) al familiei de obiecte $\{X_i \mid i \in I\}$ cu incluziunile canonice $\{q_i : X_i \to X \mid i \in I\}$.

Se notează: $X = \coprod\limits_{i\in I} X_i$ sau $X = \coprod\{X_i \mid i \in I\}$.

În categorii aditive se mai utilizează notaţiile

$X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ sau $X = \bigoplus\{X_i \mid i \in I\}$.

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "q_j"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\coprod X_j \arrow[r, dashed, "!f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.2

Pentru orice obiect Y şi orice familie de morfisme $\{f_i \mid i \in I\}$ există un singur morfism f astfel încît

$$f \cdot q_j = f_j, \forall j \in I.$$

1.2.2. Remarcă. *În multe categorii concrete produsul categorial al unei familii de obiecte se realizează ca produsul cartezian al mulţimilor subiacente înzestrat cu structurile respective.*

1.2.3. Exemple. *1. Realizarea produsului în categoria mulţimilor $\mathcal{E}ns$. Fie $\{X_i \mid i \in I\}$ o familie de mulţimi. Atunci produsul categorial poate fi realizat ca produsul cartezian al acestor mulţimi*

$$\prod X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_j \in X_j\}.$$

Proiecţiile canonice $p_j : \prod X_i \longrightarrow X_j$ se definesc astfel:

$$p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j.$$

Pentru orice familie de aplicaţii $f_i : Y \longrightarrow X_i, i \in I$ morfismul $f : Y \longrightarrow \prod X_i$ se defineşte astfel:

$$f(y) = (f_i(y)_{i\in I}).$$

Atunci

$$p_j f(y) = p_j(f_i(y)_{i\in I}) = f_j(y)$$

şi egalităţile din definiţia 1.2.1 sunt verificate.

2. Realizarea produsului în categoria $\mathcal{T}op$ a spaţiilor topologice. Fie $\{(X_i, t_i) \mid i \in I\}$ o familie de spaţii topologice, $X = \prod X_i$, iar $p_i : X \longrightarrow X_i, i \in I$ - proiecţiile canonice în categoria $\mathcal{E}ns$. Pe mulţimea X se defineşte aşa numită topologie Tihonov. Baza acestei topologii t serveşte intersecţia unui număr finit de mulţimi de tipul $p_i^{-1}(\mathcal{G}_i)$, unde $\mathcal{G}_i \in t_i$. Topologia t se mai numeşte topologia proiectivă definită de aplicaţiile $p_i : X \longrightarrow (X_i, t_i), i \in I$. Ea este cea mai slabă topologie pentru care toate alicaţiile $\{p_i, \mid i \in I\}$ sunt continui.

3. Realizarea produsului în categora R - $\mathcal{M}od$ modulelor de stânga peste inelul R. Fie $\{M_i \mid i \in I\}$ o familie de module stângi peste inelul R.

Produsul categorial $M = \prod M_i$ este mulţimea M care este produsul cartezian al familiei $\{M_i \mid i \in I\}$ înzestrat cu structura de R-$\mathcal{M}od$ astfel:

Fie $\{(x_i)_{i \in I}\}$ şi $(y_i)_{i \in I}$ două elemente ale mulţimii M, iar $\alpha \in R$. Atunci

1. $(x_i)_{i \in I} \pm (y_i)_{i \in I} = (x_i \pm y_i)_{i \in I}$.
2. $-(x_i)_{i \in I} = (-x_i)_{i \in I}$.
3. $\alpha \cdot (x_i)_{i \in I} = (\alpha \cdot x_i)_{i \in I}$.
4. $0 = (0_i)_{i \in I}$.

4. Fie $\mathcal{C}$ categoria R-$\mathcal{M}od$ topologice, categoria spaţiilor topologice vectoriale sau categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru orice familie de obiecte $\{X_i \mid i \in I\}$ din categoria $\mathcal{C}$ pe produsul cartezian $X = \prod X_i$ a mulţimilor subiacente $\{X_i \mid i \in I\}$ se defineşte structura algebrică conform ex.3 şi structura topologică conform ex.2. Această topologie este compatibilă cu structura algebrică. Ca rezultat se obţine produsul categorial al familiei de obiecte $\{X_i \mid i \in I\}$ în categoria $\mathcal{C}$.

5. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă în categoria $\mathcal{C}$ din exemplul 4. Deoarece $\mathcal{R}$ este închisă, în raport cu limitele proiective, rezultă că produsul categorial al unei familii de obiecte din $\mathcal{R}$ se construieşte la fel ca în exemplul 4.

6. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă în categoria $\mathcal{C}$ din exemplul 4, iar $\{X_i \mid i \in I\}$ o familie de obiecte a categoriei $\mathcal{K}$. În continuare, fie $X = \prod\{X_i \mid i \in I\}$ produsul categorial al acestei familii în categoria $\mathcal{C}$ cu proiecţiile canonice $\{p_i : X \to X_i \mid i \in I\}$, şi $k^X : kX \longrightarrow X$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X. Deseori k^X este o bijecţie. Astfel structura algebrică, dacă ea există pe obiectul X, este aceeaşi şi în kX. Dacă pe X există careva topologie, atunci pe kX topologia este, în genere, mai fină (k^X nu este un iso). În această situaţie kX este produsul în categoria $\mathcal{K}$ a familiei $\{X_i \mid i \in I\}$ cu proiecţiile canonice $\{p_i \cdot k^X \mid i \in I\}$.

$$kX \xrightarrow{\quad k^X \quad} X \xrightarrow{\quad p_i \quad} X_i$$

Figura 1.2.3

Astfel am indicat un exemplu când topologia pe produsul categorial nu este topologia Tihonov. Topologia pe mulţimea kX este cea mai slabă topologie pentru care aplicaţiile $\{p_i \cdot k^X \mid i \in I\}$ sunt continui şi mulţimea kX cu această topologie aparţine subcategoriei $\mathcal{K}$.

1.2.4. Exemple. *Să examinăm interpretarea sumei unei familii de obiecte în aceleaşi categorii.*

1. Realizarea sumei în categoria $\mathcal{E}ns$. Fie $\{X_i \mid i \in I\}$ o familie de mulţimi. Suma ei este reuniunea disjunctivă a acestor mulţimi. Deoarece unele elemente în mulţimile acestei familii pot coincide între ele, pentru a le deosebi se procedează astfel. Fiecare mulţime X_i este izomorfă cu produsul cartezian $X_i \times \{i\}$. Astfel, de exemplu, mulţimile $X_i \times \{i\}$ şi $X_j \times \{j\}$ sunt diferite, pentru $i \neq j$ chiar dacă $X_i = X_j$. Astfel

$$\coprod\{X_i \mid i \in I\} = \coprod\{X_i \times \{i\} \mid i \in I\}.$$

Incluziunile canonice $q_j : X_j \to \coprod X_i$ sunt definite astfel $q_j(x) = (x, j)$ pentru orice punct $x \in X_j$. Pentru orice familie de morfisme $f_j : X_j \longrightarrow Y$ aplicaţia $f : \coprod X_i \longrightarrow Y$ se defineşte astfel

$$f(x, i) = f_i(x), \forall x \in X_i, \forall i \in I.$$

2. Realizarea sumei în categoria $\mathcal{T}op$. Fie $\{(X_i, t_i) \mid i \in I\}$ o familie de spaţii topologice, iar (X, t) - suma acestor obiecte. Atunci $X = \bigcup\{X_i \times \{i\} \mid i \in I\}$, iar topologia t induce pe fiecare submulţime $X_i \times \{i\} \sim X_i$ topologia t_i.

3. Realzarea sumei în categoria $\mathcal{R}$-$\mathcal{M}od$. Fie $\{M_i \mid i \in I\}$ o familiie de $\mathcal{R}$-module stângi. Suma lor M este submodulul modulului $\prod\{M_i \mid i \in I\}$ format din acele elemente $(m_i)_{i \in I}$ pentru care numai un număr finit de coordonate sunt nenule:

$$p_j((m_i)_{i \in I}) = m_j$$

şi $m_j \neq 0$ numai pentru un număr finit de indici $j \in I$. Incluziunile canonice

$$q_j : M_j \to M$$

operează astfel

$$q_j(m) = (m_i)_{i \in I},$$

unde

$$\begin{cases} m_i = 0, & i \neq j, \\ m_i = m, & i = j. \end{cases}$$

Pentru orice familie de morfisme $f_i : M_i \longrightarrow A$ *morfismul* $f : M \longrightarrow A$ *cu proprietăţile respective se defineşte astfel*

$$f((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(m_i),$$

unde suma scrisă are sens, deoarece numai un număr finit de elemente sunt nenule.

4. Realizarea sumei în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Fie* $\{(E_i, t_i) \mid i \in I\}$ *o familie de obiecte în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $(\prod E_i, t)$ *- produsul categorial al acestei familii, iar* $(\coprod E_i, u)$ *- suma ei. Atunci* $\coprod E_i$ *este suma familiei* $\{E_i \mid i \in\}$ *în categoria spaţiilor vectoriale.*

Aşadar $\coprod E_i$ *este un subspaţiu al spaţiului vectorial* $\prod E_i$. *Însă topologia* u *este, în genere, mai fină ca topologia* t' *indusă de* t *pe subspaţiul* $\coprod E_i$. *Topologia* u *este cea mai fină topologie local convexă pentru care toate incluziunile canonice* $q_j : (E_j, t_j) \to (\coprod E_i, u)$ *sunt continui. Ea se numeşte topologia inductivă definită de aplicaţiile* $q_j, j \in I$. *Menţionăm că atât topologia* t' *cât şi* u *induc pe subspaţiile* E_j *topologiile* t_j.

5. Mulţimea numerelor naturale o examinăm ca o categorie: din obiectul m *în obiectul* n *există un morfism atunci şi numai atunci când* n *divide* m.

a) Suma obiectelor m *şi* n *este cel mai mare divizor comun al numerelor* m *şi* n: $m \otimes n = (m, n)$.

b) În categoria N *există suma oricărui număr de obiecte. În particular* $m^{(I)} = m$.

c) Produsul obiectelor m *şi* n *este cel mai mic multiplu comun al numerelor* m *şi* n: $m \times n = [m, n]$. *În particular* $m^I = m$.

d) În subcategoria N *există produsul oricărui număr finit de obiecte. Produsul unui număr infinit de obiecte diferite nu există.*

1.2.5. Definiţie. *Categoria* $\mathcal{C}$ *se numeşte conexă, dacă pentru orice două obiecte* X, Y *ale ei* $Hom(X, Y) \neq \emptyset$.

1.2.6. Fie $\mathcal{C}$ o categorie conexă, $\{(X_i, i \in I\}$ o familie de obiecte pentru care există produsul $\prod X_j$ cu proiecţiile canonice $p_i : \prod X_j \longrightarrow X_i$. Fixăm un indice $i_0 \in I$ şi careva morfism $f_i : X_{i_0} \longrightarrow X_i$, $i \neq i_0$ şi $i \in I$. Pentru $i = i_0$ fie $f_i = 1$.

$$\begin{tikzcd}
 & \prod X_j \arrow[d, "p_i"] \\
X_{i_0} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.4

În baza definiţiei produsului categorial există un morfism $f : X_{i_0} \longrightarrow \prod X_j$ astfel încît

$$p_i \cdot f = f_i, i \neq i_0$$

şi

$$p_{i_0} \cdot f = 1.$$

Ultima egalitate arată că proiecţiile canonice în acest caz sunt retracţii.

Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie conexă. Atunci proiecţiile canonice sunt retracţii, iar incluziunile canonice în sumă sunt secţiuni.*$\uparrow$

1.2.7. Remarcă. *Inversul de dreapta f al proiecţiei p_{i_0} nu este unic determinat.*

1.2.8. Fie $\mathcal{C}$ o categorie conexă, şi $\{X_i, i \in I\}$ o familie de obiecte pentru care există produsul şi suma

$$\prod X_j \xrightarrow{\quad p_i \quad} X_i \qquad X_i \xrightarrow{\quad q_i \quad} \coprod X_j$$

Figura 1.2.5

Cum s-a menţionat mai sus morfismele p_i sunt retracţii, iar q_i - secţiuni. Pentru fiecare q_i fixăm un invers de stânga $t_i, i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
\coprod X_j \arrow[rr, dashed, "t"] \arrow[d, dashed, shift left, "t_i"] & & \prod X_j \arrow[dll, dashed, "p_i"] \\
X_i \arrow[u, shift left, "q_i"] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.6

Aşadar există un morfism $t : \coprod X_j \to \prod X_j$ astfel încât

$$p_i \cdot t = t_i, \forall i \in I.$$

Într-o categorie aditivă se examinează morfismul t definit de următoarea familie de morfisme $t_i, i \in I$

$$\begin{cases} t_i \cdot q_i = 0, & i \neq j, \\ t_i \cdot q_i = 1, & i = j. \end{cases}$$

1.2.9. Să examinăm diagrama precedentă pentru categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$

$$
\begin{tikzcd}
\left(\coprod X_j, u\right) \arrow[rr, dashed, "t"] \arrow[d, shift left, "t_i"] & & \left(\prod X_j, v\right) \arrow[dll, shift right, "p_i"'] \\
\left(X_i, v_i\right) \arrow[u, shift left, "q_i"] \arrow[urr, shift right, "s_i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.2.7

unde

$$t_i \cdot q_j = 0, \qquad i \neq j; \qquad t_i \cdot q_i = 1, \qquad i = j, \tag{1}$$

$$p_i \cdot s_j = 0, \qquad i \neq j; \qquad p_i \cdot s_i = 1, \qquad i = j. \tag{2}$$

Aceste egalităţi definesc şi următoarele egalităţi:

$$p_i \cdot t = t_i, \qquad \forall i \in I, \tag{3}$$

$$t \cdot q_i = s_i, \qquad \forall i \in I. \tag{4}$$

Din egalităţile (1) şi (2) deducem.

Teoremă. *1. Topologia proiectivă definită pe X_i de spaţiul $(\coprod X_j, u)$ şi aplicaţia q_i coincide cu cea iniţială v_i.*

2. Topologia proiectivă definită pe X_i de spaţiul $(\prod X_j, v)$ şi aplicaţia s_i coincide cu cea iniţială v_i.

3. Topologia inductivă definită pe X_i de spaţiul $(\coprod X_j, u)$ şi aplicaţia t_i coincide cu cea iniţială v_i.

4. Topologia inductivă definită pe X_i de spaţiul $(\prod X_j, v)$ şi aplicaţia p_i coincide cu cea iniţială v_i. $\uparrow$

1.2.10. Să examinăm în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ morfismul t din diagrama precedentă. Deoarece $\coprod X_j$ este un subspaţiu al spaţiului $\prod X_j$, conchidem că topologia v' indusă pe subspaţiul $\coprod X_j$ de topologia v este mai slabă ca topologia u.

Teoremă. *Topologiile u şi v' coincid pe spaţiul $\coprod X_j$ dacă şi numai dacă mulţimea de indici I este finită.* $\uparrow$

1.2.11. Fie $\{X_i, i \in I\}$ şi $\{Y_i, i \in I\}$ două familii de obiecte ale categoriei $\mathcal{C}$ indexate cu aceeaşi mulţime I. Mai departe, fie că există produsele categoriale ale fiecărei familii cu proiecţiile canonice

$$p_i : \prod X_j \longrightarrow X_i \quad \text{şi} \quad t_i : \prod Y_j \longrightarrow Y_i.$$

În această situaţie orice familie de morfisme $\{f_i : X_i \longrightarrow Y_i \mid i \in I\}$ defineşte un morfism unic $f : \prod X_j \longrightarrow \prod Y_j$ cu proprietăţile

$$f_i \cdot p_i = t_i \cdot f, \qquad \forall i \in I.$$

$$\begin{tikzcd}
\prod X_j \arrow[r, "f = \prod f_j"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod Y_j \arrow[d, "t_i"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"] & Y_i
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.8

Definiţie. *Morfismul* f *se numeşte produsul morfismelor* $\{f_i \mid i \in I\}$ *şi se notează* $f = \prod f_i$ *sau* $f = \prod\{f_i \mid i \in I\}$.

d^* : *Suma unei familii de morfisme.*

Notaţii. $f = \coprod f_i$ *sau* $f = \coprod\{f_i \mid i \in I\}$.

1.2.12. Definiţie. *Vom spune că clasa* $\mathcal{A} \subset Mor\mathcal{C}$ *este multiplicativă (închisă în raport cu produsele) dacă pentru orice familie de morfisme* $\{f_i \mid i \in I\}$ *din clasa* $\mathcal{A}$ *pentru care există* $\prod f_i$, *rezultă că acest produs de asemenea aparţine clasei* $\mathcal{A}$.

d^* : *Clasă de morfisme închisă în raport cu sumele.*

1.2.13. Exerciţiu. *Clasa monomorfismelor* $\mathcal{M}ono$ *a oricărei categorii* $\mathcal{C}$ *este închisă în raport cu produsele.*

1.2.14. Propoziţie. *În categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *clasa* $\mathcal{E}pi$ *este închisă în raport cu produsele: dacă* $e_i : X_i \longrightarrow Y_i \in \mathcal{E}pi, \quad i \in I$ *şi* $e = \prod e_i$, *atunci* $e \in \mathcal{E}pi$.

$\downarrow$ Fie $X = \prod\{X_i \mid i \in I\}$, $Y = \prod\{Y_i \mid i \in I\}$, iar $p_i : X \longrightarrow X_I$ şi $q_i : Y \longrightarrow Y_i$ proiecţiile canonice. Atunci

$$e_i \cdot p_i = q_i \cdot e, \quad \forall i \in I. \tag{1}$$

Trebuie să demonstrăm că imaginea spaţiului X în spaţiul Y este o mulţime densă. Fie G o mulţime deschisă nevidă în spaţiul Y. Deorece pe spaţiul Y avem topologia Tihonov, există o mulţime finită $J \subset I$ şi mulţimile deschise G_i, $i \in J$ în spaţiile Y_i astfel încât

$$G = G' \times Y'',$$

unde

$$G' \supset \prod\{G_i \mid i \in J\}$$

şi

$$Y'' = \prod\{Y_i \mid i \in I \setminus J\}.$$

Fie $X' = \prod\{X_i \mid i \in J\}$, $Y' = \prod\{Y_i \mid i \in J\}$ cu priecţiile canonice $p'_i : X' \longrightarrow X_i$ şi $q'_i : Y \longrightarrow Y_i$. Notăm $e = \prod\{e_i \mid i \in J\}$. Atunci există morfsmele $p : X \longrightarrow X'$ şi $q : Y \longrightarrow Y'$ astfel încât

$$p_i = p'_i \cdot p, \quad \forall i \in J,$$

$$q_i = q'_i \cdot q, \quad \forall i \in J,$$

$$e' \cdot p = q \cdot e.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "e=\prod e_i"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "p_i"'] & & & Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, "q_i"] \\
& X' \arrow[r, "e'"] \arrow[dl, dashed, "p'_i"'] & Y' \arrow[dr, dashed, "q'_i"] & \\
X_i \arrow[rrr, "e_i"] & & & Y_i
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2.9

Deoarece $e' = \prod\{e_i \mid i \in J\} = \coprod\{e_i \mid\in J\}$ deducem că e' este un *epi*. Luând în considraţie că mulţimea G' este deschisă şi nevidă, conchidem că există un punct $x' = (x'_i)_{i\in I} \in X'$ astfel încât $e'(x') \in G'$. Examinăm în spaţiul X punctul $(x'_i)_{i\in J}$, unde $x_i = x'_i, \quad i \in I$ şi $x_i = 0, \quad i \in I \setminus J$. Atunci $e(x) \in G' \times Y'' \subset G$. $\uparrow$

1.2.15. Functorul $\mathcal{S}_\tau$. Presupunem că în categoria $\mathcal{C}$ există suma oricărei familii de τ obiecte.

a) Functorul $\mathcal{S}_\tau : \mathcal{C}^\tau \longrightarrow \mathcal{C}$ se defineşte astfel

$$\mathcal{S}_\tau((X_i)_{i\in I}) = \coprod\{X_i \mid i \in I\}, \quad \mathcal{S}_\tau((f_i)_{i\in I}) = \coprod\{f_i \mid i \in I,\ f_i = f\}.$$

b) Functorul $\mathcal{S}_\tau : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ se defineşte pentru $\mid I \mid= \tau$

$$\mathcal{S}_\tau(X) = X^{(\tau)} = \coprod\{X_i \mid i \in I, X_i = X\}, \quad \mathcal{S}_\tau(f) = \coprod\{f_i \mid i \in I, f_i = f\}.$$

1.2.16. Functorul $\mathcal{P}_\tau$. Fie τ un cardinal finit sau infinit, $\tau \geq 0$.

1. Presupunem că în categoria $\mathcal{C}$ există produsul oricărei familii de τ obiecte.

a) Definim functorul $\mathcal{P}_\tau : \mathcal{C}^\tau \longrightarrow \mathcal{C}$ în modul următor: pentru orice familie de obiecte $(X_i)_{i \in I}$, unde $\mid I \mid = \tau$, considerăm

$$\mathcal{P}_\tau((X_i)_{i \in I}) = \prod\{X_i \mid i \in I\}.$$

Dacă $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, atunci

$$\mathcal{P}_\tau((f_i)_{i \in I}) = \prod\{f_i \mid i \in I\}.$$

b) Defnim functorul $\mathcal{P}_\tau : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ astfel:

$\mathcal{P}_\tau(X) = X^\tau$ şi $\mathcal{P}_\tau(f) = f^\tau$.

1.2.17. Exerciţii. *1. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa morfismelor care sunt aplicaţii surgective (clasa E_u) este închisă în raport cu produsele şi sumele.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_q = Coker$ este închisă în raport cu produsele.

1.3. Pătrate carteziene, cocarteziene, egalizatori şi coegalizatori

1.3.1. Definiţie. *Fie $f : X \longrightarrow Z$ şi $g : Y \longrightarrow Z$ două morfisme ale categoriei $\mathcal{C}$. Obiectul P şi morfismele $f' : P \longrightarrow Y$ şi $g' : P \longrightarrow X$ se numesc pătrat cartezian construit pe morfismele f şi g dacă $g \cdot f' = f \cdot g'$ şi acest pătrat posedă următoarea proprietate universală:*

Pentru orice două morfisme $u : T \longrightarrow X$ şi $v : T \longrightarrow Y$ dacă $f \cdot u = g \cdot v$, atunci există un morfism unic $h : T \longrightarrow P$ astfel încât $g' \cdot h = u$ şi $f' \cdot h = v$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3.1

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& P \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3.2

Se spune: $f \cdot g' = g \cdot f'$ este un pătrat cartezian construit pe morfismele f şi g, unde $f : X \longrightarrow Y$ şi $g : X \longrightarrow Z$.

d^* : *Se spune: $g' \cdot f = f' \cdot g$ este un pătrat cocartezian construit pe morfismele f şi g.*

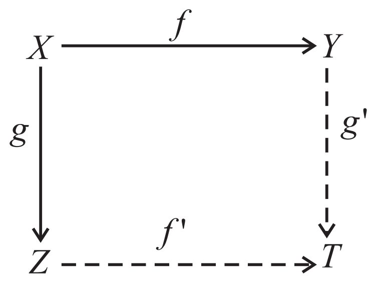


Figura 1.3.3

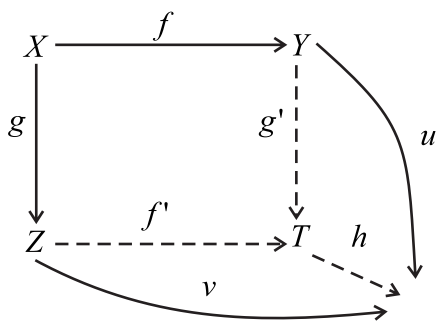


Figura 1.3.4

1.3.2. Definiţie. *Fie $f, g : X \longrightarrow Y$ o săgeată dublă în categoria $\mathcal{C}$. Obiectul K şi morfismul $k : K \longrightarrow X$ se numesc egalizatorul acestei săgeţi duble dacă $f \cdot k = g \cdot k$ şi pentru orice morfism u cu proprietatea $f \cdot u = g \cdot u$ rezultă că există un morfism unic h astfel încât $k \cdot h = u$.*

Se notează: $k = eq(f, g)$.

Se spune: morfismul u se factorizează prin morfismul k.

d^* : Coegalizatorul săgeţii duble.

Se notează: $q = coeq(f, g)$.

Se spune: morfismul v se extinde prin morfismul q.

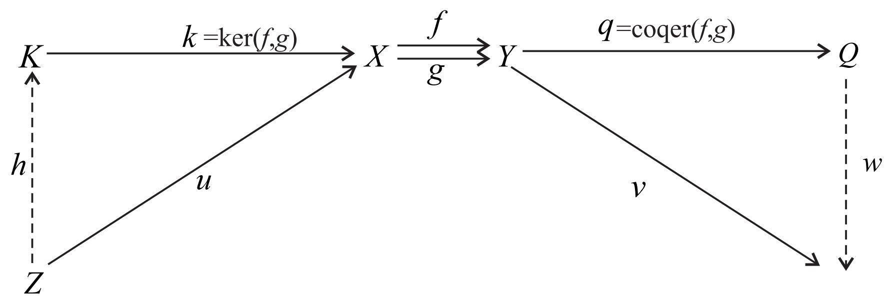


Figura 1.3.5

1.3.3. Exerciţiu. *În definiţia 1.3.2 unicitatea morfismului h cu proprietatea respectivă este echivalentă cu faptul că k este un mono.*

1.3.4. Definiţie. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu morfisme nule, şi $k = eq(f, 0)$. Atunci q se numeşte nucleul morfismului f şi se noteză $k = ker f$.*

1.3.5. Notaţii. *Fie $\mathcal{E}q$ sau $\mathcal{E}q\mathcal{C}$ clasa tuturor morfismelor categoriei $\mathcal{C}$ care sunt egalizatoare de săgeţi duble. Într-o categorie cu morfisme nule $\mathcal{K}er$ sau $\mathcal{K}er\mathcal{C}$ este clasa tuturor monomorfismelor ce sunt nuclee a unor morfisme.*

d^* : $\mathcal{C}oeq$ sau $\mathcal{C}oeq\ \mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}ok$ sau $\mathcal{C}ok\ \mathcal{C}$.

d^* : *coegalizatorul perechii* $(f, 0)$ $q = coeq(f, 0)$ *se numeşte conucleul morfismului* f *şi se notează* $q = coeqf$.

1.3.6. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie aditivă, şi* $k = eq(f, g)$. *Atunci:*

1. $kerf = eq(f, 0)$.

2. $k = ker(f - g)$.

1.3.7. Definiţie. *Fie* $f \cdot u = f \cdot v$ *pătratul cartezian construit pe morfismele* f *şi* f. *Atunci* (u, v) *se numeşte perechea nucleară a morfismului* f.

d^* : *Perechea conucleară a morfismului* f.

1.3.8. Exerciţii. *1. Fie* $k = eq(f, g)$, *iar* (u, v) *perechea conucleară a morfismului* k. *Atunci* $k = eq(u, v)$.

2. Fie (u, v) *perechea nucleară a morfismului* f. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) f *este un mono;*

b) $u = v$;

c) $u = v \in \mathcal{I}so$;

d) $(1, 1)$ *este perechea nucleară a morfismului* f.

3. Fie $r \cdot s = 1$. *Atunci* $s = eq(s \cdot r, 1)$. *În particular,* $s \in \mathcal{E}_q$.

1.3.9. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse finite. Atunci existenţa egalizatorilor permite construirea pătratelor carteziene şi invers. Într-adevăr fie date două morfisme $f : X \longrightarrow Z$ şi $g : Y \longrightarrow Z$ în categoria $\mathcal{C}$, iar $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ şi $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ proiecţiile canonice. Pentru orice două morfisme $u : T \longrightarrow X$ şi $v : T \longrightarrow Y$ există un morfism $t : T \longrightarrow X \times Y$ astfel încât

$$p_1 \cdot t = u, \tag{1}$$

$$p_2 \cdot t = v. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "t"] \arrow[dd, "v"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& X \times Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dl, "p_2"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3.6

Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $t = eq(f \cdot p_1, g \cdot p_2)$.

2. Pătratul $f \cdot u = g \cdot v$ este comutativ şi este pătrat cartezian construit pe morfismele f şi g. $\uparrow$

1.3.10. Exemple. *1. Fie $f, g : X \longrightarrow Y$ o săgeată dublă în categoria $\mathcal{E}ns$, iar $k = eq(f, g) : K \to X$. Atunci*

$K = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

În multe categorii concrete egalizatorul se construieşte la fel ca în categoria mulţimilor $\mathcal{E}ns$, înzestrând, dacă este necesar, submulţimea K cu structurile din mulţimea X. Considerăm funcţiile $f, g : R \longrightarrow R$, unde $f(x) = x^2$, iar $g(x) = x^2 + 1, x \in R$. Atunci egalizatorul acestei perechi este mulţimea vidă şi aplicaţia vidă.

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "\emptyset"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & R \end{tikzcd}$$

Figura 1.3.7

Astfel în categorii topologice nu orice săgeată dublă posedă egalizator. Sunt posibile următoarele două situaţii, ori admitem spaţiul topologic vid, ori trebuie să avem grijă ca această construcţie să fie corectă.

2. Din Teorema precedentă rezultă cum trebuie construite pătratele carteziene.

Fie date două morfisme $f : X \longrightarrow Z$ şi $g : Y \longrightarrow Z$ în categoria $\mathcal{E}ns$. În produsul cartezian $X \times Y$ examinăm submulţimea:

$$T = \{(x, y) \in X \times Y \mid fp_1(x, y) = gp_2(x, y)\}$$

sau, ce-i acelaşi lucru:

$$T = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}.$$

3. Fie în categoria $\mathcal{E}ns$ $f : X \longrightarrow Y$ un morfism şi $X \neq \{\emptyset\}$, iar $u, v : T \longrightarrow X$ perechea nucleară a acestui morfism. Atunci T conţine toate punctele de forma (x, x) cu $x \in X$ şi deci nu este o mulţime vidă.

4. În categoria $\mathcal{G}r$ grupurilor clasa $\mathcal{K}er$ coincide cu clasa subgrupurilor normale [Ku, 1967]. *Aceasta rezultă din următoarele considerente. Fie G un grup, iar H un subgrup al lui. Considerăm mulţimea factor G/H şi aplicaţiile canonice $m : H \longrightarrow G$, $q : G \longrightarrow G/H$.*

Pe mulţimea G/H poate fi întrodusă structura de grup astfel încât q să fie un omomorfism de grupuri, dacă şi numai dacă H este un subgrup normal.

$$H \xrightarrow{\ m\ } G \xrightarrow{\ q\ } G/H$$

Figura 1.3.8

5. Într-o categorie abeliană, în particular, în categoria $\mathcal{A}b$ şi R-$\mathcal{M}od$, avem $\mathcal{K}er = \mathcal{M}ono$.

6. În categoria $\mathcal{A}nn$ inelelor clasa $\mathcal{K}er$ coincide cu clasa idealelor.

1.3.11. Remarcă. *Noţiunea de ideal se întâlneşte în diverse domenii ale matematicii. Şi dacă ar fi să examinăm categoriile respective, atunci în puţine din ele noţiunea de ideal coincide cu cea de nucleu.*

1.3.12. Este justă şi afirmaţia reciprocă pentru teorema precedentă .

Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse finite şi pătrate carteziene. Atunci orice săgeată dublă posedă egalizator.*↑

1.3.13. Exerciţiu.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "u''"'] & \cdot \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "u'"] & \cdot \arrow[d, "u"] \\
\cdot \arrow[r, "g"] & \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3.9

Fie

$$f \cdot u' = u \cdot f'$$

pătratul cartezian construit pe morfismele f şi u, iar

$$g \cdot u'' = u' \cdot g'$$

pătratul cartezian construit pe morfismele g şi u'. Atunci

$$(f \cdot g) \cdot u'' = u \cdot (f' \cdot g')$$

este pătratul cartezian construit pe morfismele $f \cdot g$ şi u.

1.3.14. Definiţie. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu obiect nul. Şirul*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

Figura 1.3.10

se numeşte:

a) exact la stânga dacă $k = kerq$;

b) exact la dreapta dacă $q = cokerk$;

c) exact dacă $k = kerq$ şi $q = cokerk$.

1.3.15.Exerciţii. *Fie dat şirul*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

Figura 1.3.11

şi pătratul

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "0"] \arrow[d, "k"'] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

Figura 1.3.12

1. Şirul (fig 1.3.11) este exact la stânfa $\Leftrightarrow$ *pătratul (fig 1.3.12) este cartezian.*

2. Şirul (fig 1.3.11) este exact la dreapta $\Leftrightarrow$ *pătratul (fig 1.3.12) este cocartezian.*

3. Şirul (fig 1.3.11) este exact $\Leftrightarrow$ *pătratul (fig 1.3.12) este cartezian şi cocartezian.*

1.3.16. Definiţie. *Clasa* $\mathcal{A}$ *de morfisme a categoriei* $\mathcal{C}$ *se numeşte stabilă la stânga dacă pentru orice pătrat cartezian* $f \cdot g' = g \cdot f'$ *din faptul că* $f \in \mathcal{A}$, *rezultă că şi* $f' \in \mathcal{A}$.

d^* : Clasă stabilă la dreapta.

1.3.17. Exerciţii. *În orice categorie următoarele clase sunt stabile la stânga:*

1. Clasa $\mathcal{M}ono$ *monomorfismelor.*

2. Clasa $\mathcal{R}et$ *retracţiilor.*

3. Clasa $\mathcal{I}so$ *isomorfismelor.*

4. Printre axiomele categoriei semiabeliene în sensul Raïcov figurează şi următoarele:

a) clasa $\mathcal{K}er$ *este stabilă la dreapta;*

b) clasa $\mathcal{C}oq$ *este stabilă la stânga.*

5. Categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este semiabeliană în sensul Raïcov* [Ra, 1969].

1.3.18. Definiţie. *Monomofismul* m *se numeşte strict, dacă pentru morfismul* h *egalitatea* $u \cdot m = v \cdot m$ *implică întotdeauna egalitatea* $u \cdot h = v \cdot h$, *rezultă că morfismul* h *se factorizează prin morfismul* m.

1.3.19. Exerciţii. *Fie că mono* m *posedă pereche conucleară.* m *este strict atunci şi numai atunci când* $m \in \mathcal{E}q$.

1.4. $\mathcal{Z}$-morfisme

1.4.1. Definiţie. *Fie $\mathcal{Z}$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$.*

1. Morfismul $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{C}$ se numeşte $\mathcal{Z}$-morfism dacă există un obiect $A \in |\mathcal{Z}|$ şi morfismele $u : X \longrightarrow A$ şi $v : A \longrightarrow Y$ astfel încât $f = v \cdot u$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "u"'] & & Y \\
& A \arrow[ur, dashed, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.4.1

2. Morfismul k se numeşte $\mathcal{Z}$-nucleu al morfismului f dacă $f \cdot k$ este un $\mathcal{Z}$-morfism şi pentru orice morfism g astfel încât $f \cdot g$ este un $\mathcal{Z}$-morfism, rezultă că există un singur morfism k astfel încât

$$g = h \cdot k.$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
T \arrow[u, dashed, "!h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.4.2

Se notează: $k = \mathcal{Z}\text{-}ker f$.

d: $\mathcal{Z}$-conucleul morfismului f.*

Se notează: $q = \mathcal{Z}\text{-}coker f$.

3. Şirul din figura 1.4.3

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "q"] & Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figura 1.4.3

se numeşte $\mathcal{Z}$-exact, dacă $k = \mathcal{Z}\text{-}ker q$ şi $q = \mathcal{Z}\text{-}coker k$.

1.4.2. Execiţii. *1. Unicitatea morfismului h cu proprietatea respectivă în Definiţia 1.4.1 este echivalentă cu faptul că $k \in \mathcal{M}ono\mathcal{C}$.*

2. Fie dat sirul din figura 1.4.4

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

Figura 1.4.4

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $k = \mathcal{Z}$-$kerf$;

b) există un obiect $A \in\mid \mathcal{Z} \mid$ *şi morfismele* u *şi* v

$$K \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} X$$

Figura 1.4.5

astfel încât pătratul $v \cdot u = q \cdot k$ *este cartezian.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 1.4.6

3. Fie dat şirul

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

Figura 1.4.7

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $k = \mathcal{Z}$-$ker\ q$ *şi* $q = \mathcal{Z}$-$cokerk$;

b) există un obiect $A \in\mid \mathcal{Z} \mid$ *şi morfismele* u *şi* v

$$K \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} X$$

Figura 1.4.8

astfel încât pătratul $f \cdot k = v \cdot u$ *este cartezian şi cocartezian.*

1.5. Limite proiective şi inductive

1.5.1. Definiţie. *Mulţimea I se numeşte parţial ordonată dacă pe ea este întrodusă o relaţie de ordine "$\leq$" cu următoarele proprietăţi:*

1. $i \leq i$ pentru orice element $i \in I$.

2. Dacă $i \leq j$ şi $j \leq k$, atunci $i \leq k$.

Orice mulţime parţial ordonată I poate fi privită ca o categorie mică, unde ObI sunt elementele mulţimii I şi pentru orice $i, j \in I$ din obiectul i în obiectul j există un morfism unic dacă şi numai dacă $i \leq j$.

1.5.2. Definiţie. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie, şi I o mulţime parţial ordonată. Vom spune că în categoria $\mathcal{C}$ este definit un I-spectru $\mathcal{S}$ dacă fiecărui element $i \in I$ i se pune în corespondenţă un obiect $\mathcal{A}_i \in \mid \mathcal{C} \mid$ şi fiecărui morfism $i \leq j$ i se pune în corespondenţă un morfism $f_{ij} : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ cu proprietăţile:*

1. $f_{ii} = 1$.

2. Dacă $i \leq j \leq k$, atunci $f_{jk} \cdot f_{ij} = f_{ik}$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "f_{ik}"'] & A_j \arrow[r, "f_{jk}"] & A_k \end{tikzcd}$$

Figura 1.5.1

Altfel vorbind, un I-spectru $\mathcal{S}$ nu-i altceva decât un functor din categoria mică I în categoria $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{S} : I \longrightarrow \mathcal{C}, \mathcal{S}(i) = A_i, \quad \mathcal{S}(i \leq i) = 1, \quad \mathcal{S}(i \leq j) = f_{ij}, \forall i, j \in I.$$

Se mai notează $\mathcal{S} = (A_{ij}, f_{ij}, i \leq j)$.

1.5.3. Definiţie. *Fie I o mulţime parţial ordonată, şi $\mathcal{S}$ un I-spectru în categoria $\mathcal{C}$. Obiectul A şi familia de morfisme*

$$p_i : A \longrightarrow A_i, i \in I$$

se numeşte limita proiectivă a spectrului $\mathcal{S}$ dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1) $f_{ij} \cdot p_i = p_j, \forall i, j \in I, i \leq j$.

2) Pentru orice obiect B al categoriei $\mathcal{C}$ şi orice sistem de morfisme $g_i : B \longrightarrow A_i$ ce verifică relaţiile,

$$f_{ij} \cdot g_i = g_j, \forall i, j \in I, i \leq j$$

există un morfism unic $g : B \longrightarrow A$ astfel încât

$$p_i \cdot g = g_i, \quad \forall i \in I.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "p_i"] \arrow[drr, "p_j"'] & & A_i \arrow[d, "f_{ij}"] \\
B \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[urr, "g_i"] \arrow[rr, "g_j"'] & & A_j
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5.2

Notaţii:

$$A = \lim_{\longleftarrow} \mathcal{S},$$

sau

$$A = \lim_{\longleftarrow C} \mathcal{S}.$$

d^* : Limita inductivă a spectrului $\mathcal{S}$.

Notaţii:

$$\mathcal{A} = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{S}$$

sau

$$\mathcal{A} = \lim_{\longrightarrow \mathcal{C}} \mathcal{S}.$$

1.5.4. Exerciţii. *Indicaţi mulţimea parţial ordonată şi spectrul $\mathcal{S}$ pentru construirea următoarelor limite proiective:*

1. *Produsul categorial al unei familii de obiecte.*
2. *Produsul cartezian a două morfisme respective.*
3. *Egalizatorul unei săgeţi duble.*

1.5.5. Realizarea limitei proiective a unui spectru în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie I o mulţime parţial ordonată, iar $\mathcal{S}$ un I-spectru în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod A_k, t\right) = \prod\left(A_k, t_k\right) \arrow[rr, "p_i"] \arrow[drr, "p_j"] & & (A_i, t_i) \arrow[d, "f_{ij}"] \\
(A, u) \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[urr, dashed, "p'_i"] \arrow[rr, dashed, "p'_j"] & & (A_j, t_j)
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5.3

Mai departe, examinăm produsul categorial al familiei de obiecte $\{(A_i, t_i) \mid i \in I\}$ cu proiecţiile canonice p_i. Fie

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{S} = (A, u)$$

cu proiecţiile canonice $p_i{}' : (A, u) \rightarrow (A_i, t_i)$. Atunci

$$A = \{x \in \prod A_k \mid f_{ij} \cdot p_i(x) = p_j(x)\},$$

sau

$$A = \{(x)_{i \in I} \in \prod A_k \mid f_{ij}(x_i) = x_j, \forall i, j \in I, i \leq j\}.$$

Fie $m : A \longrightarrow \prod A_k$ incluziunea canonică. Atunci definim

$$p_i{}' = p_i \cdot m, \quad \forall i \in I.$$

Topologia u pe spaţiul vectorial A este topologia indusă din obiectul $(\prod A_k, t)$, adică u este topologia proiectivă indusă pe A de aplicaţiile $p'_i : A \longrightarrow (A_i, t_i)$.

Spectrului $\mathcal{S}$ îi punem în corespondenţă în categoria spaţiilor vectoriale $\mathcal{V}ect$ spectrul $\mathcal{S}'$ şi operatorii liniari $f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j, i, j \in I$. Deci spectrul nou $\mathcal{S}'$ este functorul $\mathcal{S}$ în compoziţie cu functorul subiacent $u : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}ect$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{S}'"'] & \mathcal{C}_2\mathcal{V} \arrow[r, "u"] & \mathcal{V}ect
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5.4

Teoremă. *Fie*

$$(A,u) = \lim_{\longleftarrow \mathcal{C}_2\mathcal{V}} \mathcal{S}.$$

Atunci

1.

$$A = \lim_{\leftarrow_{Vect}} (uS)$$

2. Topologia u este topologia proiectivă definită de proiecţiile canonice $p_i' : A \longrightarrow A_i, i \in I$. $\uparrow$

1.5.6. Remarcă. *Menţionăm, dacă fiecare factor* $(A_i, t_i), i \in I$ *este un spaţiu Hausdorff, atunci la fel este şi spaţiul* $\prod(A_i, t_i)$*, iar cu el este Hausdorff şi subspaţiul* (A, u).

1.5.7. Topologia inductivă. Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile $\mathcal{TV}$, $\mathcal{T}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{CA}b$, $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$, $\mathcal{CV}$, $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar $(A_i, t_i), i \in I$ o familie de obiecte, A un spaţiu vectorial, iar $f_i : (A_i, t_i) \longrightarrow A, i \in I$ un sistem de operatori liniari. Definim în A următoarea topologie u :

$\mathcal{G} \in u$, dacă $\forall i \in I$ $f_i^{-1}(\mathcal{G}) \in t_i$.

Este clar că spaţiul vectorial A înzestrat cu această topologie nu este un obiect al categoriei $\mathcal{C}$. Astfel topologia inductivă în categoria $\mathcal{T}op$ şi în categoria $\mathcal{C}$ sunt în genere lucruri diferite.

Să examinăm în A mulţimile $\mathcal{U}$ care verifică condiţiile:

1. $\mathcal{U}$ este radială;
2. $\mathcal{U}$ este absorbantă;
3. $\mathcal{U}$ este convexă;
4. Pentru $\forall i \in I$ $f_i^{-1}(\mathcal{U}) \in t_i$.

În categoria $\mathcal{TV}$ topologia inductivă pe spaţiul vectorial A definită de operatorii liniari f_i sunt toate mulţimile $\mathcal{U}$ care verifică condiţiile 1 - 2 şi 4.

În categoria $\mathcal{CV}$ topologia inductivă t sunt toate mulţimile $\mathcal{U}$ care verifică condiţiile 1 - 4.

În categoria $\mathcal{CA}b$ topologia inductivă t sunt toate mulţimile $\mathcal{U}$ care verifică condiţiile 1 şi 3 - 4.

1.5.8. Teoremă. *Spaţiul A înzestrat cu topologia t aparţine categoriei respective.* $\uparrow$

1.5.9. Remarcă. *Dacă toate spaţiile* $(A_i, t_i), i \in I$ *sunt Hausdorff, aceasta nu înseamnă că şi spaţiul* (A, t) *este la fel.*

1.5.10. Realizarea limitei inductive a unui spectru în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie I o mulţime parţial ordonată, iar $\mathcal{S}$ un I-spectru în una din aceste categorii. Ca şi mai sus examinăm functorul

$$u \cdot \mathcal{S} : I \longrightarrow \mathcal{V}ect$$

şi limita inductivă a lui

$$B = \lim_{\to \mathcal{V}ect} u \cdot \mathcal{S}$$

cu injecţiile canonice $q_i : A_i \longrightarrow B, i \in I$. Pe spaţiul B definim topologia inductivă t.

Teoremă. *Obiectul (B,t) cu injecţiile canonice $q_i : (A_i, t_i) \longrightarrow (A,t)$ este limita inductivă a spectrului $\mathcal{S}$ în categoria $\mathcal{CV}$:*

$$(B,t) = \lim_{\longrightarrow \mathcal{CV}} \mathcal{S}. \uparrow$$

1.5.11. Dacă $\mathcal{S}$ este un spectru în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, atunci

$$\lim_{\to \mathcal{C}_2\mathcal{V}} \mathcal{S}$$

nu neapărat aparţine categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi deci nu este limita inductivă a acestui spectru în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie ca şi mai sus

$$(B,t) = \lim_{\to \mathcal{CV}} \mathcal{S},$$

iar B' închiderea mulţimii 0 în spaţiul (B,t). Mai departe, fie $B'' = B/B'$, adică $B'' = Cokerk$, unde $k : B' \longrightarrow B$ este incluziunea canonică (aceste construcţii se efectuează în categoria $\mathcal{V}ect$).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{S}'"'] & \mathcal{C}_2\mathcal{V} \arrow[r, "u"] & \mathcal{V}ect \end{tikzcd}$$

Figura 1.5.5

Pe spaţiul B'' se examinează topologia inductivă t'' în raport cu aplicaţia q.

Teoremă.

$$(B'', t'') = \lim_{\to \mathcal{C}_2\mathcal{V}} \mathcal{S}. \uparrow$$

1.5.12. Topologia factor. Factortopologia este o topologie inductivă şi în categoriile $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$ se construieşte conform p.1.5.7.

1.5.13. Intersecţia unei mulţimi de subobiecte.

La construirea structurilor de factorizare, tema căreia îi este dedicat următorul capitol, un rol important îl joacă intersecţia unei mulţimi de subobiecte.

Vom începe tratarea acestei întrebări pornind de la relaţia de ordine pe mulţimea de subobiecte a unui obiect. Fie $m_1 : X_1 \longrightarrow X$ şi $m_2 : X_2 \longrightarrow X$ două monomorfisme. Vom spune că $m_1 \leq m_2$ dacă

$$f \cdot m_2 = m_1 \tag{1}$$

pentru un morfism f. Este evident, dacă împreună cu egalitatea (1) mai avem şi egalitatea

$$g \cdot m_1 = m_2 \tag{2}$$

pentru un morfism g, atunci $f = g^{-1}$ şi m_1 şi m_2 se numesc echivalente. Astfel clasa de monomorfisme cu adresa în obiectul X se împarte în clase de echivalenţă. Fiecare element al unei clase de echivalenţă reprezintă această clasă şi se numeşte subobiect al obiectului X.

Definiţie. *Categoria $\mathcal{C}$ se numeşte local mică dacă clasa subobiectelor (clasa claselor de echivalenţă) a oricărui obiect al categoriei $\mathcal{C}$ este o mulţime.*

d^* : *factorobiect, categorie colocal mică.*

1.5.14. Exerciţiu. *Categoriile $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\mathcal{U}_2$ a spaţiilor uniforme Hausdorff sunt local şi colocal mici.*

1.5.15. Exemplu. *Să examinăm categoria $\mathcal{C}ard$, unde obiectele sunt cardinalii şi dacă $\alpha \leq \beta$, atunci din obiectul α în obiectul β există un singur morfism $\alpha \longrightarrow \beta$. Orice morfism al acestei categorii este un bimorfism.*

Categoria $\mathcal{C}ard$ nu este colocal mică.

Categoria $\mathcal{C}ard^*$ nu este local mică.

Prin analogie definim categoria $\mathcal{O}rd$, unde obiectele sunt ordinale.

Categoria $\mathcal{O}rd$ nu este colocal mică.

Categoria $\mathcal{O}rd^*$ nu este local mică.

1.5.16. Definiţie. *Fie $\mathcal{M}$ o clasă de monomorfisme în categoria $\mathcal{C}$, şi $\{m_i : X_i \longrightarrow X \mid i \in I\}$ o mulţime de subobiecte a obiectului X.*

1. Subobiectul $m : X' \longrightarrow X \in \mathcal{M}$ se numeşte $\mathcal{M}$-infimul mulţimii $\{m_i : X_i \longrightarrow X \mid i \in I\}$ dacă:

a) $m \leq m_i \quad \forall i \in I$.

b) Fie $\{p : Y \longrightarrow X \in \mathcal{M}$ astfel încât $p \leq m_i \quad \forall i \in I,$. Atunci $p \leq m$.

Se notează: $m = \mathcal{M}\text{-}inf\{m_i \mid i \in I\}$.

Când $\mathcal{M} = \mathcal{M}ono\ \mathcal{C}$ se scrie simplu $m = inf\{m_i \mid i \in I\}$, sau $m = \wedge\{m_i \mid i \in I\}$.

2. Subobiectul $\overline{m} : \overline{X} \longrightarrow X$ se numeşte $\mathcal{M}$-supremul mulţimii $\{m_i : X_i \longrightarrow X \mid i \in I\}$ de $\mathcal{M}$-subobiecte a obiectului X dacă:

a) $m_i \leq \overline{m} \quad \forall i \in I$.

b) Fie $q : Z \longrightarrow X \in \mathcal{M}$ astfel încât $m_i \leq q \quad \forall i \in I$. Atunci $\overline{m} \leq q$.

Se notează $\overline{m} = \mathcal{M}\text{-}sup\{m_i \mid i \in I\}$.

Când $\mathcal{M} = \mathcal{M}ono\ \mathcal{C}$ se scrie simplu $\overline{m} = sup\{m_i \mid i \in I\}$, sau $\overline{m} = \vee\{m_i \mid \quad i \in I\}$.

d^*: Fie $\mathcal{E}$ o clasă de epimorfisme a categoriei $\mathcal{C}$, iar $\{e_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$ o mulţime de $\mathcal{E}$-factorobiecte a obiectului X.

1^*. *Factorobiectul $e : X \longrightarrow X'' \in \mathcal{E}$ se numeşte $\mathcal{E}$-infimul mulţimii $\{e_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$ dacă:*

a) $e \leq e_i \ \forall i \in I$.

b) Fie $p : X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}$ *astfel încât* $p \leq e_i \quad \forall i \in I$. *Atunci* $p \leq e$.

Se notează: $e = \mathcal{E}\text{-}inf\{e_i \mid i \in I\}$. *Când* $\mathcal{E} = \mathcal{E}pi\mathcal{C}$ *se scrie simplu* $e = inf\{e_i \mid i \in I\}$, *sau* $e = \wedge\{e_i \mid i \in I\}$.

2^*. *Factorobiectul* $e : X \longrightarrow Z \in \mathcal{E}$ *se numeşte* $\mathcal{E}$*-supremul mulţimii* $\{e_i \mid i \in I\}$ *dacă:*

a) $e_i \leq e \quad \forall i \in I$.

b) Fie $s : X \longrightarrow Z \in \mathcal{E}$ *astfel încât* $e_i \leq s \ \forall i \in I$. *Atunci* $e \leq s$.

Se notează $\overline{e} = \mathcal{E}\text{-}sup\{e_i \mid i \in I\}$. *Când* $\mathcal{E} = \mathcal{E}pi\mathcal{C}$ *se scrie simplu* $\overline{e} = sup\{e_i \mid i \in I\}$, *sau* $\overline{e} = \vee\{e_i \mid i \in I\}$.

1.5.17. Exerciţiu. *În multe categorii concrete* $\wedge m_i = \bigcap m_i(X)$.

1.5.18. Fie $\{m_i : X_i \longrightarrow X \mid i \in I\}$ o mulţime de subobiecte ale obiectului X . Examinăm relaţia de ordine definită mai sus între elementele acestei mulţimi. Menţionăm, dacă $m_i \leq m_j$, atunci

$$m_i = m_j \cdot f_{ij} \tag{$*$}$$

pentru un morfism f_{ij}. Deoarece m_j este monomorfism deducem că morfismul f_{ij} cu proprietatea $(*)$ este în mod unic determinat. Aşadar, putem considera, că $i \leq j$. Astfel mulţimea I devine parţial ordonată, şi $\{m_i : X_i \longrightarrow X \mid i \in I\}$ un spectru S.

Pentru a simplifica lucrurile vom considera că subobiectul $1_X : X \longrightarrow X$ aparţine acestei mulţimi.

Fie $\{t_i : Y \longrightarrow X_i \mid i \in I$ şi $t : Y \longrightarrow X\}$ limita proiectivă a acestui spectru $\mathcal{S}$. Atunci $\{m_i \cdot t_i = t, \forall i \in I\}$.

Teoremă. *Morfismul* t *este un mono şi*

$$t = \wedge\{m_i \mid i \in I\}. \uparrow$$

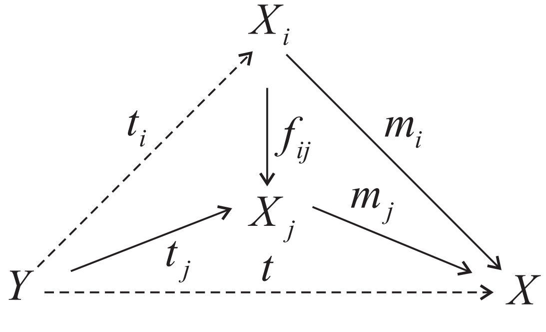


Figura 1.5.7

1.5.19. Fie $\{p_i : X \longrightarrow X'' \mid i \in I\}$ o mulţime de factorobiecte a obiectului X . Se consideră $p_j \leq p_i$ dacă $f_{ij} \cdot p_i \leq p_j$ pentru un morfism f_{ij}. Ca şi mai sus se consideră că factorobiectul $1_X : X \longrightarrow X$ aparţine mulţimii date. Fie $\{q_i : X_i \longrightarrow Q \mid i \in I$ şi $q : X \longrightarrow Q\}$ limita inductivă a spectrului obţinut.

Teoremă. *Morfismul q este un epimorfism şi*

$$q = \wedge\{p_i \mid i \in I\}. \uparrow$$

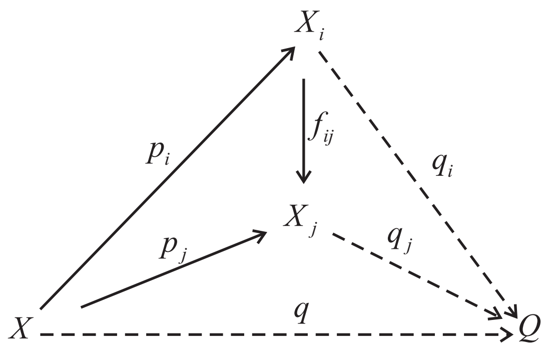


Figura 1.5.8

1.5.20. Remarcă. *Supremul unei mulţimi de subobiecte cât şi supremul unei mulţimi de factorobiecte vor fi examinate în contextul structurilor de factorizare.*

1.6. Functori

1.6.1. Definiţie. *Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii. Vom spune că s-a definit un functor covariant (contravariant) $\mathcal{F}$ de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$ şi vom scrie $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dacă:*

1. Pentru orice obiect X s-a definit un obiect unic $\mathcal{F}(X)$ din $\mathcal{C}'$.

2. Pentru orice pereche (X, Y) de obiecte din $\mathcal{C}$ şi orice morfism $f : X \longrightarrow Y$ s-a definit un unic morfism: $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ (respectiv $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$) astfel încît:

a) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$;

b) Dacă $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ sunt morfisme din $\mathcal{C}$, atunci $\mathcal{F}(g \cdot f) = \mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(f)$ (respectiv: $\mathcal{F}(g \cdot f) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$).

1.6.2. Exemple. *1. Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi X un obiect al său. Vom nota $h^X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ functorul $h^X(Y) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pentru orice $Y \in\mid \mathcal{C} \mid$; dacă $f : Y \longrightarrow Y' \in \mathcal{C}$, atunci $h^X(f) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y')$ este aplicaţia definită astfel: $h^X(f)(g) = f \cdot g$, iar $h_X(f)(g) = g \cdot f$ pentru $f : Y' \to Y$ şi $g : Y \to X$. h^X este un functor covariant.*

2. Notăm de asemenea cu $h_X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ functorul definit astfel: $h_X(Y) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(Y, X)$; ca mai sus se constată că h_X este un functor contravariant de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{E}ns$.

1.6.3. Definiţie. *Fie $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ doi functori covarianţi (contravarianţi); vom spune că s-a dat un morfism functorial de la $\mathcal{F}$ la $\mathcal{G}$, dacă pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$ s-a dat un* *morfism $\alpha_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ din $\mathcal{C}'$ astfel că pentru orice morfism $f : X \longrightarrow Y$ din $\mathcal{C}$, avem diagrama comutativă:*

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\left(
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
G(X) & G(Y) \arrow[l, "G(f)"']
\end{tikzcd}
\right)
$$

Figura 1.6.1

Fie $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ functori (covarianţi) de la categoria $\mathcal{C}$ la categoria $\mathcal{C}'$ şi $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ două morfisme functoriale; vom nota cu $\beta \cdot \alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ compunerea celor două morfisme functoriale şi anume morfismul functorial definit astfel: pentru orice $X \in Ob(\mathcal{C})$, $(\beta \cdot \alpha)_X = \beta_X \cdot \alpha_X$. Cititorul va constata imediat că compunerea morfismelor functoriale astfel definită este asociativă. Un morfism functorial $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ se va numi un monomorfism (epimorfism, bimorfism) functorial, dacă pentru orice $X \in \mid \mathcal{C} \mid$, α_X este un monomorfism (epimorfism, bimorfism) din $\mathcal{C}'$. În fine, α este izomorfism functorial dacă există un morfism funcorial $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ astfel că $\alpha \cdot \beta = 1_{\mathcal{G}}$, $\beta \cdot \alpha = 1_{\mathcal{F}}$, unde cu $1_{\mathcal{G}}$ am notat morfismul functorial identic al lui $\mathcal{G}$ canonic definit. Aceasta este echialentă cu faptul că α_X este un izomorfism din $\mathcal{C}'$ pentru orice $X \in \mid \mathcal{C} \mid$.

1.7. Functori adjuncţi

1.7.1. Trimitem cititorul la lucrările [P, 1971], [B, D, 1972] pentru a face cunoştinţă şi a aprofunda unele chestiuni legate de functorii adjuncţi şi săgeţile de adjuncţie. Menţionăm doar următoarele rezultate.

1.7.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un functor covariant şi $\mathcal{G}$ un adjunct al său la dreapta. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{F}$ comută cu limita inductivă a oricărui functor în $\mathcal{C}$.

2. $\mathcal{G}$ comută cu limita proiectivă a oricărui functor în $\mathcal{C}'$. $\uparrow$

Vom spune că două categorii $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ sunt echivalente, dacă există un functor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ covariant, care verifică una din afirmaţiile teoremei precedente, un astfel de functor se va numi o echivalenţă de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$.

Două categorii se zic antiechivalente, dacă una din ele este echivalentă cu duala celeilalte. Evident că orice categorie este echivalentă cu un schelet al său.

Această teoremă are drept consecinţă următorul corolar:

1.7.3. Corolar. *Fie $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un functor şi $\mathcal{G}$ un adjunct al său la dreapta deplin şi fidel. Atunci sunt valabile următoarele afirmaţii:*

1. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite inductive, $\mathcal{C}'$ este o categorie cu limite inductive.

2. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite proiective, $\mathcal{C}'$ este o categorie cu limite proiective.

3. Dacă $\mathcal{C}$ are o mulţime de generatori $(u_i)_{i\in I}$, atunci obiectele $(F(u_i)_{i\in I})$ constituie o mulţime de generatori pentru $\mathcal{C}'$. $\uparrow$

1.7.4. Corolar. *Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii echivalente. Atunci:*

1. Clasele $\mathbb{R}(\mathcal{C})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{C}')$ a subcategoriilor reflective sunt izomorfe.

2. Clasele $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ şi $\mathbb{K}(\mathcal{C}')$ a subcategoriilor coreflective sunt izomorfe. $\uparrow$

1.7.5. Corolar. *Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii duale. Atunci:*

1. Clasele $\mathbb{R}(\mathcal{C})$ şi $\mathbb{K}(\mathcal{C}')$ sunt izomorfe.

2. Clasele $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{C}')$ sunt izomorfe. $\uparrow$

1.7.6. Corolar. *Fie $\mathcal{C}$ o cartegorie autoduală. Atunci clasele $\mathbb{R}(\mathcal{C})$ şi $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ sunt izomorfe.*$\uparrow$

Capitolul 2. Structuri de factorizare

2.1. Morfisme ortogonale

Notaţiile referitor la clasele ortogonale de morfisme corespund lucrării [Ra, 1972], unde Teorema 2.5.1 a fost numită de profesorul D.Raïcov Teorema Kelly-Botnaru. Concomitent au apărut demonstraţii ale acestei Teoreme în diverse publicaţii. Acum aceasta Teoremă ţine de folclor matematic.

2.1.1. Definiţie. *Morfismul f al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte ortogonal de sus la morfismul g, iar morfismul g se numeşte ortogonal de jos la morfismul f, dacă pentru orice pătrat comutativ*

$$g \cdot u = v \cdot f \tag{1}$$

există un singur morfism (numit diagonal) h astfel încît

$$u = h \cdot f, \tag{2}$$

$$v = g \cdot h. \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & {} \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ {} \arrow[r, "g"'] & {} \end{tikzcd}$$

Figura 2.1.1

Se notează: $f \perp g$.

Observăm că unicitatea diagonalei h are loc dacă f este un *epi* sau g este un mono.

2.1.2. Fie $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$ două clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}$. Vom nota $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$, dacă pentru orice două morfisme $k \in \mathcal{K}$ şi $l \in \mathcal{L}$ avem $k \perp l$. Dacă $\mathcal{K}$ are un singur element k, respectiv $\mathcal{L}$ are un singur element l, atunci se scrie $k \perp \mathcal{L}$ şi $\mathcal{K} \perp l$ în loc de $\{k\} \perp \mathcal{L}$ şi $\mathcal{K} \perp \{l\}$.

Notaţii.

$$\mathcal{K}^{\perp} = \{l \in \mathcal{C} \mid \mathcal{K} \perp l\}, \quad \mathcal{K}^{\llcorner} = \mathcal{K}^{\perp} \cap (\mathcal{M}ono\mathcal{C}), \quad \mathcal{L}^{\top} = \{k \in \mathcal{C} \mid k \perp \mathcal{L}\}, \quad \mathcal{L}^{\neg} = \mathcal{L}^{\top} \cap (\mathcal{E}pi\mathcal{C}).$$

2.1.3. Exemple.

1. $\mathcal{I}so\perp\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{C}\perp\mathcal{I}so$*, adică orice iso este ortogonal de sus şi de jos oricărui morfism al categoriei* $\mathcal{C}$*.*

2. Pentru orice două clase de morfisme $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{L}$ *ale categoriei* $\mathcal{C}$ *avem:*

$$\mathcal{I}so\mathcal{C} \subset \mathcal{K}^{\perp} \cap \mathcal{L}^{\top}.$$

Astfel clasele $\mathcal{K}^{\perp}$ *şi* $\mathcal{L}^{\top}$ *nu-s vide.*

2.1.4. Notaţii. *Morfismele clasei* $(\mathcal{M}ono\mathcal{C})^{\urcorner} = \mathcal{E}_f$ *se numesc epi tari (strong, forte).*

d^* : $(\mathcal{E}pi\mathcal{C})^{\llcorner} = \mathcal{M}_f$ *clasa mono tari.*

2.1.5. Exemplu. $\mathcal{S}ec \subset \mathcal{M}_f$.

2.1.6. Lemă. *Fie* $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{L}_1$ *clase de morfisme ale categoriei* $\mathcal{C}$*. Atunci:*

1. $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\perp\top}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^{\perp\top}$.

2. $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1 \Longrightarrow {\mathcal{K}_1}^{\perp} \subset {\mathcal{K}_2}^{\perp}$,
$\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \Longrightarrow {\mathcal{L}_1}^{\top} \subset {\mathcal{L}_2}^{\top}$.

3. $\mathcal{K}^{\perp\top\perp} = \mathcal{K}^{\perp}$, $\mathcal{L}^{\top\perp\top} = \mathcal{L}^{\top}$.

$\downarrow$ O să demonstrăm relaţia $\mathcal{K}^{\perp\top\perp} = \mathcal{K}^{\perp}$. Avem $\mathcal{K}^{\perp\top\perp} = (\mathcal{K}^{\perp})^{\top\perp} \supset \mathcal{K}^{\perp} \supset (\mathcal{K}^{\perp\top})^{\perp} = \mathcal{K}^{\perp\top\perp}$. $\uparrow$

2.2. Clase saturate şi clase complete de morfisme

2.2.1. Definiţie. *Clasa* $\mathcal{E}$ *de morfisme a categoriei* $\mathcal{C}$ *se numeşte saturată superior dacă* $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\perp\top}$.

d^* : *Clasă saturată inferior:* $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\top\perp}$.

2.2.2. Definiţie. *Clasa de morfisme* $\mathcal{A}$ *a categoriei* $\mathcal{C}$ *se numeşte completă la dreapta, dacă ea verifică următoarele condiţii:*

1. $Iso\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

3. Clasa $\mathcal{A}$ *este stabilă la dreapta.*

4. Suma dacă există a oricărei mulţimi de elemente din clasa $\mathcal{A}$ *aparţine clasei* $\mathcal{A}$*:*

$$\{a_i : X_i \longrightarrow Y_i \in \mathcal{A} \mid i \in I\} \Rightarrow \sqcup\{a_i \mid i \in I\} \in \mathcal{A}.$$

5. Pentru orice spectru de forma

$$\{a_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$$

dacă există limita inductivă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "a_i"] \arrow[dr, dashed, "q"'] & & X_i \arrow[dl, dashed, "q_i"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.2.1

$$q_i \cdot a_i = q \quad \forall i \in I,$$

atunci $q \in \mathcal{A}$.

d^**: Clasa de morfisme completă la stânga.*

2.2.3. Teoremă. *Fie* $\mathcal{E}$ *o clasă saturată superior. Atunci:*

1. $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{\perp} = Iso$.
2. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este închisă în raport cu compoziţia.*
3. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este* $\mathcal{E}$*-coereditară.*
4. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este* $\mathcal{E}pi$*-coereditară.*
5. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este stabilă la dreapta.*
6. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este închisă în raport cu sumele.*
7. *Clasa* $\mathcal{E}$ *este închisă în raport cu intersecţia* $\mathcal{E}$*-factorobiectelor, dacă* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$. $\uparrow$

2.2.4. Remarcă. *După cum o să vedem pe viitor o clasă saturată superior* $\mathcal{E}$ *nu este coereditară, chiar dacă* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.

2.3. Clase de *epi* şi *mono* saturate

2.3.1. Definiţie. *Clasa de epi* $\mathcal{E}$ *a categoriei* $\mathcal{C}$ *se numeşte saturată superior dacă* $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\perp\urcorner}$.

d^* : *Clasă de mono* $\mathcal{M}$ *este saturată inferior, dacă* $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\top\llcorner}$.

2.3.2. Lemă. *Fie* $\mathcal{C}$ *o clasă care posedă egalizatori, iar* $\mathcal{E}$ *o calsă saturată superior. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.
2. $\mathcal{E}q \subset \mathcal{E}^{\perp}$. $\uparrow$

2.3.3. Corolar. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie cu egalizatori. Atunci pentru orice clasă* $\mathcal{E}$ *de epi clasa* $\mathcal{E}^{\perp\top}$ *e tot o clasă de epi, i. e.*

$$\mathcal{E}^{\perp\top} = \mathcal{E}^{\top\urcorner}. \quad \uparrow$$

2.3.4. O clasă de *epi* $\mathcal{E}$ saturată superior posedă proprietăţile enumerate în Teorema 2.2.3. Menţionăm că unicitatea diagonalei în pătratele respective rezultă din faptul că $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.

Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu coegalizatori, şi $\mathcal{E}$ o clasă de epi saturată superior. Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{C}oeq\, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

2. Clasa $\mathcal{E}$ este coereditară.

Atunci $1 \Rightarrow 2.\uparrow$

2.3.5. Remarcă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ condiţiile 1 şi 2 sunt echivalente (a se vedea 2.6.1 p.2).*

2.4. Structuri de factorizare

2.4.1. Fie $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ două clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}$. O să examinăm următoarele axiome:

B_0. $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \supset \mathcal{I}so$.

B_1. Clasele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ sunt închise în raport cu compoziţia.

B_2. $\mathcal{C} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, adică orice morfism al categoriei $\mathcal{C}$ admite factorizarea, numită $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea:

$$f = i \cdot p$$

cu $i \in \mathcal{I}$ şi $p \in \mathcal{P}$. Această factorizare este unică, dacă $i \cdot p = i_1 \cdot p_1$ cu $i, i_1 \in \mathcal{I}$ şi $p, p_1 \in \mathcal{P}$, atunci există un *iso* h astfel încît

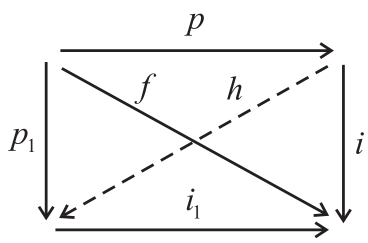


Figura 2.4.1

$$i = i_1 \cdot h,$$

$$p_1 = h \cdot p.$$

B_3. $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi\mathcal{C}$.

B_4. $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}ono\mathcal{C}$.

Definiţie. *1. Se spune că perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ este o structură de factorizare (structură bicategorială) în categoria $\mathcal{C}$ dacă clasele de morfisme $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ verifică axiomele $B_0 - B_4$.*

2. Se spune că perechea $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ este o structură de factorizare de dreapta (respectiv: de stânga) dacă clasele de morfisme $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ verifică axiomele $B_0 - B_3$ (respectiv: B_0 - B_2 şi B_4).

3. Se spune că perechea $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ este o structură de factorizare generală dacă clasele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ verifică axiomele B_0-B_2.

Structurile de factorizare de stânga şi de dreapta se numesc şi unilaterale.

2.4.2. Teoremă. *1. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$. Atunci*

$$\mathcal{P}=\mathcal{I}^{\urcorner}, \quad \mathcal{I}=\mathcal{P}^{\llcorner}. \tag{$*$}$$

2. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}$. Atunci

$$\mathcal{P}=\mathcal{I}^{\urcorner}, \quad \mathcal{I}=\mathcal{P}^{\perp}. \tag{$**$}$$

3. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de stânga a categoriei $\mathcal{C}$. Atunci

$$\mathcal{P}=\mathcal{I}^{\top}, \quad \mathcal{I}=\mathcal{P}^{\llcorner}. \tag{$***$}$$

4. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare generală. Atunci

$$\mathcal{P}=\mathcal{I}^{\top}, \quad \mathcal{I}=\mathcal{P}^{\perp}.\ \uparrow \tag{$****$}$$

2.4.3. O să enumărăm proprietăţile unei structuri de factorizare de dreapta (pentru cele de stânga fiind proprietăţile duale) şi indicând care proprietăţi în plus le au structurile de factorizare. Unele din aceste proprietăţi fiind şi suficiente.

Teoremă. *Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta. Atunci:*

1. *Clasele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{I}$ sunt închise în raport cu compoziţia: $\mathcal{P}\circ\mathcal{P}=\mathcal{P}$, $\mathcal{I}\circ\mathcal{I}=\mathcal{I}$.*
2. $\mathcal{P}\cap\mathcal{I}=\mathcal{I}so$.
3. $\mathcal{P}=\mathcal{I}^{\urcorner}$.
4. $\mathcal{I}=\mathcal{P}^{\perp}$ *(pentru o structură de factorizare $\mathcal{I}=\mathcal{P}^{\llcorner}$).*
5. *Orice morfism al categoriei $\mathcal{C}$ posedă o unică (până la un isomorfism) $(\mathcal{P},\mathcal{I})$-factorizare, $\mathcal{C}=\mathcal{I}\circ\mathcal{P}$.*
6. *Clasa $\mathcal{P}$ este completă la dreapta.*
7. *Clasa $\mathcal{I}$ este completă la stânga.*
8. Clasa $\mathcal{I}$ este ereditară.
9. *Clasa $\mathcal{P}$ este coereditară numai pentru structurile de factorizare. În genere, clasa $\mathcal{P}$ nu este coereditară.*
10. *Clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară şi $\mathcal{P}$-coereditară.* $\uparrow$

2.4.4. Definiţie. *Monomorfismul m al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte universal (stabil), dacă din faptul că*

$$m' \cdot f = f' \cdot m$$

este un pătrat cocartezian, rezultă că m' este un mono.

d^*: epimorfism universal.

Notaţii. *$\mathcal{M}_u$ sau $\mathcal{M}_u(\mathcal{C})$ este clasa tuturor monomorfismelor universale ale categoriei $\mathcal{C}$.*

d^* : $\mathcal{E}_u$ sau $\mathcal{E}_u(\mathcal{C})$ este clasa epimorfismelor universale a categoriei $\mathcal{C}$.

2.4.5. Defniţie. *Elementele clase $\mathcal{E}_p = (\mathcal{M}_u)^{\urcorner}$ se numesc epimorfisme exacte (precise).*

d^*: Clasa monomorfismelor exacte (precise) $\mathcal{M}_p = (\mathcal{E}_u)^{\urcorner}$

2.4.6. Exemple. *1. Clasa $\mathcal{M}_u$ este stabilă la dreapta.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{T}h$ a spaţiilor Tihonov şi altele clasa $\mathcal{E}_u$ coincide cu clasa morfismelor care-s aplicaţii surgective.

3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{M}_u$ va fi descrisă în 2.4.8.

4. În categoria $\mathcal{T}h$ clasa $\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$ coincide cu clasa epimorfismelor $f : X \longrightarrow Y$ cu proprietatea ca

$$\beta^X = g \cdot f$$

pentru un morfism g, unde $\beta^X : X \longrightarrow \beta X$ este compactificaţia Stône-Cech a spaţiului X.

2.4.7. Structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ (vezi 6.6.10).

Exerciţii. *1. Corpul K este un generator în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Astfel clasa epimorfismelor universale $\mathcal{E}_u$ coincide cu clasa morfisme surjective.*

2. Perechea $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ =(clasa morfismelor surjective, clasa morfismelor ce sunt incluziuni topologice) este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Deci $\mathcal{M}_p$ este clasa morfismelor ce sunt incluziuni topologice.

3. Fie $f : (E, u) \to (F, v) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pe spaţiul vectorial $f(E)$ examinăm topologia v' indusă din spaţiul (F, v), iar p şi i aplicaţiile canonice.

$$\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & (f(E),v') \arrow[r, "i"] & (F,v)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4.2

Atunci $f = i \cdot p$ este $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea morfismului f.

2.4.8. Structura de factorizare $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ ([B, G, 1973). **Clasa $\mathcal{M}_u$.** Fie $m : (E, u) \to (F, v)$ un mono în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi v' este topologia indusă pe spaţiul E de topologia v. Avem următoarea descompunere

$$
\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right, "m"'] & (E,v') \arrow[r, "i"] & (F,v)
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4.3

Lemă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $m \in \mathcal{M}_u$.

2. Topologiile u *şi* $v^{'}$ *sunt compatibile cu una şi aceeaşi dualitate:* $(E,u)' = (E,v')'$.

3. Orice funcţional definit pe (E,u) *se extinde prin* m.

$\downarrow$ $1 \Rightarrow 2$. Fie $m \in \mathcal{M}_u$. Atunci şi $b \in \mathcal{M}_u$. Pentru $f : (E,u) \to K$ un funcţional, fie

$$b' \cdot f = f' \cdot b \tag{1}$$

pătratul cocartezian construit pe b şi f. Atunci $b' \in \mathcal{M}ono$. Deci b' este secţionabil:

$$t \cdot b' = 1 \tag{2}$$

pentru un t. Astfel

$$f = t \cdot f' \cdot b, \tag{3}$$

sau $f \in (E,v')'$.

$$
\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f"'] & (E,v') \arrow[d, "f'"] \\
K \arrow[r, dashed, shift left, "b'"] & T \arrow[l, dashed, shift left, "t"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4.4

$2 \Rightarrow 3$. Evident.

$3 \Rightarrow 1$. Fie

$$m' \cdot g = g' \cdot m \tag{4}$$

un pătrat cocartezian şi

$$m' \cdot h = 0 \tag{5}$$

cu $h \neq 0$. Atunci $w \cdot h \neq 0$ pentru un funcţional w :

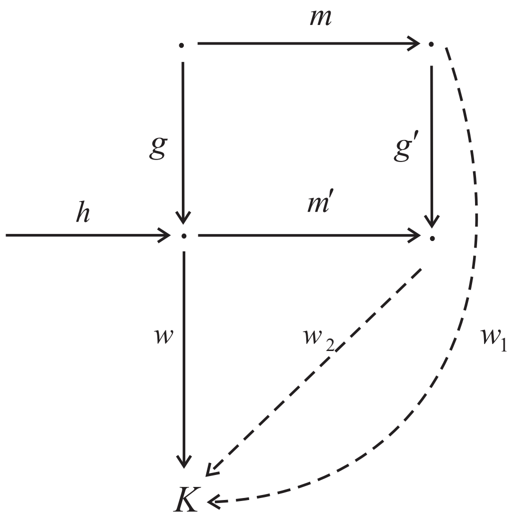


Figura 2.4.5

Din ipoteza 3 deducem că

$$w \cdot g = w_1 \cdot m \tag{6}$$

pentru un w_1. De unde, la rândul său, rezultă că

$$w = w_2 \cdot m', \tag{7}$$

$$w_1 = w_2 \cdot g' \tag{8}$$

pentru un w_2. Astfel $w \cdot h = 0$. Contradicţie. $\uparrow$

2.4.9. Clasa $\mathcal{E}_p$. Fie $b : (E, u) \to (F, v) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $m(u)$ şi $m(v)$ topologiile Mackey compatibile cu topologiile u şi v, $m^E : (E, m(u)) \to (E, u)$ $m^F : (F, m(v)) \to (F, v)$ aplicaţiile identice ce sunt continui, şi $m(b) : (E, m(u)) \to (F, m(v))$ aplicaţia b ce este continuă şi în topologiile respective.

Menţionăm că am aplicat functorul coreflector $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$, unde $\tilde{\mathcal{M}}$ este subcategoria spaţiilor cu topologia Mackey.

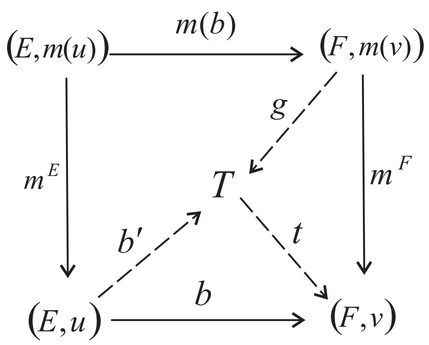


Figura 2.4.6

Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $b \in \mathcal{E}_p$.

2. $b \in \mathcal{E}_u$ *şi pătratul*

$$b \cdot m^E = m^F \cdot m(b) \tag{1}$$

este cocartezian.

$1 \Rightarrow 2$. $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_u$ deci $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_u$. Să demonstrăm că pătratul (1) este cocartezian. Fie

$$b' \cdot m^E = g \cdot m(b) \tag{2}$$

pătratul cocartezian construit pe m^E şi $m(b)$.

Atunci

$$b = t \cdot b', \tag{3}$$

$$m^F = t \cdot g \tag{4}$$

pentru un t.

$$\begin{tikzcd}
mE \arrow[rr, "m(b)"] \arrow[dd, "m^E"'] & & mF \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "m^F"] \\
& \circ \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
E \arrow[ur, dashed, "b'"] \arrow[rr, "b"] & & F
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4.7

Deoarece $b \in \mathcal{E}_p$ din egalitatea (3), rezultă că $t \in \mathcal{E}_p$. Avem $t, g, m^F \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$, şi $m^F \in \mathcal{M}_u$. Deci şi $t \in \mathcal{M}_u$. Astfel $t \in \mathcal{E}_p \cap \mathcal{M}_u = \mathcal{I}so$, iar (1) este pătrat cocartezian.

$2 \Rightarrow 1$. Fie $i \in \mathcal{M}_u$ şi o să demonstrăm că $b \perp i$. Într-adevăr, fie

$$i \cdot f = g \cdot b, \tag{5}$$

iar

$$b' \cdot f = f' \cdot b \tag{6}$$

pătratul cocartezian construit pe f şi b. Atunci

$$i = t \cdot b', \tag{7}$$

$$g = t \cdot f'. \tag{8}$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "b"] \arrow[dd, "f"'] & & {} \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "g"] \\
& \circ \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
{} \arrow[ur, dashed, "b'"] \arrow[rr, "i"'] & & {}
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4.8

Deci $b' \in \mathcal{E}_p$, iar din (7) deducem, că $b' \in \mathcal{M}_u$. Astfel $b' \in \mathcal{E}_p \cap \mathcal{M}_u = \mathcal{I}so$. Atunci $(b')^{-1} \cdot f'$ este diagonala pătratului (5). $\uparrow$

2.4.10. Notaţii. *Pentru o clasă $\mathcal{A}$ de obiecte a categoriei $\mathcal{C}$ fie $\mathcal{A}^{\downarrow}$ clasa de morfisme $f : X \to Y$ cu proprietatea că orice morfism $g : X \to A$ cu $A \in \mathcal{A}$ se extinde prin f.*

d^* : *Clasa de morfisme $\mathcal{A}^{\uparrow}$.*

2.4.11. Exerciţiu. *Fie K corpul peste care se examinează spaţiile vectoriale din $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{M}_u = \mathcal{K}^{\downarrow}$.*

2. Pentru orice obiect nenul $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $A^{\downarrow} \subset \mathcal{M}_u$.

2.4.12. $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$-factorizarea unui morfism în $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie $f : (E, u) \to (F, v) \in (\mathcal{C}_2\mathcal{V})$,

$$f = i \cdot b \tag{1}$$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea lui f, unde $b : (E, u) \to (f(E), v')$. Pentru morfismul b construim pătratul (1) din p.2.4.9, iar pe m^E şi $m(b)$ construim pătratul cocartezian

$$b' \cdot m^E = g \cdot m(b) \tag{2}$$

$$
\begin{tikzcd}
(E, m(u)) \arrow[rr, "m(b)"] \arrow[dd, "m^E"'] & & (f(E), m(v')) \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "m^{f(E)}"] & \\
& P \arrow[dr, dashed, "t"] & & \\
(E, u) \arrow[ur, "b'"] \arrow[rr, "b"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & & (f(E), v') \arrow[r, "i"] & (F, v)
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4.9

Atunci

$$b = t \cdot b', \tag{3}$$

$$m^{f(E)} = t \cdot g \tag{4}$$

pentru un t.

Teoremă.

$$f = (i \cdot t) \cdot b' \tag{5}$$

este $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$*-factorizarea morfismului* f. $\uparrow$

2.4.13. Exerciţii. *1. Clasele* $\mathcal{M}_f$, $\mathcal{M}_p$ *şi* $\mathcal{M}_u$ *sunt complete la dreapta.*

2. Clasele $\mathcal{M}_u$ *şi* $\mathcal{M}_p$ *sunt* $\mathcal{E}pi$*-coereditare.*

3. Clasele $\mathcal{E}_f$ *şi* $\mathcal{E}_u$ *sunt complete la stânga.*

4. Clasa $\mathcal{E}_u$ *este* $\mathcal{M}ono$*-ereditară.*

5. $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p) \perp (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ *şi* $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u) \perp (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$.

6. $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u) \perp (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$.

$\downarrow$ 5. Fie $m \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p = \varepsilon\Gamma_0, b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{S}$, şi

$$b \cdot u = v \cdot m. \tag{1}$$

Dacă

$$b \cdot v' = v \cdot b' \tag{2}$$

este pătratul cartezian construit pe b şi v, atunci

$$m = b' \cdot t, \tag{3}$$

$$u = v' \cdot t$$

pentru un t. $m \in \mathcal{E}pi$ şi $b' \in \mathcal{M}_u$, deci $t \in \mathcal{E}pi$. $t \in \mathcal{E}pi$ şi $m \in \mathcal{M}_p$, deci $b' \in \mathcal{M}_p$ şi $b' \in \mathcal{E}_u$. Sau $b' \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$. Astfel

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[dd, "u"'] & & {} \arrow[dd, "v"] \\
& \bullet \arrow[ur, dashed, "b'"'] \arrow[dl, dashed, "v'"] & \\
{} \arrow[rr, "b"] & & {}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4.10

$v' \cdot (b')^{-1}$ este diagonala pătratului (1).

6. Fie

$$b \cdot u = v \cdot m \tag{$*$}$$

cu $b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ şi $m \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Atunci (*) este un pătrat cartezian. $\uparrow$

2.5. Laticea structurilor de factorizare

2.5.1. Unele din proprietăţile enumerate în Teorema 2.4.3 sunt şi suficiente pentru ca $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^{\perp})$ să fie o structura de factorizare de dreapta. Pe de altă parte, pentru orice clasă de epifmorfisme $\mathcal{E}$ perechea de clase $(\mathcal{E}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{E}^{\llcorner})$ verifică condiţiile Teoremei 2.4.3. Apare problema:

În ce condiţii perechea de clase $(\mathcal{E}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{E}^{\llcorner})$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$?

Teoremă. *Fie că perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ are proprietăţile $\mathcal{P} = \mathcal{I}^{\urcorner}$ şi $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$, şi categoria $\mathcal{C}$ verifică condiţiile:*

1. $\mathcal{C}$ este $\mathcal{P}$-colocal mică.

2. Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ orice spectru de forma $\{e_i : X \longrightarrow X_i \mid i \in \mathcal{A}\}$ cu $e_i \in \mathcal{P}$ posedă limită inductivă.

3. Pentru orice pereche de morfisme (f, g) cu domeniu comun, unde $f \in \mathcal{P}$, există pătratul cocartezian construit pe ea.

Atunci $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ este o structură de factorizare de dreapta. $\uparrow$

2.5.2. Teoremă. *Fie categoria $\mathcal{C}$ colocal mică şi completă la dreapta. Atunci:*

1. Pentru orice clasă $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$ perechea $(\mathcal{E}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{E}^{\llcorner})$ este o structură de factorizare.

2. Pentru orice clasă $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$ perechea $(\mathcal{E}^{\perp\urcorner}, \mathcal{E}^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta.

3. Perechea

$$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = (\mathcal{E}pi, (\mathcal{E}pi)^{\llcorner})$$

este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$.

4. Perechea

$$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = ((\mathcal{M}ono)^{\urcorner}, \mathcal{M}ono)$$

este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$. $\uparrow$

2.5.3. Notaţii. *Fie $\mathbb{B}$ sau $\mathbb{B}(\mathcal{C})$ clasa structurilor de factorizare în categoria $\mathcal{C}$ cu relaţia de ordine*

$(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) \leq (\mathcal{P}_2, \mathcal{I}_2) \Leftrightarrow \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$.

Astfel din Teorema precedentă rezultă că clasa $\mathbb{B}$ posedă cel mai mic element $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ şi cel mai mare element $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.

Teoremă. *Fie categoria $\mathcal{C}$ local şi colocal mică completă la stânga şi la dreapta. Atunci clasa $\mathbb{B}$ este o latice cu cel mai mic element $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ şi cel mai mare element $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.*

$\downarrow$ Fie $\{(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ o clasă de elemente din $\mathbb{B}$. Din Teorema 2.5.2 rezultă

$$\vee\{(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = ((\cap\{\mathcal{I}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\})^{\urcorner}, \cap\{\mathcal{I}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}),$$
$$\wedge\{(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = (\cap\{\mathcal{P}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}, (\cap\{\mathcal{P}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\})^{\llcorner}).$$

Astfel pentru $\vee\{(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ clasa de injecţii este $\cap\{\mathcal{I}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, iar pentru $\wedge\{(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{I}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ clasa de proiecţii este $\cap\{\mathcal{P}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. $\uparrow$

2.5.4. Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie colocal mică completă la dreapta.*

1. Pentru orice clasă de epi $\mathcal{E}$ perechea $(\mathcal{E}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{E}^{\llcorner})$ este o structură de factorizare.

2. Pentru orice clasă de mono $\mathcal{M}$ perechea $(\mathcal{M}^{\urcorner}, \mathcal{M}^{\urcorner\llcorner})$ este o structură de factorizare.

3. Pentru orice clasă de epi $\mathcal{E}$ perechea $(\mathcal{E}^{\perp\urcorner}, \mathcal{E}^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta.

4. Pentru orice clasă de mono $\mathcal{M}$ perechea $(\mathcal{M}^{\urcorner}, \mathcal{M}^{\urcorner\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta.

5. Pentru orice clasă de epi $\mathcal{E}$ completă la dreapta $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta. În plus, dacă $\mathcal{E}q\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, atunci $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^{\perp})$ este o structură de factorizare.

6. Perechea

$$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = (\mathcal{E}pi, (\mathcal{E}pi)^{\llcorner})$$

este o structură de factorizare

7.Perechea

$$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = ((\mathcal{M}ono)^{\urcorner}, \mathcal{M}ono)$$

este o structură de factorizare. $\uparrow$

2.5.5. Exemple. *1. În categoria mulţimilor $\mathcal{S}et$ există o singură structură de factorizare*

$$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}ono) = (\mathcal{R}et, \mathcal{S}ec).$$

2. Într-o categorie abeliană $\mathcal{C}$ există o singură structură de factorizare

$$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}ono) = (\mathcal{C}ok, \mathcal{K}er).$$

3. În multe categorii topologice (spaţiile topologice, spaţiile Hausdorff, spaţiile Tihonov (complet regulate)), dar nu şi categoria spaţiilor compacte, avem structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$= (aplicaţii surjective, incluziuni topologice). Am notat-o astfel deoarece în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa aplicaţiilor surjective coincide cu clasa epimorfismelor universale (a se vedea 2.4.8).

Fie $f : (E, u) \longrightarrow (F, v)$ un morfism în una din categoriile indicate.

$$
\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "p"'] & & (F,v) \\
& (f(E),v') \arrow[ur, dashed, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5.4

Atunci $f(E)$ este un subspaţiu al spaţiului F şi pe $f(E)$ topologia v induce o topologie pe care o vom nota-o v'. Atunci aplicaţia canonică $p : E \longrightarrow f(E)$, $p(x) = f(x)$ este continuă. Examinăm şi incluziunea canonică $i : (f(E), v') \longrightarrow (F, v)$. Atunci

$$f = i \cdot p$$

este $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea morfismului f.

4. Într-o categorie $\mathcal{C}$ aditivă cu nuclee şi conuclee orice morfism $f : X \longrightarrow Y$ se descompune

$$
\begin{tikzcd}
Kerf \arrow[r, "\ker f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "cok\ker f"'] & Y \arrow[r, "cokf"] & Cokf \\
& Cok\ker f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & Kercokf \arrow[u, dashed, "\ker cokf"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5.5

unde $kerf$ şi $cokf$ sunt nucleul şi conucleul morfismului f, $cokkerf$ este conucleul morfismului $kerf$, $kercokf$ este nucleul morfismului $cokf$, iar $\overline{f}$ este un morfism care există reieşind din definiţia nucleului şi conucleului. Morfismul $\overline{f}$ face diagrama respectivă comutativă:

$$f = (kercokf) \cdot \overline{f} \cdot (cokkerf).$$

Una din axiomele categoriei semiabeliene în sensul Raïcov (vezi [R, 1969]), *afirmă că pentru orice morfism f morfismul respectiv $\overline{f}$ este un bimorfism. Aşadar în astfel de categorii avem structurile de factorizare*

$$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{K}er\mathcal{C}),$$

unde factorizarea morfismului f este

$$f = (kercokf) \cdot (\overline{f} \cdot (cokkerf))$$

cât şi structura

$$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = (\mathcal{C}ok, \mathcal{M}ono)$$

cu factorizarea lui f

$$f = ((kercokf) \cdot \overline{f}) \cdot cokkerf.$$

5. **Structura de factorizare** $(\mathcal{E}pi, \mathcal{K}er) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie $f : (E, u) \longrightarrow (F, v)$ un morfism al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, pe subspaţiul $\overline{f(E)}$ (închiderea subspaţiului $f(E)$ în spaţiul (F, v)) examinăm topologia v' indusă din spaţiul (F, v) şi aplicaţiile canonice e şi k.*

$$\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "e"'] & & (F,v) \\
& (\overline{f(E)}, v') \arrow[ur, dashed, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.5.6

Atunci

$$f = k \cdot e$$

este $(\mathcal{E}pi, \mathcal{K}er)$-factorizarea morfismului f.

6. **Structura de factorizare** $(\mathcal{C}ok, \mathcal{M}ono) = (\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ *în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pe spaţiul vectorial $f(E)$ examinăm topologia factor*

$$u'' = \{\mathcal{G} \subset f(E) \mid f^{-1}(\mathcal{G}) \in u\}$$

şi aplicaţiile canonice q şi m.

$$\begin{tikzcd}
(E,u) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "q"'] & & (F,v) \\
& (f(E), u'') \arrow[ur, dashed, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.5.7

Atunci

$$f = m \cdot q$$

este $(\mathcal{C}ok, \mathcal{M}ono)$*-factorizarea morfismului* f.

2.5.6. Remarcă. *1. În categoria* $\mathcal{T}_2$ *a spaţiilor topologice Hausdorff factorizarea unui morfism după structurile de factorizare* $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *şi* $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ *se efectuează la fel ca şi în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Categoria $\mathcal{T}h$ *a spaţiilor Tihonov de asemenea posedă astfel de structuri de factorizare. În* $\mathcal{T}h$ *ca subcategorie epireflectivă a categoriei* $\mathcal{T}_2$ *orice morfism are o* $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$*-factorizare la fel ca şi în categoria* $\mathcal{T}_2$*:*

$$(\mathcal{E}pi(\mathcal{T}h), \mathcal{M}_f(\mathcal{T}h)) = (\mathcal{E}pi(\mathcal{T}_2) \cap \mathcal{T}h, \mathcal{M}_f(\mathcal{T}_2) \cap \mathcal{T}h).$$

Structura de factorizare $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ *a subcategoriei* $\mathcal{T}h$ *nu posedă o astfel de proprietate. Descrierea clasei* $\mathcal{E}_f$ *a subcategoriei* $\mathcal{T}h$ *vezi 6.2.20 ex.6*

3. În laticea $\mathbb{B}$ *a structurilor de factorizare a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *am descris patru elemente:* $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$, $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$, $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.

În diagramă am indicat doar clasele de proiecţii. Cum se va demonstra apoi, între elementele $\mathcal{E}_f$ şi $\mathcal{E}_u$, cât şi între elementele $\mathcal{E}_u$ şi $\mathcal{E}pi$, există clase proprii de elemente.

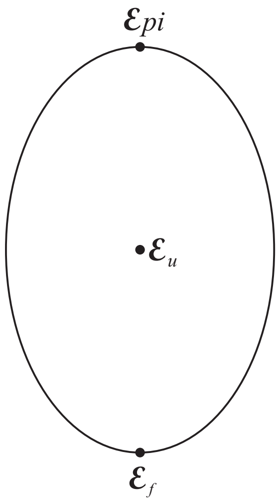


Figura 2.5.8

2.5.7. Teoremă. *Examinăm structurile de factorizare* $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono), (\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u), (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *şi* $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *ale categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1. Clasele de proiecţii $\mathcal{E}_f$ *şi* $\mathcal{E}_u$ *sunt complete la stânga.*

2. Clasele de injecţii $\mathcal{M}_u, \mathcal{M}_p$ *şi* $\mathcal{M}_f$ *sunt complete la dreapta.* $\uparrow$

2.5.8. Remarcă. *1. În 9.2.6 se va stabili că şi clasa $\mathcal{M}_p$ este completă la drepta.*

2. În categoria $\mathcal{CV}$ $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$. Astfel trecând de la categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ la categoria $\mathcal{CV}$ o clasa proprie de structuri de factorizare $\{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} \mid \mathcal{E}_u \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi\}$ se transformă într-o singură structură de factorizare: $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$. Acest fenomen se întâmplă şi în alte categorii topologice când excludem condiţia ca spaţiile să fie Hausdorff.

3. Referitor la laticea structurilor de factorizare de dreapta vom reveni în 6.3.

2.5.9. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu perechi nucleare, în care fiecare săgeată dublă posedă egalizator. Dacă $\mathcal{E}_q \circ \mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_q$, atunci $(\mathcal{E}pi, \mathcal{E}_q)$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$. În particular în categoria grupurilor Gr clasa $\mathcal{E}_q$ nu este închisă în raport cu compoziţia.*

2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă cu nuclee, conuclee şi pătrate cocarteziene. Dacă $\mathcal{K}er \subset \mathcal{M}_u$, atunci:

a) $\mathcal{K}er \circ \mathcal{K}er \subset \mathcal{K}er$;

b) $(\mathcal{E}pi, \mathcal{K}er)$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$.

2.5.10. Notaţii. *Fie $\mathcal{C}$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{U}_2$ spaţiilor uniforme Hausdorff şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi\mathcal{U}_2$ şi $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}ono\mathcal{U}_2$. Examinăm perechile $(\mathcal{P}''_f, \mathcal{I}''_f) = (\mathcal{I}^{\urcorner}, \mathcal{I}^{\urcorner\llcorner})$ şi $(\mathcal{P}'_f, \mathcal{I}'_f) = (\mathcal{P}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{P}^{\llcorner})$. Să presupunem că aceste perechi sunt structuri de factorizare în categoria $\mathcal{U}_2$ (vezi Teorema 2.5.4). Fie*

$$\mathbb{L}_f(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = \{(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{U}_2) | \mathcal{P}'_f \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{P}''_f\}.$$

2.5.11. Cu condiţiile şi notaţiile de mai sus avem

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}(\mathcal{C})$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{U}_2)$.*
$(\mathcal{E} \cap \mathcal{C}, \mathcal{M} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{P}, \mathcal{I})$ atunci şi numai atunci când $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_f(\mathcal{P}, \mathcal{I})$. $\uparrow$

2.6. Clase de morfisme ereditare şi coereditare

În acest paragraf se examineazâ clase de morfisme ereditare (vezi Definiţia 1.1.7) ce va avea un rol important în diverse construcţii.

2.6.1. Exemple. *1. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}, \mathcal{B} \subset \mathcal{I}$. Atunci clasa $\mathcal{B}$ este $\mathcal{A}$-coereditară.*

2. Orice clasă stabilă la dreapta este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

3. În orice categorie $\mathcal{C}$ clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

4. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{M}_p$, ca clasă stabilă la dreapta, este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

5. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ este:

- $\mathcal{M}ono$-ereditară şi a-ereditară;

- *$\mathcal{E}pi$-coereditară şi a-coereditară.*

2.6.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu pătrate cocarteziene. Atunci clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară.*

$\downarrow$ Fie $u \cdot v \in \mathcal{E}pi$, $u \in \mathcal{M}_u$ şi

$$f \cdot v = g \cdot v \tag{1}$$

Construim următoarele pătrate cocarteziene.

Pe morfismele u şi f

$$u_1^{'} \cdot f = f' \cdot u, \tag{2}$$

pe morfismele u şi g

$$u_2' \cdot g = g' \cdot u, \tag{3}$$

pe morfismele $u_1^{'}$ şi u_2'

$$u_1'' \cdot u_2' = u_2'' \cdot u_1'. \tag{4}$$

Atunci morfismele u_1', u_2', u_1'', u_2'' cât şi $u_1'' \cdot u_2' (= u_2'' \cdot u_1')$ sunt *mono*.

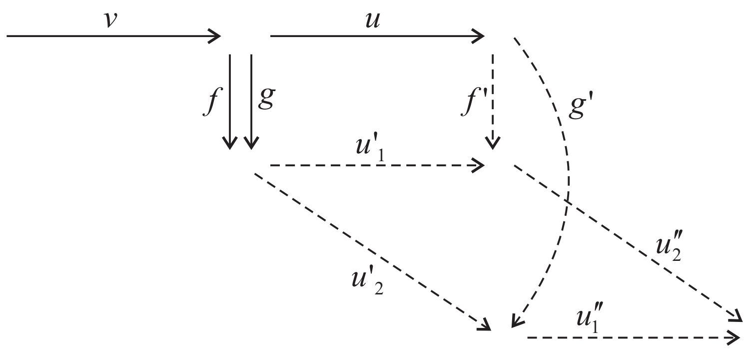


Figura 2.6.1

Avem

$$u_1'' \cdot g' \cdot u \cdot v = (din(3)) = u_1'' \cdot u_2' \cdot g \cdot v = (din(1)) = u_1'' \cdot u_2' \cdot f \cdot v = (din(4)) = u_2'' \cdot u_1' \cdot f \cdot v = (din(2)) =$$

$$= u_2'' \cdot f' \cdot u \cdot v = u^{''} \cdot f' \cdot u \cdot v,$$

i.e.

$$u_1'' \cdot g' \cdot u \cdot v = u_2'' \cdot f' \cdot u \cdot v. \tag{5}$$

şi cum $u \cdot v$ este un *epi*, deducem că

$$u_1'' \cdot g' = u_2'' \cdot f'. \tag{6}$$

În continuare

$$u_1'' \cdot u_2' \cdot f = (din(4)) = u_2'' \cdot u_1' \cdot f = (din(2)) =$$

$$u_2'' \cdot f' \cdot u = (din(6)) = u_1'' \cdot g' \cdot u = (din(3)) = u_1'' \cdot u_2' \cdot g$$

i.e.

$$u_1'' \cdot u_2' \cdot f = u_1'' \cdot u_2' \cdot g, \tag{7}$$

şi deoarece $u_1'' \cdot u_2'$ este un mono, rezultă că $f = g$. $\uparrow$

2.6.3. În categoria spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h$ există structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ =(aplicaţii surgective, incluziuni topologice).

Exerciţii. *1. În categoria $\mathcal{T}h$ fie $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{M}ono$. Atunci clasa $\mathcal{I}$ nu este $\mathcal{E}pi$-coereditară.*

2. În categoria $\mathcal{T}h$ clasa $\mathcal{E}pi$ nu este $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono)$-ereditară.

3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{M}ono$ nu este $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-coereditară.

4. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{E}pi$ nu este $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono)$-ereditară.

2.6.4. Exerciţii. *1. Următoarele clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*

$$\mathcal{I}so, \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u, \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono, \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u, \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$$

sunt a-ereditare şi a-coereditare.

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasa $\mathcal{E}_u$ este $\mathcal{M}ono$-ereditară.

2.6.5. Exerciţii. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

1. Dacă clasa $\mathcal{M}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, atunci clasa $\mathcal{M} \cap \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$ este a-ereditară şi a-coereditară.

2. Dacă clasa $\mathcal{E}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, atunci clasa $\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u$ este a-ereditară şi a-coereditară.

2.6.6. Definiţie. *Monomorfismul m se numeşte esenţial, dacă din faptul că $f \cdot m$ este un mono, rezultă că f este un mono.*

d^*. Epimorfism esenţial.

Notaţii. *$\mathcal{E}_e$ şi $\mathcal{M}_e$ clasele epimorfismelor şi respectiv monomorfismelor esenţiale.*

2.6.7. Exemple. *1. Într-o categorie cu pătrate cocarteziene $\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u \subset \mathcal{E}_e$.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ avem $\mathcal{E}_e \subset \mathcal{M}ono$.

3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ nu orice morfism, care este o aplicaţie bijectivă, aparţine clasei $\mathcal{E}_e$. Cu alte cuvinte, clasa $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ nu se conţine în clasa $\mathcal{E}_e$.

2.6.8. Problemă. *În care categorii are loc egalitatea $\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u = \mathcal{E}_e$?*

2.7. Structuri de factorizare cu clase ereditare

2.7.1. Lemă. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare de dreapta în categoria* $\mathcal{C}$.

1. Clasa $\mathcal{P}$ *este* $\mathcal{E}pi$*-coereditară.*

2. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $r(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$, *atunci* $(\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \circ \varepsilon\mathcal{R}$. *În particular, incluziunea dată are loc dacă* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_c$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *este una din structurile de factorizare* $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f), (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$ *sau* $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

$\downarrow$ 1. Fie

$$p = f \cdot e \tag{1}$$

cu $p \in \mathcal{P}$ şi $e \in \mathcal{E}pi$. Examinăm $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului f

$$f = i_1 \cdot p_1. \tag{2}$$

Deoarece $p \perp i_1$, există un morfism h, astfel încât

$$p_1 \cdot e = h \cdot p, \tag{3}$$

$$i_1 \cdot h = 1. \tag{4}$$

Odată ce p este un *epi*, rezultă că şi $i_1 \in \mathcal{E}pi$. Atunci din egalitatea (4) obţinem că $i_1 \in \mathcal{I}so$, şi $f \in \mathcal{P}$.

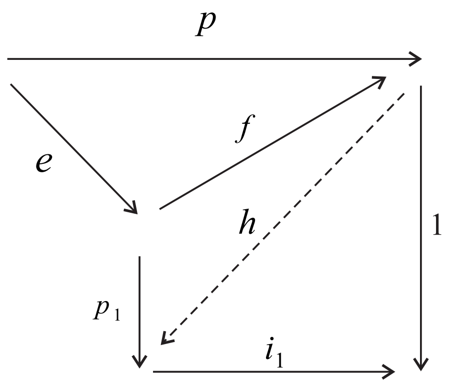


Figura 2.7.1 a)

2. Fie $i : X \to Y \in \mathcal{I}, b : Y \to Z \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $r^X : X \to rX, r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-replicele obiectelor X şi Z. Atunci $r^Z \cdot b : X \to rZ$ este $\mathcal{R}$-replica lui X şi

$$r^Z \cdot b \cdot i = r(i) \cdot r^X. \tag{1}$$

Dacă

$$r^Z \cdot i' = r(i) \cdot u \tag{2}$$

este pătratul cartezian construit pe morfismele r^Z şi $r(i)$, atunci

$$b \cdot i = i' \cdot v \tag{3}$$

$$r^X = u \cdot v \tag{4}$$

pentrun un v. $u \in \mathcal{M}_u$ şi din egalitatea (4) deducem, că $u \in \mathcal{E}pi$. Astfel în egalitatea (4) $v \in \mathcal{E}pi$, sau $v \in \varepsilon\mathcal{R}$.

Conform ipotezei $r(i) \in \mathcal{I}$, deci şi $i' \in \mathcal{I}$. Se verifică uşor, că

$$b \cdot i = i' \cdot v \tag{5}$$

cu $i' \in \mathcal{I}$ şi $v \in \varepsilon\mathcal{R}$. $\uparrow$

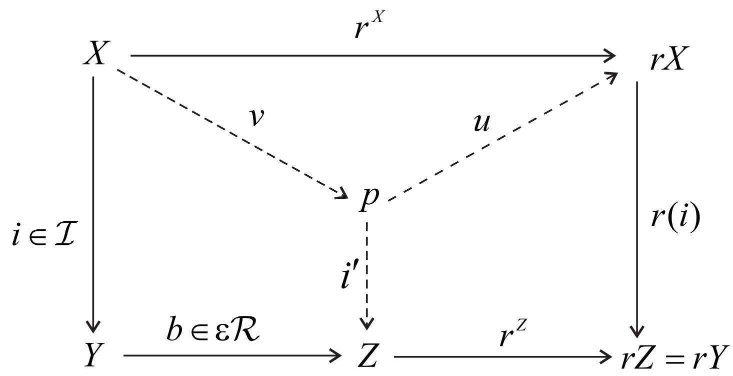


Figura 2.7.1 b)

2.7.2. Definiţie. *Fie $\mathcal{A}$ o clasă de morfisme a categoriei $\mathcal{C}$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare de dreapta.*

Clasa $\mathcal{A}$ se numeşte $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-coereditară, dacă din faptul că $a = m \cdot e$ este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului $a \in \mathcal{A}$, rezultă, că $m \in \mathcal{A}$.

d: Clasa de morfisme $\mathcal{A}$ $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-ereditară în raport cu structură de factorizare de stânga $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.*

2.7.3. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ două structuri de factorizare de stânga în categoria $\mathcal{C}$. Examinăm următoarelor afirmaţii:*

1. Clasa $\mathcal{I}$ este $\mathcal{E}$-coereditară.

2. Clasa $\mathcal{I}$ este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-coereditară.

3. $\mathcal{P} \circ \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \circ \mathcal{P}$.

4. $(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}, \mathcal{M} \cap \mathcal{I})$ este o structură de factorizare de stânga în categoria $\mathcal{C}$.

5. $\mathcal{P} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{P}$.

Atunci $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3 \Longleftrightarrow 4 \Longleftrightarrow 5$.

$\downarrow 4 \Longrightarrow 2$. Fie $i \in \mathcal{I}$ şi

$$i = m \cdot e \tag{1}$$

este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului. Mai departe, fie

$$i = t \cdot (e_1 \cdot p_1) \tag{2}$$

$(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}, \mathcal{M} \cap \mathcal{I})$-factorizarea acestui morfism, unde $e_1 \in \mathcal{E}$, $p_1 \in \mathcal{P}$ şi $t \in \mathcal{M} \cap \mathcal{I}$.. Din egalitatea (2), deoarece $i \in \mathcal{I}$, rezultă că $p_1 \in \mathcal{I}so$. Egalităţile (1) şi (2) sunt două $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizări ale morfismului i. Deci

$$e_1 \cdot p_1 = r \cdot e, \tag{3}$$

$$m = t \cdot r \tag{4}$$

pentru un izomorfism r. Din ultima egalitate, deoarece $r \in \mathcal{I}so$, şi $t \in \mathcal{M} \cap \mathcal{I}$, rezultă că $m \in \mathcal{I}$. Astfel am demonstrat că clasa $\mathcal{I}$ este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-coereditară.

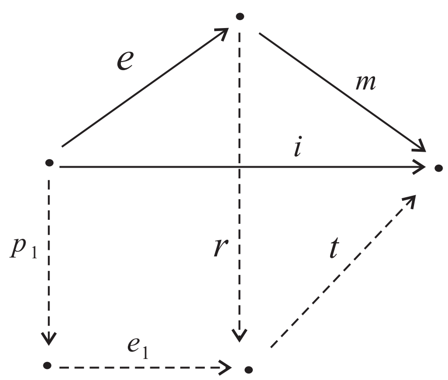


Figura 2.7.2

$1 \Longrightarrow 2$. În virtutea definiţiilor corespunzătoare.

$2 \Longrightarrow 3$. Fie $p \in \mathcal{P}$ şi $e \in \mathcal{E}$ pentru care există compoziţia $p \cdot e$. Examinăm $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului $p \cdot e$.

$$p \cdot e = i_1 \cdot p_1, \tag{5}$$

iar

$$i_1 = m_2 \cdot e_2, \tag{6}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului i_1. Atunci din egalităţile scrise, rezultă că

$$p \cdot e = m_2 \cdot (e_2 \cdot p_1), \tag{7}$$

Deoarece $e \perp m_2$, există un morfism t astfel încât:

$$e_2 \cdot p_1 = t \cdot e, \tag{8}$$

$$m_2 \cdot t = p. \tag{9}$$

Din egalitatea (6) şi ipoteza 2 rezultă că $m_2 \in \mathcal{I}$. Din egalitatea (8) conchidem că t este un *epi*. Atunci din Lema 2.7.1 şi egalitatea (9) obţinem, că $m_2 \in \mathcal{P}$. Astfel $m_2 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}so$, şi morfismul $p \cdot e$ poate fi scris

$$p \cdot e = (m_2 \cdot e_2) \cdot p_1, \tag{10}$$

cu $m_2 \cdot e_2 \in \mathcal{E}$ şi $p_1 \in \mathcal{P}$.

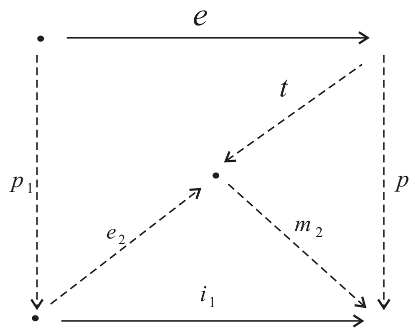


Figura 2.7.3

$3 \Longrightarrow 4$. Cele două clase $\mathcal{E} \circ \mathcal{P}$ şi $\mathcal{M} \cap \mathcal{I}$ sunt închise în raport cu compoziţia şi sunt ortogonale: $(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}) \perp (\mathcal{M} \cap \mathcal{I})$. Rămâne de demonstrat că orice morfism al categoriei $\mathcal{C}$ posedă o $(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}, \mathcal{M} \cap \mathcal{I})$-factorizare. Fie $f \in \mathcal{C}$ şi

$$f = i \cdot p, \tag{11}$$

este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea lui,

$$i = m \cdot e, \tag{12}$$

este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului i, şi

$$m = i_1 \cdot p_1, \tag{13}$$

este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului m. Conform ipotezei 3 morfismul $p_1 \cdot e$ poate fi scris

$$p_1 \cdot e = e_2 \cdot p_2, \tag{14}$$

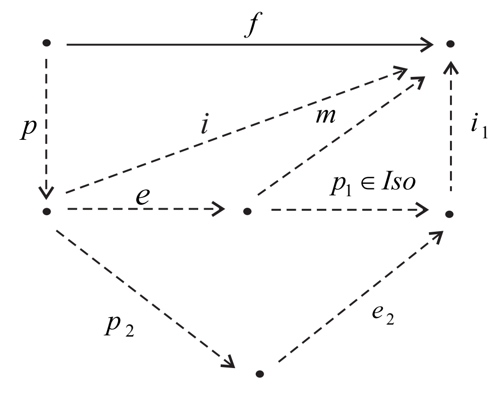


Figura 2.7.4

unde $e_2 \in \mathcal{E}$ şi $p_2 \in \mathcal{P}$. Astfel

$$i = (din(2)) = m \cdot e = (din(13)) = i_1 \cdot p_1 \cdot e = (din(14)) = i_1 \cdot e_2 \cdot p_2$$

i.e.

$$i = i_1 \cdot e_2 \cdot p_2, \tag{15}$$

de unde rezultă că $p_2 \in \mathcal{I}$, deci $p_2 \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{I}so$, iar $e_2 \cdot p_2 \in \mathcal{E}$. Din egalitatea (14) deducem că $p_1 \cdot e \in \mathcal{E}$, şi din Lema 2.7.1, că $p_1 \in \mathcal{E}$. Deoarece $m_1 \in \mathcal{M}$ din egalitatea (13), rezultă că $p_1 \in \mathcal{M}$. Deci $p_1 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$, şi morfismul f poate fi scris

$$f = (i_1 \cdot p_1) \cdot (e \cdot p) \tag{16}$$

cu $i_1 \cdot p_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{I}$ şi $e \cdot p \in \mathcal{E} \circ \mathcal{P}$.

$3 + 4 \Longrightarrow 5$. Evident.↑

2.7.4. Corolar. *1. Fie $(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}, \mathcal{M} \cap \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta,*

$$f = i \cdot p$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului $f \in \mathcal{C}$, şi

$$i = m \cdot e$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului i. Atunci

$$f = m \cdot (e \cdot p)$$

este $(\mathcal{E} \circ \mathcal{P}, \mathcal{M} \cap \mathcal{I})$-factorizarea morfismului f.

2. Dacă $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ sau $\mathcal{E}, \mathcal{M})$ este o structură de factorizare, atunci $\mathcal{M} \cap \mathcal{I} \subset \mathcal{M}ono$. ↑

2.7.5. Exemplu. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu suficiente obiecte $\mathcal{I}$-injective (vezi 5.6). Atunci clasa $\mathcal{I}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară. Astfel pentru orice structură de factorizare de dreapta $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ perechea $(\mathcal{P} \circ \mathcal{E}, \mathcal{I} \cap \mathcal{M})$ este o structură de factorizare. În particular $(\mathcal{E}_p \circ \mathcal{E}, \mathcal{M}_u \cap \mathcal{M}), (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{E}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{M})$ sunt structuri de factorizare.*

2.7.6. Lemă. *Fie $\mathcal{A}$ o clasă de bimorfisme a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{A}$ este completă la stânga şi la dreapta.

2. $\mathcal{A}$ este saturată de sus şi de jos.

3. $\mathcal{A}$ este o clasă de proiecţii a unei structuri de factorizare de dreapta şi $\mathcal{A}$ este o clasă de injecţii a unei structuri de factorizare de stânga.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 3. În virtutea Teoremei 2.5.1.

2 $\Rightarrow$ 3. În virtutea Teoremei 2.5.2.

3 $\Rightarrow$ 1. În virtutea Teoremei 2.4.2.

3 $\Rightarrow$ 2. Vezi Teorema 2.4.3.$\uparrow$

2.7.7. Definiţie. *O clasă de bimorfisme a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ se numeşte bicompletă, dacă ea verifică una din condiţiile echivalente ale Lemei 2.7.6.*

2.7.8. Notaţii. *Vom stabili $\mathbb{B}ic$ clasa tuturor claselor bicomplete de bimorfisme ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

2.7.9. Exerciţii. *1. $\mathcal{I}so$ este cel mai mic element în clasa $\mathcal{B}ic$.*

2. $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ este cel mai mare element în clasa $\mathcal{B}ic$.

3. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci:

- Clasa $\mathcal{B}$ este a-ereditară şi a-coereditară.

- Clasa $\mathcal{B}$ este $\mathcal{M}ono$-ereditară.

- Clasa $\mathcal{B}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

2.7.10. Să examinăm structurile de factorizare $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ şi $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$, unde $\mathcal{B}$ este o clasă bicompletă de bimorfisme. În baza Teoremei 2.6.2* clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{B}$-coereditară, deoarece $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_u$. Atunci conform Teoremei 2.7.3. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f, \mathcal{B}^\llcorner)$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Mai departe, clasa $\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f$ este completă la stânga, ca compoziţia a două clase cu această proprietate.

În mod analog se demonstrează şi afirmaţiile 2-3.

Teoremă. *Fie $\mathcal{B}$ o clasă bicompletă de bimorfisme. Atunci*

1. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f, \mathcal{B}^\llcorner)$ este o structură de factorizare cu clasa de proiecţii $\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f$ completă la stânga.

2. $(\mathcal{B}^\urcorner, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}))$ este o structură de factorizare cu clasa de injecţii $\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$ completă la dreapta.

3. $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^\top, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ este o structură de factorizare cu clasa de injecţii $\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}$ completă la dreapta.

4. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap \mathcal{B}^\perp) \in \mathbb{B}$.

5. $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_u, (\varepsilon\mathcal{R})^\perp \cap \mathcal{M}_p) \in \mathbb{B}$, când $\mathcal{R}$ este o subcategorie reflectivă nenulă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $\varepsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi : r(e) \in \mathcal{I}so\}$. $\uparrow$

2.7.11. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci clasa $\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.*

1*. *Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci clasa $\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f$ este $\mathcal{M}ono$-ereditară.*

2. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{R}$. Atunci $(\mathcal{E} \circ \mathcal{B}^\urcorner, \mathcal{M} \cap (\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})) \in \mathbb{B}$.

2^*. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Atunci* $(\mathcal{E} \cap (\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f), \mathcal{M} \circ \mathcal{B})^{\llcorner}) \in \mathbb{B}$.

3. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Atunci* $\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}$ *este* $\mathcal{E}_u$*-coereditară.*

4. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$. *Atunci* $(\mathcal{E} \circ \mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{M} \cap (\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})) \in \mathbb{B}$.

5. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Atunci* $\mathcal{E}_u$ *este* $(\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$*-ereditară.*

6. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Atunci* $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) \in \mathbb{B}$.

7. $(\mathcal{E}'_p, \mathcal{M}'_u) \in L_\rho(\Pi), \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}'_p$ *şi clasa* $\mathcal{E}'_p$ *nu este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară.*

Capitolul 3. Obiecte speciale

3.1. Obiecte iniţiale, finale şi nule

3.1.1. Definiţie. *Obiectul I al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte obiect iniţial, dacă pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ există un singur morfism $i^X : I \longrightarrow X$.*

d^* : Obiect final T cu morfismul $t^X : X \longrightarrow T$.

Dacă categoria $\mathcal{C}$ posedă un obiect care concomitent este şi iniţial, şi final, atunci el se numeşte obiect nul al categoriei $\mathcal{C}$ şi se notează O, iar sistemul de morfisme respectiv se notează simplu

$$0 \xrightarrow{\quad 0 \quad} X \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

Figura 3.1.1

3.1.2. Exerciţii. *1. Orice două obiecte iniţiale (finale, nule) sunt izomorfe.*

2. Obiectul iniţial este suma unei familii vide de obiecte: $I = \sqcup\{X_i \mid i \in \emptyset\}$.

3. Obiectul final este produsul unei familii vide de obiecte: $T = \sqcap\{X_i \mid i \in \emptyset\}$.

4. Suma oricărei familii de obiecte iniţiale este un obiect iniţial.

5. Produsul oricărei familii de obiecte finale este un obiect final.

3.1.3. Exemple. *1. În categoria $\mathcal{E}ns$ mulţimea vidă este obiectul iniţial cu sistemul de morfisme $i^X = \emptyset : \emptyset \longrightarrow X$ pentru orice obiect X. Obiectul final în $\mathcal{E}ns$ este mulţimea ce conţine un singur punct.*

2. In categoria spaţiilor topologice obiect iniţial nu există. Deoarece una din axiomele spaţiului topologic spune că spaţiul trebuie să fie o mulţime nevidă. Astfel nu există suma unei familii vide de obiecte, nu există întotdeauna intersecţia a două subobiecte ale unui obiect. Aşadar categoriile topologice nu sunt complete nici la stânga, nici la dreapta. Şi înainte de a examina limitele în aceste categorii trebuie să ne convingem că limita spectrului respectiv în categoria $\mathcal{E}ns$ nu este o mulţime vidă, apoi să cercetăm şi topologia pe această limită.

3. În categoria $\mathcal{E}ns$ sau a spaţiilor topologice fie $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$. Atunci produsul $X_1 \times X_2$ este o mulţime dintr-un singur punct $\{x\}$ care are două coordonate: x_1 şi x_2: $x = \{x_1, x_2\}$. Produsul a trei mulţimi $X_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$ poate fi interpretată la fel, etc.

4. Fie $\mathcal{A}$ o mulţime parţial ordonată. O examinăm ca o categorie: din obiectul a există un singur morfism în obiectul $b \Leftrightarrow (a \le b)$. Categoria $\mathcal{A}$ are obiect iniţial, atunci şi numai atunci *când în mulţimea $\mathcal{A}$ există elementul cel mai mic şi analog, obiectul final al categoriei $\mathcal{A}$ (dacă există) nu-i altceva decât elementul cel mai mare.*

5. Fie $\widetilde{\mathfrak{R}}$ mulţimea numerelor reale cu ordinea obişnuită la care se adaugă simbolurile $\pm\infty$. Considerăm că există un morfism $a \longrightarrow b \Leftrightarrow (a \leq b)$.

Atunci:

a) $\sqcap\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\} = inf\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\}$;

b) $\sqcup\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\} = sup\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\}$;

c) Deoarece $inf\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\} \leq sup\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\}$, rezultă:

$$T = -\infty = \sqcap\{a_i \mid i \in \emptyset\} \leq \sqcup\{a_i \mid i \in \emptyset\} = +\infty = I.$$

6. În mulţimea $\widetilde{\mathfrak{R}}$ considerăm că există un morfism $a \longrightarrow b \Leftrightarrow (a \geq b)$. Atunci:

a) $\sqcap\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\} = sup\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\}$;

b) $\sqcup\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\} = inf\{a_i \mid i \in \mathcal{A}\}$;

c) $I = -\infty = sup\{a_i \mid i \in \emptyset\} \geq inf\{a_i \mid i \in \emptyset\} = +\infty = T$.

3.1.4. Remarcă. *Comparând concluziile din exemplele 5 şi 6 putem spune că e mai adecvat să privim la mulţimea $\widetilde{\mathfrak{R}}$ ca la o categorie în contextul definiţiei 5.*

3.2. Generatori şi cogeneratori

3.2.1. Definiţie. *Obiectul A al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte generator, dacă pentru orice săgeată dublă $f, g : X \longrightarrow Y, \mid f \neq g$, există un morfism $u : A \longrightarrow X$ astfel încât $f \cdot u \neq g \cdot u$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 3.2.1

d^* :*cogenerator.*

3.2.2. Fie că pentru obiectul A al categoriei $\mathcal{C}$ şi pentru orice cardinal τ(sau mulţime) există suma $A^{(\tau)}$. Atunci pentru orice obiect X examinăm morfismul

$$\begin{tikzcd} A^{(Hom(A,X))} \arrow[rr, "\overline{w}^X"] & & X \\ A \arrow[u, dashed, "q_f"] \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Figura 3.2.2

$\overline{w}^X$ cu proprietatea

$$f = \overline{w}^X \cdot q_f \tag{1}$$

pentru orice morfism $f \in \mathcal{C}(A, X)$, unde q_f este incluziunea canonică. Dacă pentru orice cardinal τ există produsul A^τ, atunci pentru orice obiect X, morfismul dual se numeşte morfism de calcul şi se notează w^X.

Aşadar

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w^X"] \arrow[dr, "f"'] & A^{Hom(X,A)} \arrow[d, dashed, "p_f"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2.3

$$w^X = p_f \cdot f \tag{2}$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}(A, X)$, unde p_f este proiecţia canonică.

Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. A este un generator al categoriei $\mathcal{C}$.

2. Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ morfismul $\overline{w}^X$ este un epi.

3. Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ morfismul $\overline{w}^X$ este un epi universal.↑

3.2.3. Exemple. *1. Grupul aditiv al numerelor întregi Z este un generator al categoriei grupurilor abeliene.*

2. Grupul numerelor reale R factorizat prin subgrupul numerelor întregi Z ne conduce la grupul $K = R/Z$. Dacă pe K examinăm topologia factor indusă din corpul R, atunci K devine un grup compact.

a) K este un cogenerator al categoriei grupurilor abeliene.

b) K cu factortopologia este un cogenerator atât pentru grupurile abeliene compacte cât şi pentru grupurile abeliene local compacte [Pn, 1973].

3. Spaţiul discret D format din două puncte este un cogenerator pentru categoria spaţiilor zerodimensionale (compacte).

4. Segmentul $I = [0, 1]$, este un cogenerator pentru categoria spaţiilor compacte.

5. Corpul numerelor reale R este un cogenerator pentru:

a) Subcategoria spaţiilor compacte (spaţiul R nu este compact, deci el nu aparţine subcategoriei date).

b) Categoria spaţiilor realcompacte (Hewitt).

c) Categoria spaţiilor complet regulate (Tihonov).

3.2.4. Lemă. *Corpul K cu topologia obişnuită peste care sunt definite spaţiile vectoriale este un generator al categoriilor $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{CV}$.*

$\downarrow$Pentru orice spaţiu nenul (E, u) şi orice element $x_0 \neq 0$ definim aplicaţia

$$f : K \longrightarrow (E, u), \quad f(a) = a \cdot x_0.$$

Avem un operator liniar şi continuu.$\uparrow$

3.2.5. Deoarece corpul K este sumand direct în orice spaţiu local convex Hausdorff deducem:

Corolar. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ orice spaţiu nenul este un generator.*

3.2.6. Lemă. *Corpul K este un cogenerator al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

$\downarrow$Fie $x_0 \in (E, u)$ şi $x_0 \neq 0$. Subspaţiul generat de punctul x_0 este isomorf cu K şi se prezintă ca sumand direct în spaţiul (E, u). Astfel proiecţia canonică $p : (E, u) \longrightarrow K$ are proprietatea $p(x_0) \neq 0$.$\uparrow$

3.2.7. Corolar. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ orice spaţiu nenul este un cogenerator.*

3.2.8. Remarcă. *Unele din obiectele prezentate ca exemple de cogeneratori sunt in realitate nişte obiecte universale, lucru la care o sa revenim pe parcurs.*

3.3. Obiecte mici şi dual mici

3.3.1. Definiţie. *Obiectul A al categoriei $\mathcal{C}$ se numeşte mic dacă orice morfism $f : A \longrightarrow \sqcup\{X_i \mid i \in I\}$ în suma unui sistem de obiecte se factorizează prin suma unui subsistem finit: există o mulţime finită $J \subset I$ şi un morfism $g : A \longrightarrow \sqcup\{X_i \mid i \in J\}$ astfel încât*

$$f = q \cdot g,$$

unde q este incluziunea canonică.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & & \coprod\{X_i \mid i \in I\} \\
& \coprod\{X_i \mid i \in J\} \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3.1

d°. *Obiect dual mic.*

3.3.2. Exerciţii. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Obiectul A este mic.

2. Functorul h^A cu valori în categoria grupurilor abeliene $h^A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$ păstrează sumele.

3. Functorul $\mathcal{C} \longrightarrow mod\text{-}\mathcal{E}nd_{\mathcal{C}}A$, indus de functorul h^A, păstrează sumele: $h^A : \mathcal{C} \longrightarrow mod\text{-}\mathcal{E}nd_{\mathcal{C}}A$.

3.3.3. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ orice spaţiu normat este obiect dual mic.*

$\downarrow$ Fie A un spaţiu normat şi fie dat un morfism $f : \sqcap\{X_i \mid i \in I\} \longrightarrow A$. Dacă $U = \{x \in A \,|\, \| x \| \leq 1\}$, atunci $f^{-1}(U)$ este o vecinătate a lui zero în spaţiul $X = \sqcap\{X_i \mid i \in I\}$. Exită atunci o submulţime finită $J \subset I$ şi vecinătatea $\mathcal{G}_i$ a lui zero în spaţiul $X_i, i \in I$, astfel încât

$$\sqcap\{\mathcal{G}_i \mid i \in J\} \times \sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\} \subset f^{-1}(U). \tag{1}$$

Fie $k = kerf : P \longrightarrow X$, şi $q = cokerk : X \longrightarrow Q$.

Atunci

$$f = g \cdot q \tag{2}$$

pentru un morfism g. Egalitatea (2) este $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$-factorizarea morfismului f. Pentru produsele $\sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\}$ şi $\sqcap\{X_i \mid i \in I\}$ examinăm incluziunea canonică

$$m : \sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\} \longrightarrow \sqcap\{X_i \mid i \in I\}$$

şi proiecţia canonică

$$t : \sqcap\{X_i \mid i \in I\} \longrightarrow \sqcap\{X_i \mid i \in J\}.$$

Deoarece

$$\sqcap\{X_i \mid i \in I\} = \sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\} \times \sqcap\{X_i \mid i \in J\}$$

deducem că $m = ker\ t$, $t = coker\ m$. Din relaţia (1) rezultă că

$$\sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\} \subset P.$$

Aşadar

$$m = k \cdot m_1 \tag{3}$$

pentru un morfism m_1. Atunci din egalitatea (2), rezultă că

$$q = r \cdot t \tag{4}$$

pentru un morfism r. Din egalităţile (2) şi (4) obţinem

$$f = g \cdot r \cdot t. \tag{5}$$

Astfel morfismul f se factorizează prin produsul unui număr finit de obiecte $\sqcap\{X_i \mid i \in J\}$. $\uparrow$

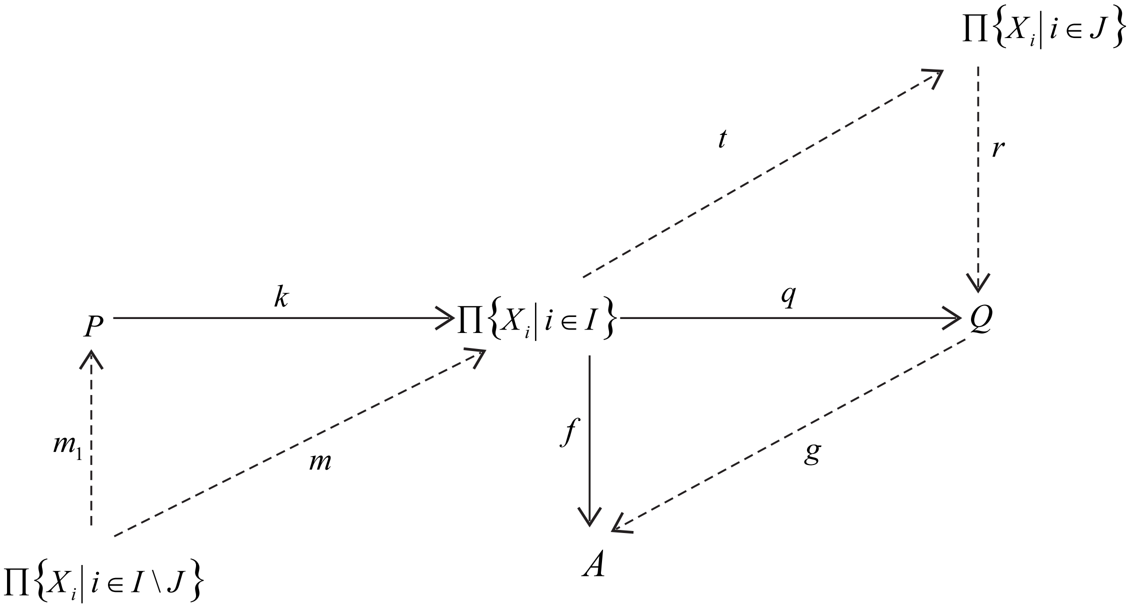


Figura 3.3.2

3.3.4. Spaţiile normate posedă în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi o proprietate duală într-un anumit sens.

Teoremă. *Fie A un spaţiu normat, şi $k : A \longrightarrow \sqcap\{X_i \mid i \in I\} \in \mathcal{M}_p$ (k este o incluziune topologică). Atunci există o submulţime finită $J \subset I$ astfel încât $p \cdot k \in \mathcal{M}_p$ ($p \cdot k$ este de asemenea o incluziune topologică), unde $p : \sqcap\{X_i \mid i \in I\} \longrightarrow \sqcap\{X_i \mid i \in J\}$ este proiecţia canonică.*

$\downarrow$ Într-adevăr, fie $\mathcal{U} = \{x \in A \mid\| x \|\leq 1\}$. Luând în consideraţie care mulţimi formează baza topologiei în spaţiul $\sqcap\{X_i \mid i \in I\}$, putem spune: există o submulţime finită $J \subset I$ şi vecinătătatea $\mathcal{V}_i$ a lui zero în spaţiul $X_i, i \in J$, astfel încât $k^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$, unde

$$\mathcal{V} = \sqcap\{\mathcal{V}_i \mid i \in J\} \times \sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\} \subset \mathcal{V}. \tag{1}$$

Examinăm proiecţia canonică

$$p : \sqcap\{X_i \mid i \in I\} \longrightarrow \sqcap\{X_i \mid i \in J\}. \tag{3}$$

Să demonstrăm că morfismul $p \cdot k$ este o incluziune topologică: $p \cdot k \in \mathcal{M}_p$. Pentru orice element $x \in \mathcal{U}$ avem $k(x) = x' + x''$, unde

$$x' \in \sqcap\{\mathcal{V}_i \mid i \in J\}, \quad x'' \in \sqcap\{X_i \mid i \in I \setminus J\}. \tag{4}$$

Fie că $x' = 0$. Atunci $k(n \cdot x) = n \cdot x'' \in \mathcal{V}$. Deci $n \cdot x \in \mathcal{U}$, pentru orice număr natural n. Astfel $x = 0$.

Deoarece

$$p \cdot k(x) = p(x' + x'') = p(x') + p(x'') = x'$$

astfel am demonstrat că operatorul $p \cdot k$ este o aplicaţie injectivă. Pe de altă parte, avem

$$(p \cdot k)^{-1}(\sqcap\{\mathcal{V}_i \mid i \in J\}) = k^{-1}p^{-1}(\sqcap\{\mathcal{V}_i \mid i \in J\}) = k^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}.$$

Astfel aplicaţia $p \cdot k \in \mathcal{M}_p$ ($p \cdot k$ este o incluziune topologică). $\uparrow$

$$A \xrightarrow{\quad k \quad} \prod\{X_i \mid i \in I\} \xrightarrow{\quad p \quad} \prod\{X_i \mid i \in J\}$$

Figura 3.3.3

Capitolul 4. Obiecte libere

4.1. Obiecte libere

4.1.1. Orice subcategorie $\mathcal{R}$ a unei categorii $\mathcal{C}$ presupune functorul de incluziune $i : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ care ne conduce la problema: posedă acest functor un adjunct la stânga sau la dreapta. Următoarea teoremă indică condiţii necesare şi suficiente ca această întrebare să aibă o soluţie pozitivă. În acest paragraf o să ne intereseze existenţa adjunctului de stânga r a functorului i. Deoarece $\mathcal{R}$ este o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$ existenţa adjunctului de stânga r poate fi formulată mai simplu prin intermediul existenţei morfismelor de adjuncţie $\{r^X : X \longrightarrow rX \mid X \in \mid \mathcal{C} \mid\}$ (vezi [B, D, 1972]).

Teoremă. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$ cu functorul de incluziune $i : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Functorul $i : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ posedă un adjunct la stânga $r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R} : r \dashv i$.

2. Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ există un obiect rX al subcategoriei $\mathcal{R}$ şi un morfism $r^X : X \longrightarrow rX$ cu următoarea proprietate universală:

Pentru orice obiect $A \in \mid \mathcal{R} \mid$ şi orice morfism $f : X \longrightarrow A$ există un singur morfism $g : rX \longrightarrow A \in \mathcal{R}$ astfel încât

$$g \cdot r^X = f. \uparrow \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, "f"'] & & rX \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1.1

4.1.2. Remarcă. *1. Atât în diagramă, cât şi în egalitatea (1) este omis functorul i. Altfel ar trebui să scriem*

$$i(g) \cdot r^X = f.$$

2. Obiectul rX este determinat în mod unic până la un isomorfism: dacă $r_1 : X \longrightarrow Y$ cu $Y \in \mid \mathcal{R} \mid$ are aceeaşi proprietate universală, atunci $t \cdot r^X = r_1$ pentru un careva iso t.

3. În condiţia 2 a Teoremei precedente obiectul respectiv, care există pentru obiectul X, se notează special rX, căci el este imaginea lui X la aplicarea functorului r (care trebuie construit). Pe morfisme functorul r se construieşte astfel: Fie $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{C}$, şi $r^X : X \longrightarrow rX$,

$r^Y : Y \longrightarrow rY$ morfismele respective. În baza ipotezei există un singur morfism $g : rX \longrightarrow rY$ astfel incât

$$g \cdot r^X = r^Y \cdot f. \tag{1}$$

Morfismul g şi se declară imaginea morfismului f la construirea functorului $r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R}$:

$$g = r(f).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, "f"'] & & irX \arrow[dl, dashed, "i(g)"] \\
& iA &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1.2

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r^X"'] & Y \arrow[d, "r^Y"] \\
rX \arrow[r, dashed, "g = r(f)"] & rY
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1.3

4. Unii autori în definiţia obiectelor libere mai includ unele condiţii referitor la aplicaţia r^X sau la obiectul rX. De exemplu, la studierea algebrelor universale libere peste un spaţiu Tihonov se pun şi condiţii de tipul:

a) $r^X(X)$ generează algebric algebra rX;

b) $r^X(X)$ este o mulţime închisă în rX;

c) r^X este o incluziune topologică.

4.1.3. Definiţie. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}$ şi functorul de incluziune $i : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ posedă adjunctul de stânga $r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R}$.*

1. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{R}$ se numeşte subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$, r^X, sau rX, sau perechea (rX, r^X) se numeşte $\mathcal{R}$-replica obiectului X.

2. Dacă $\mathcal{R}$ nu este o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}$, atunci se spune, că obiectele categoriei $\mathcal{C}$ posedă în $\mathcal{R}$ obiecte libere, rX şi r^X se notează în acest caz $l^X : X \longrightarrow lX$, lX se numeşte obiectul liber al obiectului X.

3. Fie $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Subcategoria reflectivă (respectiv: coreflectivă) $\mathcal{T}$ se numeşte $\mathcal{A}$-reflectivă (respectiv: $\mathcal{A}$-coreflectivă), dacă $\mathcal{T}$-replica (respectiv: $\mathcal{T}$-coreplica) oricărui obiect, aparţine clasei $\mathcal{A}$. $\mathbb{R}(\mathcal{A})$ (respectiv: $\mathbb{K}(\mathcal{A})$) este clasa tuturor subcategoriilor $\mathcal{A}$-reflective (respectiv: $\mathcal{A}$-coreflective.

4.1.4. Exemple. *1. Fie $\mathcal{C}$ o categorie de algebre universale, I o familie de identităţi, iar $\mathcal{V}$ subcategoria tuturor algebrelor ce verifică toate identităţile familiei I. $\mathcal{V}$ se ia ca o subcategorie plină în această situaţie. Construirea perechii (rX, r^X) nu este altceva decît descrierea reprezentantului rX al obiectului X in subcategoria $\mathcal{V}$.*

2. Deseori în categoria $\mathcal{C}$ de algebre universale se evidenţiază acelea, care posedă anumite elemente fixe (0 sau 1, de exemplu). În acest caz, pentru obiectele subcategoriei $\mathcal{L}$ se studiază numai acele morfisme care păstrează elementele fixate (acele morfisme care sunt în concordanţă cu operaţiile nul-are date). Este clar, în acest caz subcategoria $\mathcal{L}$ nu este, în genere, plină. Deci functorul $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}$ este functor liber.

3. $\mathcal{C} = \mathcal{A}nn$ categoria inelelor, $\mathcal{V}$ subcategoria inelelor asociative (comutative, asociative şi comutative etc). Atunci $\mathcal{V}$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$.

4. $\mathcal{C} = \mathcal{A}nn$, sau una din subcategoriile enumerate mai sus, $\mathcal{L}$ subcategoria inelelor cu unitate, şi morfismele din $\mathcal{L}$ sunt omomorfisme de inele ce păstrează unitatea. $\mathcal{L}$ nu este o subcategorie plină în categoria $\mathcal{C}$ - omomorfismul nul nu păstrează unitatea.

4.1.5. Fie $\mathcal{L}$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$ pentru care functorul $id : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ posedă un adjunct la stânga $l : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$. Pentru orice morfism $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ avem

$$l^Y \cdot f = l(f) \cdot l^X \qquad (1)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l^X"'] & Y \arrow[d, "l^Y"] \\
lX \arrow[r, "l(f)"] & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1.4.

Notăm

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C} \mid l(f) \in \mathcal{I}so(\mathcal{L})\};$$

$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C} \mid l^Y \cdot f = l(f) \cdot l^X$ este un pătrat cartezian în categoria $\mathcal{C}\}$.

Exerciţii. *1. Clasa $\mathcal{I}$ conţine toate morfismele subcategoriei $\mathcal{L} : \mathcal{L} \subset \mathcal{I}$.*

2. $\mathcal{I}so\ \mathcal{C} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$.

3. $f : X \to Y \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$ când există un morfism $t : Y \to lX$ astfel încât:

a) $l^X = t \cdot f$;

b) (lX, t) este obiectul liber al obiectului Y.

4. $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ şi $\mathcal{I} \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

5. $\mathcal{P} \perp \mathcal{I}$.

4.2. Spaţiul local convex liber peste o mulţime

4.2.1. Categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ poate fi examinată ca o subcategorie a categoriei mulţimilor $\mathcal{E}ns$. Functorul $i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ se mai numeşte functor de subiacenţă sau uituc care neglijează atât structura topologică cât şi cea de spaţiu vectorial.

O să construim functorul liber $l : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie X o mulţime nevidă. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ stabilim $lX = K^{(X)}$ cu topologia respectivă - cea mai fină topologie local convexă.

Amintim că spaţiul K^X este format din toate elementele de forma

$$\{(a_x)_{x \in X} \mid a_x \in K\},$$

iar $K^{(X)}$ conţine acele elemente din K^X care au numai un număr finit de coordonate nenule.

Aplicaţia $l^X : X \longrightarrow lX$ se defineşte $l^X(x_0) = \{(a_x)_{x \in X}\}$, unde

$a_x = 1$, dacă $x = x_0$,

$a_x = 0$, dacă $x \neq x_0$.

Spaţiul lX, spaţiul vectorial liber peste mulţimea X, poate fi conceput ca mulţimea tuturor combinaţiilor

$$\Sigma_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_k \in X, \lambda_k \in K.$$

Iar în cazul $n = 0$ combinaţia respectivă este elementul 0 al spaţiului lX.

Fie acum $f : X \longrightarrow (E, u)$ o aplicaţie a mulţimii X în spaţiul (E, u). Trebuie de prelungit f prin l^X cu ajutorul unui operator g liniar şi continuu. Stabilim

$$g\{(a_x)_{x \in X}\} = \Sigma_{x \in X} a_x f(x).$$

Este clar că g este un operator liniar şi continuu deoarece un operator liniar cu domeniul de definiţie $K^{(X)}$ este continuu.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dr, "f"'] & & lX \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& (E,u) &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2.1

Unicitatea morfismului $g \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu proprietatea

$$f = g \cdot l^X$$

rezultă din faptul că mulţimea $l^X(X)$ este o bază (o bază Hamell) a spaţiului vectorial lX.

Teoremă. *1. Obiectul liber peste mulţimea vidă este spaţiul nul.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există obiecte libere peste orice mulţime:

$$i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}ns, l : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}_2\mathcal{V}, l \dashv i.$$

3. În categoria $\mathcal{CV}$ există obiecte libere peste orice mulţime

$$i : \mathcal{CV} \longrightarrow \mathcal{E}ns, l : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{CV}, l \dashv i.$$

4. Obiectul liber peste mulţimea X în categoriile $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\mathcal{CV}$ sunt spaţiile $K^{(X)}$ înzestrate cu cea mai fină topologie local convexă. Obiectele $K^{(X)}$ formează în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ subcategoria coreflectivă Σ. $\uparrow$

4.3. Spaţiul local convex liber peste un spaţiu uniform

4.3.1. Rezultatele acestui şi următorului paragraf sunt expuse conform lucrării [Ra, 1964]. Un spaţiu local convex (E, u) se consideră înzestrat cu acea unică uniformitate compatibilă cu topologia şi pentru care operaţia de scădere este uniform continuă. Această uniformitate se defineşte prin sistemul de anturage

$$\{(x, y) \in E \mid x - y \in \mathcal{V}\},$$

când $\mathcal{V}$ parcurge un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui zero. În această situaţie aplicaţiile linear continui ale spaţiilor local convexe devin uniform continui. Aceasta ne permite să examinăm categoria spaţiilor local convexe $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ ca o subcategorie a spaţiilor uniforme $\mathcal{U}_2$

$$i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}_2.$$

O să construim functorul liber $l : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1) Fie (X,t) un spaţiu uniform. Pe viitor t o să însemne uniformitatea acestui spaţiu cât şi topologia generată de această uniformitate. Examinăm morfismul de calcul

$$(X,t) \xrightarrow{\quad w^X \quad} K^{U(X,t)}$$

Figura 4.3.1

unde $\mathcal{U}(X,t)$ este spaţiul funcţiilor uniform continui definite pe X cu valori în K.

Fie lX spaţiul liber peste mulţimea X (a se vedea paragraful precedent). Pe subspaţiul lX examinăm topologia s indusă din spaţiul $K^{\mathcal{U}(X,t)}$.

$$\begin{tikzcd}
(X,t) \arrow[r, "l_s^X"] \arrow[dr, "w^X"'] & (lX, s) \arrow[d, "i^X"] \\
 & K^{U(X,t)}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3.2

Orice funcţie uniform continuă pe (X,t) se extinde în mod unic prin w^X, deci şi prin l_s^X. Aşadar conjugatul spaţiului (lX, s) este $\mathcal{U}(X,t) : (X,s)' = \mathcal{U}(X,t)$, iar s este topologia slabă

$$s = \sigma(lX, \mathcal{U}(X,t)).$$

1. Uniformitatea s din lX induce în X uniformitatea slabă. În această situaţie pe lX există cea mai fină topologie local convexă pentru care aplicaţia l_s^X rămâne uniform continuă. Mulţimea lX cu această topologie şi este spaţiul liber al spaţiului (X,t). În continuare vom construi această topologie.

2. Să examinăm pe lX topologia $t^{\mathcal{H}}$ a convergenţei uniforme pe clasa $\mathcal{H}$ a mulţimilor H din $\mathcal{U}(X,t)$ echicontinui şi mărginite în fiecare punct $x \in X$. Pentru topologia $t^{\mathcal{H}}$ mulţimile

$$\{u \in lX :|< u, f >| \leq \varepsilon\}, \quad f \in H, \quad H \in \mathcal{H}, \quad \varepsilon > 0$$

formează un sistem fundamntal de vecinătăţi ale lui zero.

De aceea mulţimile

$$\{(u,v) \in lX \times lX :|< u - v, f >| \leq \varepsilon, \forall f \in H\}, \quad H \in \mathcal{H}, \varepsilon > 0$$

formează un sistem fundamental de anturage pentru uniformitatea $t^{\mathcal{H}}$. Deci mulţimile

$$| f(x) - f(y) | \leq \varepsilon$$

$$W_{H,\varepsilon} = \{(x, y) \in X \times X :| f(x) - f(y) | \leq \varepsilon, \quad \forall f \in H\}, \quad H \in \mathcal{H}, \quad \varepsilon > 0$$

formează un sistem fundamental de anturage a uniformităţii $t^{\mathcal{H}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & (lX, t^{\mathcal{H}}) \arrow[d, "i^X"] \\
(X,t) \arrow[ur, "l^X"] \arrow[r, "l_S^X"] \arrow[dr, "w^X"] & (lX, s) \arrow[d, "i^X"] \\
 & K^{U(X,t)}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3.3

Teoremă. *Spaţiul local convex Hausdorff liber a unui spaţiu uniform Hausdorff* (X, t) *este spaţiu liber peste mulţimea* X *înzestrat cu topologia convergenţei uniforme pe clasa* $\mathcal{H}$ *a tuturor mulţimilor echicontinui* $H \subset \mathcal{U}(X, t)$ *şi mărginite în fiecare punct* $x \in X$.$\uparrow$

4.3.2. Corolar. *Spaţiul conjugat spaţiului local convex liber* (lX, m) *a spaţiului uniform* (X, t) *poate fi identificat cu ajutorul operaţiei de restricţie* Ψ

$$\Psi(f) = f \mid_X, \forall f \in (lX, t^{\mathcal{H}})'$$

cu spaţiul $\mathcal{U}(X, t)$*:*

$$(lX, m)' = \mathcal{U}(X, t^{\mathcal{H}}).$$

4.3.3. Să examinăm unele proprietăţi ale functorului $l : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{CV}$.

Teoremă. *Aplicaţia* $l^X : (X, t) \longrightarrow (lX, t^{\mathcal{H}})$ *realizează spaţiul* (X, t) *ca un subspaţiu al spaţiului uniform* $(lX, t^{\mathcal{H}})$

$$t = t^{\mathcal{H}} \mid_X . \quad \uparrow$$

4.3.4. Teoremă. *Fie* (X, t) *un spaţiu uniform, şi* $(lX, t^{\mathcal{H}})$ *spaţiul liber. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. (X, t) *este Hausdorff.*

2. (X,t) *este închis în* $(lX, t^{\mathcal{H}})$.

3. $(lX, t^{\mathcal{H}})$ *este Hausdorff.* $\uparrow$

4.3.5. Teorema precedentă ne permite să spunem că următoarea diagramă este comutativă.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_2\mathcal{V} \arrow[rr, "i_1"] \arrow[d, shift left, "s_1"] & & \mathcal{C}\mathcal{V} \arrow[d, shift left, "s_2"] \\
\mathcal{U}_2 \arrow[rr, "i_2"] \arrow[u, shift left, "l_1"] & & \mathcal{U} \arrow[u, shift left, "l_2"]
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3.5

Unde i_1, i_2 sunt functorii de incluziune, s_1, s_2 functorii subiacenţi, l_1, l_2 functorii liberi

$$l_1 \dashv s_1, l_2 \dashv s_2, \qquad i_1 \cdot l_1 = l_2 \cdot i_2, \qquad i_2 \cdot s_1 = s_2 \cdot i_1.$$

4.3.6. Teoremă. *Orice spaţiu local convex* (E,t) *este izomorf cu un factorspaţiu al spaţiului local convex liber al său* $(lE, t^{\mathcal{H}})$. $\uparrow$

4.4. Spaţiul local convex liber peste un spaţiu Tihonov

4.4.1. Teoremă. *Spaţiul local convex liber a unui spaţiu Tihonov* (X,t) *există şi coincide cu spaţiul vectorial liber* lX *al mulţimii* X *înzestrat cu topologia* $t^{\mathcal{H}}$ *a convergenţei uniforme pe clasa* $\mathcal{H}$ *a mulţimilor* $H \subset \mathcal{C}(X)$ *echicontinui şi mărginite în fiecare punct* $x \in X$. $\uparrow$

4.4.2. Exerciţii. *1. Fie* (X,d) *un spaţiu cu topologia (sau uniformitatea) discretă. Atunci* $(lX,d) = K^{(X)}$.

2. În particular, dacă X *este o mulţime finită, atunci*

$$l(X,d) = K^X.$$

Capitolul 5. Obiecte proiective şi injective

5.1. Obiecte proiective şi injective

Noţiunile de obiect proiectiv şi injectiv au aparut la început în categorii abeliene, adică în categorii unde există o singură structură de factorizare $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}ono)$. Odată ce trecem la categorii topologice, aceste noţiuni trebuie ataşate unei structuri de factorizare, sau unei clase de monomorfisme. La rândul său, existenţa unei clase suficiente de obiecte injective, de exemplu, face ca clasa de injecţii a structurii de factorizare să verifice un analog al axiomei AB4 (vezi [Gr, 1957]).

5.1.1. Definiţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare a categoriei $\mathcal{C}$. Obiectul A se numeşte $\mathcal{P}$-proiectiv dacă pentru orice morfism $p : X \longrightarrow Y \in \mathcal{P}$ şi orice morfism $f : A \longrightarrow Y \in \mathcal{C}$ există un morfism $g : A \longrightarrow X$ pentru care*

$$p \cdot g = f.$$

5.1.2. Definiţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare a categoriei $\mathcal{C}$. Se spune că în categoria $\mathcal{C}$ există suficiente obiecte $\mathcal{P}$-proiective, dacă pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ există un obiect $\mathcal{P}$-proiectiv A şi un morfism $p : A \longrightarrow X \in \mathcal{P}$.*

d^*: obiect $\mathcal{I}$-injectiv şi categorie cu suficiente obiecte $\mathcal{I}$-injective.

5.1.3. Propoziţie. *1. Fie că I este obiect iniţial al categoriei $\mathcal{C}$. Atunci I este un obiect $\mathcal{E}pi$-proiectiv.*

2. Fie că obiectul X este suma familiei de obiecte $\{X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ şi fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare a categoriei $\mathcal{C}$. Obiectul X este $\mathcal{P}$-proiectiv atunci şi numai atunci când fiecare sumand $X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ este $\mathcal{P}$-proiectiv.

3. Fie că $r : A \longrightarrow Z$ este o retracţie şi A este un obiect $\mathcal{P}$-proiectiv. Atunci Z este de asemenea $\mathcal{P}$-proiectiv.

3^*. *Fie că $r : A \longrightarrow Z$ este o retracţie şi A este un obiect $\mathcal{I}$-injectiv. Atunci Z este un obiect $\mathcal{I}$-injectiv.* $\uparrow$

5.1.4. Remarcă. *În categoriile aditive proprietăţile* 3 *şi* 3^* *ale propoziţiei precedente afirmă că orice sumand direct al unui obiect $\mathcal{P}$-proectiv ($\mathcal{I}$-injectiv) este $\mathcal{P}$-proectiv ($\mathcal{I}$-injectiv).*

5.1.5. Exemple. *1. În categoria $\mathcal{R}$-$\mathcal{M}od$ un modul este proiectiv atunci şi numai atunci, când este un sumand direct al unui modul liber.*

2. În categoria $\mathcal{R}$-$\mathcal{M}od$ există suficiente obiecte proiective.

3. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathcal{R}$ este un inel semireflexiv.

b) Orice $\mathcal{R}$-$\mathcal{M}od$ este proiectiv.

c) Orice $\mathcal{R}$-$\mathcal{M}od$ este injectiv.

4 (Criteriul R. Baer). Modulul ${}_RN$ este injectiv atunci şi numai atunci când pentru orice ideal stâng $I \subset R$ al inelului R orice morfism $f :_R I \longrightarrow_R N$ se extinde până la un morfism $g :_R R \longrightarrow_R N$, adică există un element $x \in N$ astfel încât $f(r) = r \cdot x$ pentru orice $r \in I$.

5. Grupul abelian $G(+)$ se numeşte divizibil dacă orice ecuaţie de forma $n \cdot x = q, \quad 0 \neq n \in Z$ şi $q \in G$ posedă soluţie în G:

$$\exists q_1 \in G : n \cdot q_1 = q.$$

6. Grupul abelian $G(+)$ este injectiv în categoria $\mathcal{A}b$ grupurilor abeliene atunci şi numai atunci când $G(+)$ este divizibil.

5.1.6. Remarcă. *Obiectele proiective şi injective pot fi definite şi examinate pentru o clasă arbitrară de epimorfosme, respectiv - monomorfisme. Existenţa a suficiente obiecte proiective în roport cu clasa de proiecţii a unei structuri de factorizare permite de a demonstra proprietăţi importante a clasei de proiecţii.*

5.1.7. Teoremă. *Fie $\mathcal{C}_1$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$ astfel încât functorul incluziunii $\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}$ posedă un adjunct la stânga $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. Mai departe, fie $\mathcal{P}$ o clasă de epi a categoriei $\mathcal{C}$, iar A un obiect $\mathcal{P}$-proiectiv. Atunci lA este un obiect $(\mathcal{P} \cap \mathcal{C}_1)$-proiectiv în subcategoria $\mathcal{C}_1$.* $\uparrow$

5.1.8. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$.*

1. Dacă în categoria $\mathcal{C}$ există suficiente obiecte $\mathcal{P}$-proiective, atunci clasa $\mathcal{P}$ este completă la stânga şi $\mathcal{M}ono$-ereditară.

1^*. *Dacă în categoria $\mathcal{C}$ există suficiente obiecte $\mathcal{I}$-injective, atunci clasa $\mathcal{I}$ este completă la dreapta şi $\mathcal{E}pi$-ereditară.*

$\downarrow$ O să demonstrăm p.1^* deoarece în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ sunt multe structurei de factorizare cu suficiente obiecte injective. Să verificăm condiţiile Definiţiei 2.2.2.

1. $\mathcal{I}so\mathcal{C} \subset \mathcal{I}$. Evident.

$\mathcal{I} \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Evident.

3. Clasa $\mathcal{I}$ este stabilă la dreapta. Fie

$$f' \cdot i = i' \cdot f \tag{1}$$

pătrat cocartezian şi $i \in \mathcal{I}$. Trebuie să demonstrăm, că $i' \in \mathcal{I}$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "f'"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "g"] \\
Z \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "m"'] & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

Figura 5.1.2

Există un obiect $\mathcal{I}$-injectiv A şi un morfism $m : Z \longrightarrow A \in \mathcal{I}$. Morfismul $m \cdot f$ se extinde prin morfismul i, ce aparţine clasei $\mathcal{I}$:

$$m \cdot f = g \cdot i. \tag{2}$$

Din condiţia că (1) este un pătrat cocartezian, rezultă că există un morfism h astfel încât:

$$m = h \cdot i', \tag{3}$$

$$g = h \cdot f', \tag{4}$$

Din egalitatea (3), deoarece $m \in \mathcal{I}$, deducem că $i' \in \mathcal{I}$.

4. Fie $m_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha \in \mathcal{I}$, iar $m = \sqcup m_\alpha : \sqcup X_\alpha \longrightarrow \sqcup Y_\alpha$ şi incluziunile canonice $p_\beta : X_\beta \longrightarrow \sqcup X_\alpha$ şi $q_\beta : Y_\beta \longrightarrow \sqcup Y_\alpha$ ce verifică egalităţile:

$$m \cdot p_\beta = q_\beta \cdot m_\beta, \quad \forall \beta \in \mathcal{B}. \tag{5}$$

$$
\begin{tikzcd}
X_\beta \arrow[r, "m_\beta"] \arrow[d, "p_\beta"'] & Y_\beta \arrow[d, "q_\beta"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "f_\beta"] \\
\amalg X_\alpha \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t"'] & \amalg X_\alpha \arrow[dl, dashed, "f"'] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

Figura 5.1.3

Există un obiect injectiv A şi un morfism $t : \sqcup X_\alpha \longrightarrow A \in \mathcal{I}$. Morfismul $t \cdot p_\beta$ se extinde prin morfismul m_β, deoarece $m_\beta \in \mathcal{I}$:

$$t \cdot p_\beta = f_\beta \cdot m_\beta, \forall \beta \in \mathcal{B}. \tag{6}$$

Atunci există un morfism $f : \sqcup Y_\alpha \longrightarrow A$ astfel încât

$$f_\beta = f \cdot q_\beta, \forall \beta \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

Avem

$$f \cdot m \cdot p_\beta = (\text{din}(6)) = f_\beta \cdot m_\beta = (\text{din}(7)) = f \cdot q_\beta \cdot m_\beta = (\text{din}(5)) = f \cdot m \cdot q_\beta,$$

i.e.

$$f \cdot m \cdot p_\beta = f \cdot m \cdot q_\beta, \forall \beta \in \mathcal{B}. \tag{8}$$

Deci

$$t = f \cdot m \tag{9}$$

şi deoarece $t \in \mathcal{I}$, deducem, că şi $m \in \mathcal{I}$.

5. Această condiţie se verifică, ca şi condiţia 4.

Să verificăm că clasa $\mathcal{I}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară. Fie $b \cdot e \in \mathcal{I}$ şi $e \in \mathcal{E}pi$. Atunci patratul

$$b \cdot e = 1 \cdot (b \cdot e) \tag{10}$$

este cocartezian. Deci $b \in \mathcal{I}$. $\uparrow$

5.2. Obiecte proiective şi injective în categoria spaţiilor compacte

5.2.1. Definiţie. *Un spaţiu topologic se numeşte $\mathcal{T}_1$-spaţiu, dacă orice două puncte diferite, fiecare posedă câte o vecinătate ce nu conţine celălalt punct.*

5.2.2. Definiţie. *Un $\mathcal{T}_1$-spaţiu se numeşte normal, dacă pentru orice două mulţimi închise A şi B disjunctive ($A \cap B = \emptyset$) există o funcţie continuă astfel încât $f(A) = 0$ şi $f(B) = 1$.*

5.2.3. Exerciţii. *1. Într-un $\mathcal{T}_1$-spaţiu orice punct este o mulţime închisă.*

2. Orice spaţiu normal este un spaţiu Hausdorff.

3. Orice subspaţiu închis a unui spaţiu normal este un spaţiu normal.

4. Corpul numerelor reale R este este un spaţiu normal. $R^{\aleph_1}$ nu este un spaţiu normal.

5. Dreapta Sergenfrey X este spaţiu normal, şi X^2 nu este spaţiu normal ([En, 1985], p.2.3.12).

6. Factorspaţiul unui spaţiu normal nu este neapărat normal.

7. Suma categorială (în categoria $\mathcal{T}_2$) a unei familii de spaţii normale este un spaţiu normal.

5.2.4. Teoremă. *Fie $I = [0;1]$ cu topologia obişnuită, X un spaţiu topologic, iar $w^X : X \longrightarrow I^{\mathcal{H}(X,I)}$ morfismul de calcul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) X este un spaţiu Hausdorff şi compact.

b) w^X este scufundare topologică cu imagine închisă. $\uparrow$

5.2.5. Teoremă (*P. Alexandrov, P. Urîson*). *Orice spaţiu Hausdorff şi compact este un spaţiu normal.* $\uparrow$

5.2.6. Notaţii. *Fie $\mathcal{T}norm$ categoria spaţiilor normale, şi $\mathcal{C}omp_2$ categoria spaţiilor Hausdorff compacte.*

Fie $f : (X, u) \longrightarrow (Y, v) \in \mathcal{T}norm$. Examinăm următoarea factorizare a morfismului f

$$(X,u) \xrightarrow{\ p\ } (\overline{f(x)}, v') \xrightarrow{\ i\ } (Y,v)$$

Figura 5.2.1

unde $\overline{f(X)}$ este închiderea mulţimii $f(X)$ în spaţiu (Y, v), iar v' este topologia indusă de topologia v pe submulţimea $\overline{f(X)}$ a mulţimii Y. $(\overline{f(X)}, v')$ ca subspaţiu închis a spaţiului (Y, v) este de asemenea normal. Astfel $f = i \cdot p$ este o factorizare a morfismului f în categoria $\mathcal{T}norm$.

Teoremă. *Perechea $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{T}norm$, unde $\mathcal{E}pi$ este clasa tuturor aplicaţiilor cu imagine densă, iar $\mathcal{M}_f$ este clasa tuturor incluziunilor topologice cu imagine închisă.*$\uparrow$

5.2.7. Teoremă (*Tietze - Urâson*) (vezi [En, 1985], Teorema 2.1.8). *Orice funcţie cu valori în $I = [0, 1]$ sau R definită pe un subspaţiu închis a unui spaţiu normal poate fi extinsă pe tot spaţiul.*$\uparrow$

5.2.8. Astfel teorema precedentă poate fi formulată şi astfel.

Teoremă.*În categoria $\mathcal{T}norm$ obiectele I şi R sunt $\mathcal{M}_f$-injective.* $\uparrow$

5.2.9. Reieşind din faptul că subcategoria $\mathcal{T}norm$ nu este închisă în categoria spaţiilor topologice în rapot cu limitele proiective (Stone A.H. (vezi [En, 1985], Exerciţiul 2.7.16) este greu de presupus că următoarele probleme au un răspuns afirmativ.

Problemă. *1. Există oare în categoria $\mathcal{T}norm$ produsul categorial al oricărei familii de obiecte?*

2. Posedă oare categoria $\mathcal{T}norm$ suficiente obiecte $\mathcal{M}_f$-injective?

5.2.10. Fie $f : (X, u) \longrightarrow (Y, v)$ un morfism al categoriei $\mathcal{C}omp_2$ şi examinăm ca şi în p.6 factorizarea lui

$$(X,u) \xrightarrow{p} (\overline{f(x)}, v') \xrightarrow{i} (Y,v)$$

Figura 5.2.2

Deoarece imaginea unui compact este un compact obţinem ca $(f(X), v')$ este un compact şi dens ca subspaţiu în $(\overline{f(X)}, v')$. Aşadar $f(X) = \overline{f(X)}$ şi factorizarea dată ia forma

$$(X,u) \xrightarrow{p} (f(x), v') \xrightarrow{i} (Y,v)$$

Figura 5.2.3

Teoremă. *1. În categoria $\mathcal{C}omp_2$ clasa epimorfismelor $\mathcal{E}pi$ coincide cu clasa aplicaţiilor surjective $\mathcal{E}_u$: $\mathcal{E}pi = \mathcal{E}_u$.*

2. Perechea $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_f)$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}omp_2$. $\uparrow$

5.2.11. Deoarece $I = [0,1]$ este un spaţiu $\mathcal{M}_f$-injectiv (Teorema 5.2.7), şi produsul de obiecte $\mathcal{M}_f$-injective este tot un obiect injectiv, deducem, că I^τ este un obiect injectiv. Pe de altă parte, orice obiect al categoriei $\mathcal{C}omp_2$ este izomorf cu un subspaţiu închis al unui spaţiu de forma I^τ :

$$w^X : X \longrightarrow I^{\mathcal{H}om(X,I)}$$

Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}omp_2$ există suficiente obiecte $\mathcal{M}_f$-injective.*$\uparrow$

5.2.12. Fie (X,d) un spaţiu cu topologie discretă, iar $\beta^X : (X,d) \longrightarrow \beta(X,d)$ compactificaţia Stone - $\hat{C}$ech a acestui spaţiu.

Teoremă. *Spaţiile de tipul $\beta(X,d)$ sunt obiecte $\mathcal{E}_u$-proiective în categoria $\mathcal{C}omp_2$.*

$\downarrow$ Fie $p : (Y,u) \longrightarrow (Z,v)$ o aplicaţie surjectivă a categoriei $\mathcal{C}omp_2$, iar $f : \beta(X,d) \longrightarrow (Z,v)$ o aplicaţie continuă

$$\begin{tikzcd}
(Y,u) \arrow[d, "p"'] & (X,d) \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[d, "\beta^X"] \\
(Z,v) & \beta(X,d) \arrow[l, "f"] \arrow[ul, dashed, "t"]
\end{tikzcd}$$

Figura 5.2.4

Deoarece p este surjectivă există o aplicaţie, evident continuă, $g : (X,d) \longrightarrow (Y,u)$ pentru care

$$p \cdot g = f \cdot \beta^X. \tag{1}$$

Aplicaţia g nu aparţine categoriei $\mathcal{C}omp_2$, dar ea aparţine categoriei spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h$. În acest caz există un morfism $t : \beta(X,d) \longrightarrow (Y,u)$ (Y,u) este un spaţiu compact, iar β^X este $\mathcal{C}omp_2$ - replica obiectului (X,d)), astfel încît

$$g = t \cdot \beta^X. \tag{2}$$

Avem

$$p \cdot t \cdot \beta^X = (din(2)) = p \cdot g = (din(1)) = f \cdot \beta^X$$

i.e.

$$p \cdot t \cdot \beta^X = f \cdot \beta^X \tag{3}$$

şi deoarece β^X este un *epi* în categoria $\mathcal{T}h$, deducem că

$$p \cdot t = f. \uparrow \tag{4}$$

5.2.13. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}omp_2$ există suficiente obiecte $\mathcal{E}_u$-proiective.*

$\downarrow$ Fie (X,u) un obiect al categoriei date. Pe mulţimea X examinăm topologia discretă d cu aplicaţia canonică $p : (X,d) \longrightarrow (X,u)$ şi compactificaţia Stone - $\hat{C}$ech $\beta^X : (X,d) \longrightarrow \beta(X,d)$. Atunci

$$p = p^X \cdot \beta^X \tag{1}$$

pentru un careva morfism p^X.

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[rr, "\beta^X"] \arrow[d, "p"'] & & \beta(X,d) \arrow[dll, dashed, "p^X"] \\
(X,u) & &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.2.5

Din egalitatea (1), deoarece $p \in \mathcal{E}_u$, rezultă că $p^X \in \mathcal{E}_u$. În plus $\beta(X,d)$ este $\mathcal{E}_u$-proiectiv. $\uparrow$

5.2.14. Remarcă. *Nu toată diagrama precedentă aparţine categoriei $\mathcal{C}omp_2$: obiectul (X,d) şi morfismele p şi β^X nu aparţin ei. Cu alte cuvinte din categoria $\mathcal{C}omp_2$ am trecut într-o categorie mai mare $\mathcal{T}h$, unde s-au efectuat construcţiile respective. În rezultat s-a revenit la subcategoria iniţială: morfismul $p^X : \beta(X,d) \longrightarrow (X,u)$ aparţine ei.*

5.2.15. Totalizînd rezultatele precedente avem.

Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}omp_2$ în raport cu structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_f)$ există suficiente obiecte proiective şi suficiente obiecte injective.*

$$\beta(X,d) \xrightarrow{p^X} (X,u) \xrightarrow{w^X} I^{Hom((X,u),I)}$$

Figura 5.2.6

5.3. Obiecte injective în categoria spaţiilor real compacte

5.3.1. Definiţie. *Un spaţiu Tihonov X se numeşte real compact (Hewitt) dacă morfismul de calcul*

$$w^X : X \longrightarrow R^{\mathcal{C}(X)}$$

care este o incluziune topologică, are imagine închisă: $w^X(X)$ este închis în $R^{\mathcal{C}(X)}$.

Astfel spaţiile real compacte sunt isomorfe cu subspaţii închise ale spaţiilor R^τ. Conform definiţiei în categoria $\mathcal{Q}$ a spaţiilor real compacte avem structura de factorizare $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$=(clasa epimorfismelor, clasa incluziunilor topologice cu imagine închisă), iar conform teoremei Tietze - Urâson corpul numerelor reale R este un obiect $\mathcal{M}_f$-injectiv. Mai departe, în baza definiţiei pentru un spaţiu real compact X morfismul w^X îl realizează pe X ca un $\mathcal{M}_f$-subspaţiu al spaţiului $\mathcal{M}_f$-injectiv $R^{\mathcal{C}(X)}$.

Teoremă. *În categoria $\mathcal{Q}$ a spaţiilor real compacte obiectele de forma R^τ formează o clasă suficientă de obiecte injective în raport cu structura de factorizare $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.* $\uparrow$

5.3.2. În categoria $\mathcal{T}h$ a spaţiilor Tihonov subcategoria $\mathcal{Q}$ este epireflectivă. Pentru a obţine $\mathcal{Q}$-replica unui spaţiu Tihonov X descompunem morfismul de calcul $w^X : X \longrightarrow R^{\mathcal{C}(X)}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q^X"] \arrow[dr, "w^X"'] & qX = \overline{w^X(X)} \arrow[d, "i^X"] \\
& R^{C(X)}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3.1

Notăm $\varepsilon\mathcal{Q}$ clasa tuturor epimorfismelor $e : X \longrightarrow Y \in \mathcal{T}h$ pentru care $q^X = f \cdot e$ pentru un careva morfism f. Este clar că $\varepsilon\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}ono$. Mai departe, fie $\mathcal{M}$ clasa cea mai mică de monomorfisme a categoriei $\mathcal{T}h$ închisă în raport cu compoziţia şi care conţine clasele $\varepsilon\mathcal{Q}$ şi $\mathcal{M}_f(\mathcal{T}h)$.

Teoremă. *În categoria $\mathcal{T}h$ obiectele de forma R^τ formează o clasă suficientă de obiecte $\mathcal{M}$-injective.* $\uparrow$

5.3.3. Problemă. *Este oare $(\mathcal{M}^\urcorner, \mathcal{M})$ o structură de factorizare în categoria spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h$?*

5.4. Obiecte proiective în categoria spaţiilor topologice

5.4.1. Rezultatele acestui şi următorului paragraf sunt expuse conform lucrării [Ge, 1972].

Fie X un spaţiu topologic şi m un cardinal infinit. Pentru orice $t \in X$ notăm cu X_t o mulţime de forma

$$X_t = \sqcup\{A_x \mid x \in X\}$$

(suma categorială egală cu suma disjunctă a mulţimilor A_x), unde $A_t = \{t\}$, iar pentru $x \neq t$ A_x este o mulţime de o putere mai mare ca m. Definim aplicaţia

$$p_t : X_t \longrightarrow X$$

care trece mulţimea A_x în punctul x. Pe mulţimea X_t se introduce următoarea topologie, considerând punctele diferite de t izolate, iar vecinătăţile punctului t sunt mulţimile de forma

$$p_t^{-1}(\mathcal{V}) \setminus \{\cup B_x \mid x \in X, x \neq t\},$$

unde $\mathcal{V}$ este o vecinătate a punctului t în spaţiul X, $B_x \subset A_x$ şi $card(B_x) \leq m$. Este clar că aplicaţia p_t devine continuă. Examinăm suma categorială a spaţiilor X_t

$$T(X, m) = \sqcup\{X_u, u \in X\}$$

Aplicaţiile $\{p_t \mid t \in X\}$ definesc o aplicaţie continuă $p : T(X, m) \longrightarrow X$

$$\begin{tikzcd}
X_t \arrow[r, "q_t"] \arrow[dr, "p_t"'] & T(X,m) \arrow[d, dashed, "p"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Figura 5.4.1

5.4.2. Definiţie. *Un spaţiu Hausdorff se numeşte zero dimensional perfect, dacă el este zero dimensional şi în orice acoperire deschisă poate fi inscrisă o acoperire deschisă local finită.*

5.4.3. Lemă. *1. Spaţiul $T(X,m)$ este un spaţiu zero dimensional perfect.*

2. Orice subspaţiu a spaţiului $T(X,m)$ de putere nu mai mare ca m este discret.

3. p este o aplicaţie factorială.

5.4.4. Teoremă. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie plină a categoriei spaţiilor topologice Top care conţine toate spaţiile zero dimensionale perfecte. Atunci obiecte $\mathcal{E}_f$-proiective în categoria $\mathcal{K}$ sunt spaţiile discrete şi numai ele.*$\uparrow$

5.5. Obiecte proiective în categoria spaţiilor local convexe

5.5.1. Folosind notaţiile paragrafului precedent o să descriem structura obiectelor proiective în categoria spaţiilor local convexe.

Lemă. *Fie $T = T(X,m)$, şi lT spaţiul local convex liber peste T. Orice subspaţiu local convex E al spaţiului lT, care are puterea nu mai mare ca m este isomorf cu un subspaţiu local convex de forma $K^{(\mathcal{S})}$.* $\uparrow$

5.5.2. Teoremă. *În categoria spaţiilor local convexe $\mathcal{CV}$ şi $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Spaţiul este $\mathcal{E}_f$-proiectiv.*
2. *Spaţiul este $\mathcal{E}_u$-proiectiv.*
3. *Spaţiul este spaţiu local convex liber peste o mulţime.*
4. *Spaţiul este isomorf cu $K^{(\mathcal{S})}$ pentru o careva mulţime $\mathcal{S}$.* $\uparrow$

5.5.3. Teoremă. *În categoria $\mathcal{CV}$ şi $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există o singură structură de factorizare şi anume $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ cu suficiente obiecte proiective.*

$\downarrow$ Fie E un spaţiu local convex şi $\mathcal{S}$ o bază algebrică a lui. Atunci aplicaţia canonică

$$p : K^{(\mathcal{S})} \longrightarrow E$$

este liniară continuă şi aparţine clasei $\mathcal{E}_u$. Astfel am arătat că categoria posedă suficiente obiecte $\mathcal{E}_u$-proiective.

Fie acum $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare cu suficiente obiecte proiective. Deoarece $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{P}$ toate obiectele $\mathcal{P}$-proiective sunt şi $\mathcal{E}_f$-proiective, deci sunt obiecte de forma $K^{(\mathcal{S})}$.

Existenţa suficientă a clasei de obiecte $\mathcal{P}$-proiective permite de demonstrat uşor (vezi Teorema 5.1.8) că clasa $\mathcal{P}$ este stabilă la stânga. Aşadar $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$. Să demonstrăm că şi $\mathcal{E}_u \subset \mathcal{P}$. Într-adevăr, fie $f : E \longrightarrow F \in \mathcal{E}_u$. Există atunci un morfism $p : K^{(\mathcal{S})} \longrightarrow F \in \mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd}
K^{(S)} \arrow[r, dashed, "t"] \arrow[dr, "p \in \mathcal{P}"'] & E \arrow[d, "f \in \mathcal{E}_u"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

Figura 5.5.3

Deoarece $K^{(\mathcal{S})}$ este şi $\mathcal{E}_u$-proiectiv, rezultă că

$$f \cdot t = p \tag{1}$$

pentru un morfism t. Din egalitatea scrisă rezultă că şi $f \in \mathcal{P}$.↑

5.5.4. Remarcă. *După cum vom vedea în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există o clasă proprie de structuri de factorizare cu suficiente obiecte injective.*

5.6. Obiecte injective în categoria spaţiilor local convexe

5.6.1. Rezultatele acestui paragraf sunt expuse în baza lucrării [Pl, 1971].

Se demonstrează că spaţiile Banach $B(M)$ ale funcţiilor mărginite definite pe mulţmea M sunt obiecte $\mathcal{M}_p$-injective în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar aceste obiecte şi produse de astfel de obiecte formează în această categorie suficiente obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.

Pentru o mulţme nevidă M de puterea α vom nota cu $B(M)$ sau $m(\alpha)$ spaţiul Banach al funcţiilor definite şi mărginite pe M:

$$f : M \longrightarrow K, \| f \| = sup_{x \in M} \mid f(x) \mid .$$

În acest caz $M \subset B'(M)$, unde $B'(M)$ este conjugatul spaţiului $B(M)$, stabilind $m(f) = f(m)$ pentru $m \in M$ şi $f \in B(M)$.

5.6.2. Lemă. *Fie X un spaţiu local convex, şi X' conjugatul său. Atunci orice operator continuu $f : X \longrightarrow B(M)$ defineşte o aplicaţie $\varphi_f : M \longrightarrow X'$ astfel încât familia de funcţionale*

$$\varphi_f(M) = \{m \cdot f \mid \quad m \in M\}$$

este equicontinuă.

↓ Operatorul $f : X \longrightarrow B(M)$ defineşte operatorul conjugat

$$f' : B'(M) \longrightarrow X'.$$

Notăm

$$\varphi_f = f' \cdot i,$$

unde $i : M \longrightarrow B'(M)$ este incluziunea canonică.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_f = f' \cdot i"'] & B'(M) \arrow[r, "f'"] & X' \end{tikzcd}$$

Figura 5.6.1

Atunci

$$f' \cdot i(m) \cdot (x) = m(f(x)) = f(x) \cdot (m).$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_f(m)"'] & & B(M) \arrow[dl, dashed, "m"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Figura 5.6.2

$\varphi_f(m) = \{m \cdot f \mid m \in M\}$ este o mulţime equicontinuă. Într-adevăr, fie $U_1 = \{h \in B(M) \mid \mid h \mid \leq 1\}$, iar $U = f^{-1}(U_1)$. Pentru orice $x \in U$, avem $\mid m \cdot f(x) \mid = \mid f(x) \cdot (m) \mid \leq 1$. Astfel $\varphi_f(M) \subset U^{\circ}$. $\uparrow$

5.6.3. Lemă. *Orice aplicaţie $\varphi : M \longrightarrow X'$, unde $\varphi(M)$ este o mulţime equicontinuă, defineşte un operator continuu $f : X \longrightarrow B(M)$.*

$\downarrow$ *Operatorul $f : X \longrightarrow B(M)$ se construieşte astfel $x \mapsto f(x) : M \longrightarrow K$ conform regulii*

$$f(x) \cdot m = \varphi_m(x). \quad \uparrow$$

5.6.4. Teoremă. *Pentru orice mulţime nevidă M spaţiul $B(M)$ este $\mathcal{M}_f$-injectiv în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

$\downarrow$ Trebuie de demonstrat, că pentru orice incluziune topologica $i : (E, t) \longrightarrow (F, u) \in \mathcal{M}_p$ şi pentru orice morfism $f : (E, t) \longrightarrow B(M)$ există un morfism $f_1 : (F, u) \longrightarrow B(M)$ astfel încât

$$f_1 \cdot i = f.$$

$$\begin{tikzcd}
(E,t) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & (F,u) \arrow[dl, dashed, "f_1"] \\
& B(M) &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.6.3

Fie U_1 sfera unitară în spaţiul $B(M)$, iar $V = f^{-1}(U_1)$. Există $W \in u$ astfel încât $W \cap E = V$. În virtutea Lemei 5.6.2 operatorul f defineşte aplicaţa $\varphi_f : M \longrightarrow E$, astfel încât $\varphi_f(M)$ este o mulţime equicontinuă de funcţionale.

Deoarece

$$f^{-1}(U_1) = \{e \in E \mid\mid f(e) \mid\leq 1\} \subset V \subset E$$

pentru orice $m \in M$ avem $\mid f(x) \cdot (m) \mid\leq 1$. Astfel

$$\varphi_f^{-1}(m)([-1;1]) = \{e \in E \mid\mid \varphi_f(m)(e) \mid\leq 1\} = \{e \in E \mid\mid f(e) \cdot (m) \mid\leq 1\} \supset V$$

pentru orice $m \in M$, sau

$$\bigcap_{m \in M} \varphi_f^{-1}(m)([-1;1]) \supset V.$$

Definitiv

$$\mid \varphi_f(m) \cdot (e) \mid\leq p_V(x)$$

pentru orice $m \in M$.

În virtutea Teoremei Hanh-Banach fiecare funcţional $\varphi_f(m) : E \longrightarrow K$ se extinde la un funcţional $\varphi'_f(m) : F \longrightarrow K$ astfel încât

$$\mid \varphi'_f(m)(y) \mid\leq \varphi_W(y)$$

pentru orice $m \in M$.

$$\begin{tikzcd}
(E,t) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi_f(m)"'] & & (F,u) \arrow[dl, dashed, "\varphi'_f(m)"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.6.4

Ultima relaţie indică faptul că familia $\{\varphi'_f(m) \mid m \in M\}$ este equicontinuă. Apelând la Lema 5.6.3 stabilim că există un funcţional continuu $f_1 : (F, u) \longrightarrow B(M)$ astfel încât

$$f_1 \cdot i = f. \tag{2}$$

Într-adevăr

$$f_1(x) \cdot (m) = \varphi'_f(m) \cdot (x) = \varphi_f(m) \cdot (x) = f(x) \cdot (m)$$

pentru orice $x \in E$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
(E,t) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_f(m)"'] & & (F,u) \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\varphi'_f(m)"] \\
& B(M) \arrow[d, "m"] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.6.5

5.6.5. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există suficiente obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.*

$\downarrow$ Fie (E, t) un spaţiu local convex, E' conjugatul lui, şi U o vecinătate închisă şi convexa a lui zero.

Examinăm polara mulţimii U

$$U^\circ = \{f \in E' \mid |f(U)| \leq 1\} \subset E'.$$

Atunci $B(U^\circ)$ este un spaţiu Banach $\mathcal{M}_p$-injectiv.

Deoarece

$$\cap\{f^{-1}([-1; 1]) \mid f \in U^\circ\} \supset U,$$

rezultă că U° este o mulţime eqicontinuă de funcţionale. Există deci un operator liniar şi continuu.

$$g_U : (E, t) \longrightarrow B(U^\circ)$$

astfel încât pentru orice $x \in E$

$$g_U(x)(f) = f(x). \tag{1}$$

Fie U_1 sfera unitară în spaţiul $B(U^\circ)$. Atunci

$$g_U^{-1}(U_1) = \{x \in E \mid g_U(x) \in U_1\} = \{x \in E \mid\mid g_U(x) \mid \leq 1\} =$$

$\{x \in E \mid\mid g_U(x)(f) \mid \leq 1, \text{ pentru } \forall f \in U^\circ\} = \{x \in E \mid \mid f(x) \mid \leq 1, \text{ pentru } \forall f \in U^\circ\} = \{x \in E \mid$ $\mid x(f) \mid \leq 1, \text{ pentru } \forall f \in U^\circ\} = U^{\circ\circ}$ sau $g_U^{-1}(U_1) = U^{\circ\circ} = U$.

Fie w^E morfismul de calcul $w^E : (E, t) \longrightarrow X$, definit de morfismele $\{g_U \mid U \in t\}$, iar $X = \sqcap\{B(V^\circ) \mid V \in t\}$.

$$\begin{tikzcd}
K^{(S)} \arrow[r, dashed, "t"] \arrow[dr, "p \in \mathcal{P}"'] & E \arrow[d, "f \in \mathcal{E}_u"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

Figura 5.6.6

Să demonstrăm că w^E este o incluziune topologică. Mulţimile $p_{U_1}^{-1}$ formează o bază a topologiei Tihonov în spaţiul X. Avem

$$E \cap p_U^{-1}(U_1) = (w^E)^{-1}(p_U^{-1}(U_1) = (p_U \cdot w^E)^{-1}(U_1) = g_U^{-1}(U_1) = U. \uparrow$$

5.6.6. Corolar. *1. Orice spaţiu local convex Hausdorff poate fi realizat ca subspaţiu al unui produs de spaţii Banach.*

2. Un spaţiu complet poate fi realizat ca subspaţiu închis ($\mathcal{M}_f$-subspaţiu) al unui produs de spaţii Banach.

5.7. Obiecte injective în categoria spaţiilor uniforme

5.7.1. Vom trece în revistă rezultatele principale referitor la obiectele injective în categoria $\mathcal{U}_2$ a spaţiilor uniforme Hausdorff (vezi [Is, 1964])

Se examinează obiectele injective în raport cu structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ - obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.

Teoremă. *Intervalul $I = [0, 1]$ este un obiect injectiv în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.* $\uparrow$

5.7.2. Fie $X, Y \in\mid U_2 \mid$, şi $U(X, Y)$ mulţimea aplicaţiilor uniform continui. Pentru orice anturaj V al spaţiului uniform Y se defineşte anturajul $V(U)$ a spaţiului $U(X, Y)$ conform regulii:

$$(f, g) \in V(U) \Leftrightarrow \forall x \in X(f(x), g(x))) \in \mathcal{V}.$$

5.7.3. Teoremă.*Fie M o mulţime discretă, şi Y un obiect injectiv. Atunci $U(M, Y)$ este un obiect injectiv.* $\uparrow$

5.7.4. Teoremă. *În categoria $\mathcal{U}_2$ există suficiente obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.* $\uparrow$

5.7.5. Teoremă. *Pentru orice spaţiu metric M spaţiul $U(M,Y)$ este injectiv.* $\uparrow$

5.7.6. Fie E un spaţiu local convex liber peste o mulţime. Atunci pe E există cea mai fină topologie local convexă. Dacă pe $\mathcal{H}om(E,K) = E'$ examinăm topologia slabă, atunci $E' \in \mid \Pi \mid$ şi deci este un spaţiu $\mathcal{M}_p$-injectiv. Pornind de la acest moment şi Teorema 5.7.3 formulăm:

Problemă. *Fie E un spaţiu local convex liber, iar X un obiect $\mathcal{M}_p$-injectiv în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru care topologii local convexe pe $\mathcal{H}om(E,X)$ acest spaţiu devine $\mathcal{M}_p$-injectiv?*

5.8. Specificul structurii de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$

Acest paragraf este expus conform lucrării [B, 1979].

5.8.1. Revenim iarăşi la structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. În raport cu o structură de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ examinăm următoarele condiţii:

A. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există suficiente obiecte $\mathcal{P}$-proiective şi suficiente obiecte $\mathcal{I}$-injective.*

B. *$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ este o structură de factorizare cu ambele clase complete la stânga şi la dreapta.*

C. *$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ este cu ambele clase stabile la stânga şi la dreapta.*

D. *Structura $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ are clasa de proiecţii stabilă la stânga şi $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$.*

E. *Structura $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ are clasa de proiecţii $\mathcal{M}_u$-ereditară.*

5.8.2. Exerciţiu. Sunt adevărate implicaţiile:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E.$$

5.8.3. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ perechea $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ este unica structură de factorizare care verifică condiţia D.*

$\downarrow$ Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare ce verifică condiţia D şi o să arătăm că $\mathcal{P} = \mathcal{E}_u$. În primul rând, odată ce clasa $\mathcal{P}$ este stabilă la stânga, reiese, că $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$.

Să verificăm, că $\mathcal{E}_u \subset \mathcal{P}$. Fie $f : X \to Y \in \mathcal{E}_u$. Spaţiul Y ca orice spaţiu local convex este un subspaţiu al unui produs de spaţii Banach, adică al unui spaţiu Z cu topologia Mackey.

Fie $m : Y \to Z$ incluziunea canonică, iar T spaţiul vectorial Z cu cea mai fină topologie local convexă cu aplicaţia identică $e : T \to Z$. Ca aplicaţie într-un spaţiu cu topologie Mackey $e \in \mathcal{E}_p$. În virtutea ipotezei $e \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$. Fie

$$e \cdot m' = m \cdot e' \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele m şi e.

Atunci $m' \in \mathcal{M}_p$. Deci P ca subspaţiu al spaţiului T este de asemenea cu cea mai fină topologie local convexă. Aşadar P este obiect $\mathcal{E}_u$-proiectiv. Mai departe, $e \in \mathcal{P}$, şi în virtutea ipotezei $e' \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$. Aşadar

$$e^{'} = f \cdot g \tag{2}$$

pentru un careva g. Din egalitatea (2) şi faptul că $e^{'} \in \mathcal{P}$, rezultă, că $f \in \mathcal{P}$. Am demonstrat că $\mathcal{E}_u \subset \mathcal{P}$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, dashed, "m' \in \mathcal{M}_p"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, dashed, "e' \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u"] & T \arrow[d, dashed, "e \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}"] \\
X \arrow[r, "f \in \mathcal{E}_u"] & Y \arrow[r, "m \in \mathcal{M}_p"] & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 5.8.1

5.8.4. Remarcă. *1. Condiţia D constă din două părţi:*

a) Clasa de proiecţii $\mathcal{P}$ este stabilă la stânga.

b) $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$.

Condiţia b) nu rezultă din condiţia a): structura de factoprizare $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ verifică condiţia a), dar nu şi condiţia b).

2. Din condiţia E nu reiese condiţia D.

5.8.5. Exerciţiu. *Structurile de factorizare $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f), (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_f)$ şi $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ posedă următoarele proprietăţi¿*

A. Clasa de proiecţii este $\mathcal{M}_u$-ereditară.

B. Clasa de injecţii este completă la dreapta.

5.8.6. Problemă. *Există oare şi alte structuri de factorizare ce posedă proprietăţile A şi B menţionate în p.5.8.1?*

5.8.7. Problemă. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare cu proprietăţile:*

A. $\mathcal{E}_u \subset \mathcal{E}$.

B. Clasa $\mathcal{M}$ este stabilă la dreapta.

Este adevărat, oare că $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ şi $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ sunt unicele structuri de factorizare cu aceste proprietăţi?

Capitolul 6. Subcategorii reflective şi structuri de factorizare

6.1. Subcategorii reflective şi coreflective

6.1.1. Noţiunea de subcategorie reflectivă (coreflectivă) a fost introdusă în p. 4.1.3. Menţionăm, dacă $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ sau $\mathcal{T}$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$, atunci $l : \mathcal{C} \to \mathcal{L}, r : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$ sau $t : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$, şi $l^X : X \to lX, r^X : X \to rX$ sau $t^X : X \to tX$ înseamnă replica respectivă a obiectului X.

6.1.2. Remarcă. *Subcategoriile reflective se consideră, în genere, saturate, adică conţin împreună cu fiecare obiect şi toate obiectele izomorfe cu el.*

6.1.3. Exemple. *1. Fie că categoria $\mathcal{C}$ posedă obiectul final T. Atunci subcategoria $\mathcal{T}$ a obiectului final este cea mai mică, şi însăşi categoria $\mathcal{C}$ este cea mai mare subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$.*

2. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$, şi T obiectul final al categoriei $\mathcal{C}$. Atunci $T \in \mid \mathcal{R} \mid$.

3. Obiectul final al unei subcategorii reflective este şi obiect final al întregii categorii.

6.1.4. Lemă.*Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{R}$-replica oricărui obiect din $\mathcal{R}$ este un iso.

2. Fie că $A \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $t : A \longrightarrow X$ este o retracţie. Atunci $X \in \mid \mathcal{R} \mid$.

3. Fie că $A \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $s : X \longrightarrow A$ este o secţiune. Atunci $X \in \mid \mathcal{R} \mid$.

4. Subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu produsele. În particular, dacă categoria $\mathcal{C}$ posedă obiect final T, atunci $T \in \mid \mathcal{R} \mid$. $\uparrow$

6.1.5 Exerciţiu. *Fie $\mathcal{L}$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$ astfel încât functorul incluziunii $i : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{C}$ posedă adjunctul de stânga (functorul liber) $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}$. Mai departe, fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{L}$ cu functorii respectivi: r şi i_1.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "l"] & \mathcal{L} \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r, shift left, "r"] & \mathcal{R} \arrow[l, shift left, "i_1"] \end{tikzcd}$$

Figura 6.1.1

Atunci functorul incluziunii $i \cdot i_1 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ posedă adjunctul de stânga $r \cdot l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R}$.

Fie X un obiect al categoriei $\mathcal{C}$. Atunci obiectul liber pentru X este perechea $(rlX, r^{lX} \cdot l^X)$.

$$X \xrightarrow{l^X} lX, \quad lX \xrightarrow{r^{lX}} rlX.$$

$$X \xrightarrow{l^X} lX \xrightarrow{r^{lX}} rlX$$

Figura 6.1.2

6.1.6. Teoremă. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută cu produsele.*

2.Functorul de completare $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_0$ comută cu produsele.

$\downarrow$ Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), t_i : X_i \to Y_i, i \in \mathcal{I}$. $\mathcal{R}$-replicele obiectelor X_i şi $t = \Pi t_i$. Vom demonstra că t este $\mathcal{R}$-replica obiectului X. Observăm că $Y \in |\mathcal{R}|$. Fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui $X, p_i : X \to X_i$ şi $q_i : Y \to Y_i, i \in \mathcal{I}$, proiecţiile canonice. Atunci

$$t_i \cdot p_i = q_i \cdot t, i \in \mathcal{I}, \tag{1}$$

$$t = f \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un morfism f. Deoarece $t_i \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că $t \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Astfel în egalitatea (2) $t, r^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deci şi $f \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.

$$\begin{tikzcd}
& & rX \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "l"] & \\
X \arrow[urr, "r^X"] \arrow[rrr, "t"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "p_i"'] & & & Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, "q_i"] \\
& X' \arrow[r, "t'"] & Y' & \\
X_i \arrow[rrr, "t_i"] & & & Y_i
\end{tikzcd}$$

Figura 6.1.3

Să demonstrăm, că f este un izomorfism. Fie G o vecinătate a lui zero în rX. Atunci există o vecinătate a lui zero în U, astfel încât $U + U + U \subset G$. Fie $V = (r^X)^{-1}(U)$. Deoarece V este o vecinătate a lui zero în $X = \Pi\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, există o mulţime finită $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ şi vecinătăţile lui zero $V_i, i \in \mathcal{J}$, astfel încât $\Pi\{V_i \mid i \in \mathcal{J}\} \times X'' \subset V$, unde $X'' = \Pi\{X_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}\}$. Fie $t' : X' \to Y' = \Pi\{t_i \mid i \in \mathcal{J}\}, t'' : X'' \to Y'' = \Pi\{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}\}$. Atunci $X = X' \oplus X'', Y = Y' \oplus Y''$. Dacă $p : X \to X'$ şi $q : Y \to Y'$ sunt proiecţiile canonice, atunci

$$t' \cdot p = q \cdot t. \tag{3}$$

Deoarece functorul reflector comută cu limitele inductive, concludem, că t' este $\mathcal{R}$-replica obiectului X', avem $X = r(X' \oplus X'') = rX' \oplus rX'' = Y' \oplus rX''$. Fie $l : rX \to Y'$ proiecţia canonică. Atunci

$$l \cdot r^X = t' \cdot p. \tag{4}$$

Ulterior, l fiind o proiecţie, este o aplicaţie deschisă. Deci $l(\mathcal{U})$ este o vecinătate a lui zero în Y'. O să demonstrăm că $f(G) \supset q^{-1}l(U)$ şi deci f este o aplicaţie deschisă. Într-adevăr, fie $(y'', y'') \in q^{-1}l(U)$, unde $y' \in Y'$, iar $y'' \in Y''$. Deoarece $y' \in l(U)$, există un punct $z \in rX$, astfel încât $(y', z) \in U$. Ţinând cont că f este o bijecţie, din relaţia $V \supset \Pi\{U_i \mid i \in \mathcal{J}\} \times X''$, deducem că $\{0\} \times rX'' \subset U$. În particular, $(0, -z) \in U$ şi $l^{-1}(0; y) \in \mathcal{U}$. Avem:

$$f^{-1}(y', y'') = f^{-1}(y', 0) + f^{-1}(0; y'') = (y', 0) + f^{-1}(0, y'') =$$

$$= (y', z) - (0, z) + f^{-1}(0, y'') \in U + U + U \subset G.$$

Astfel am demonstrat că f este un izomorfism.

2. Să revenim la diagrama precedentă. Fie t_i Γ_0-replicile obiectelor $X_i, i \in \mathcal{J}$. Atunci $t \in \mathcal{M}_p$ şi $t \in \mathcal{E}pi$ (Propoziţia 1.2.14). Avem $t \in \mathcal{E}pi$ şi deoarece clasa $\mathcal{M}_p$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, $t \in \mathcal{M}_p$. Astfel rX că spaţiu complet este un subspaţiu dens al spaţiului Y. Deci $f \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

6.1.7. Teoremă. *Fie $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ un functor reflector exact la stânga, unde $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ sau $\mathcal{R} = \Gamma_0$. Atunci functorul $i \cdot r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ comută cu limitele proiective:*

$$ir \lim_{\leftarrow}\{\mathcal{S}_{\alpha\beta} \mid f_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta\} = \lim_{\leftarrow}\{ir\mathcal{S}_{\alpha\beta} \mid ir(f_{\alpha\beta}) : X_\alpha \to ir\ X_\beta\}$$

$\downarrow$ În baza Teoremei 6.1.6 functorul $i \cdot r$ comută cu produsele. Un functor exact la stânga ce comută cu produsele, comută cu limitele proiective. $\uparrow$

6.1.8. Remarcă. *1. În categoria spaţiilor uniforme $\mathcal{U}$, deci şi în categoria spaţiilor uniforme Hausdorff $\mathcal{U}_2$, functorul de completare $X \mapsto \hat{X}$ comută cu produsele.*

2. Nu este clar dacă orice functor coreflector în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ comută cu sumele (vezi 10.1).

3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ dacă orice functor de completare comută cu produsele, atunci orice functor reflector comută cu produsele.

Notaţii. *Fie $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}ono$ (respectiv: $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$) şi $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{S}_\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (respectiv: $\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{A})$) este subcategoria plină a tuturor $\mathcal{M}$-subobiectelor (respectiv: $\mathcal{E}$-factorobiectelor) obiectelor din $\mathcal{A}$.*

Fie $\mathcal{B}$ o clasă de bimorfisme ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci

Sub *clasa subcategoriilor categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$$\begin{array}{lll}\mathbb{A}^s(\mathcal{B}) = \{\mathcal{A} \in \textbf{Sub} \mid \mathcal{A} = \mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{A})\}. & \mathbb{K}^s(\mathcal{B}) = \mathbb{A}^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{K}. & \mathbb{R}^s(\mathcal{B}) = \mathbb{A}^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{R}. \\ \mathbb{A}_f(\mathcal{B}) = \{\mathbb{A} \in \textbf{Sub} | \mathcal{A} = \mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{A})\}. & \mathbb{K}_f(\mathcal{B}) = \mathbb{A}_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{K}. & \mathbb{R}_f(\mathcal{B}) = \mathbb{A}_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{R}. \\ \mathbb{A}^s_f(\mathcal{B}) = \mathbb{A}^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{A}_f(\mathcal{B}). & \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B}) = \mathbb{A}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{K}. & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) = \mathbb{A}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{R}.\end{array}$$

Cel mai des o să fie $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$ sau $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$ cu $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$.

Definiţie. *Fie $\mathcal{B}$ o clasă de bimorfisme. Elementele clasei $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$ (respectiv: $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$) se numesc subcategorii $\mathcal{B}$-semicoreflexive (respectiv: $\mathcal{B}$-semireflexive).*

Exemple. *1. Toate clasele enumerate mai sus conţin elementul $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi sunt închise în raport cu intersecţiile.*

2. Fie $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ două clase de bimorfisme şi $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Atunci:

$$\begin{array}{lll}\mathbb{A}^s(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{A}^s(\mathcal{B}_1). & \mathbb{A}^s_f(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{A}^s_f(\mathcal{B}_1). & \mathbb{A}_f(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{A}_f(\mathcal{B}_1). \\ \mathbb{R}_f(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{R}_f(\mathcal{B}_1) & \mathbb{R}^s(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{R}^s(\mathcal{B}_1). & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}_2) \subset \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}_1).\end{array}$$

3. Pentru elementul $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}$ avem $\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{I}so$. Deci

$$\mathbb{R}^s(\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{K}^s(\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{K}_f(\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{K}^s(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{K}.$$

4. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Atunci $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u \subset \mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

5. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. De asemenea $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Astfel clasa $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ întotdeauna posedă cel mai mic element Π şi cel mai mare element $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

6. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{L})$. Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deoarece $\Pi \subset \tilde{\mathcal{M}}$, rezultă că $\Pi \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

7. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ şi $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Dacă $\mathcal{R}_1$ sau $\mathcal{R}_2$ este $\mathcal{K}$-semireflexivă sau $\mathcal{L}$-semireflexivă, atunci despre a doua subcategorie nu putem spune, în genere, nimic.

8. - $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K}) \Rightarrow k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}) \Rightarrow l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

9. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{K}, \mathcal{P} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ Astfel $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}), \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}), \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$$\begin{array}{ll}- \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}), & - \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), \\ - \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}), & - \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K}) \subset \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{P}), etc.\end{array}$$

10. - $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

- Dacă $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

- Dacă $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$, atunci $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. Deci $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

- Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

- Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Astfel clasele $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sunt diferite pentru $\mathcal{L} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

6.1.9. Teoremă. *Fie că subcategoria coreflectivă $\mathcal{K}$ este închisă în raport cu produsele. Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ comută cu produsele.

2. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \subset \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$, adică $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \subset \mathbb{R}$ şi $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$ este închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-factorobiecte.

3. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}$ şi $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, atunci $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, adică $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$ este închisă şi în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte: $(\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K}))$. Astfel $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

În particular, functorii coreflectori $t_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}on$ şi $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ comută cu produsele, unde $\mathcal{T}on$ este subcategoria spaţiilor tonelate ([Gr., 1973], Ch.3, §4, Exercise 1.b) *şi $\tilde{\mathcal{M}}$ este subcategoria spaţiilor cu topologie Mackey* ([R, R, 1964], cap. V).

Subcategoria $\mathcal{T}on$ şi orice subcategorie coreflectivă $\mathcal{K}$, dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, sunt închise în raport cu extensiile (vezi [R, R, 1964], *cap. IV, Propoziţia 7). Astfel pentru orice $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ $g(\mathcal{T}on) \subset \mathcal{T}on$ şi $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.*

$\downarrow$ 1. Fie $t_i : kA_i \to A_i, i \in \mathcal{J}$, $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor $A_i, A = \Pi A_i, P = \Pi kA_i$ şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Avem următoarea diagramă comutativă:

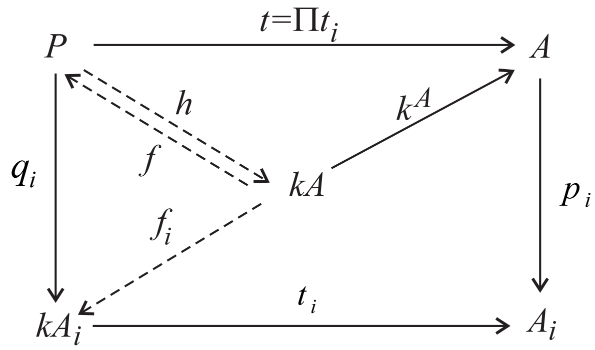


Figura 6.1.4

$$t_i \cdot q_i = p_i \cdot t, \quad i \in \mathcal{J}, \tag{1}$$

$$p_i \cdot k^A = t_i \cdot f_i, i \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

$$f_i = q_i \cdot f, i \in \mathcal{J}, \tag{3}$$

şi deoarece $P \in |\mathcal{K}|$ avem pentru un h

$$t = k^A \cdot h. \tag{4}$$

Astfel

$$p_i \cdot t \cdot f = ((\text{din } (1)) = t_i \cdot q_i \cdot f = (\text{din } (3)) = t_i \cdot f_i = ((\text{din } (2)) = p_i \cdot k^A, i \in \mathcal{J}.$$

i.e.

$$p_i \cdot t \cdot f = p_i \cdot k^A, i \in \mathcal{J},$$

sau

$$t \cdot f = k^A. \tag{5}$$

Aşadar,

$$k^A \cdot h \cdot f = ((\text{din } (4)) = t \cdot f = ((\text{din } (5)) = k^A,$$

i.e.

$$k^A \cdot h \cdot f = k^A,$$

sau

$$h \cdot f = 1. \tag{6}$$

Deci $f = h^{-1}$.

2. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, fie subcategoria $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$ este închisă în raport cu produsele şi $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $X_i \in |\mathcal{R}|, i \in \mathcal{J}$. Există $A_i \in \Gamma$ şi $b_i : A_i \to X_i \in \mu\mathcal{K}, i \in \mathcal{J}$.

Dacă $t_i : kA_i \to A_i$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui A_i, atunci $b_i \cdot t_i$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui $X_i, i \in \mathcal{J}$. Fie $b = \Pi b_i : A \to X$ şi $t = \Pi t_i : P \to A, i \in \mathcal{J}$. Atunci $P = |\mathcal{K}|$ şi $b \cdot t$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X. Deoarece $b \in \mathcal{M}ono$, rezultă că $b \in \mu\mathcal{K}$ şi $A \in |\Gamma|$. Deci $\Pi X_i \in |\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "t=\Pi t_i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "b=\Pi b_i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
kA_i \arrow[r, "t_i"] & A_i \arrow[r, "b_i"] & X_i
\end{tikzcd}$$

Figura 6.1.5

Astfel subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu produsele. Să verificăm că $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $Y \in |\mathcal{R}|$ şi $m : X \to Y \in \mathcal{M}_f$.

Există $A \in |\Gamma|$ şi $b : A \to Y \in \mu\mathcal{K}$. Fie

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & A \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 6.1.6

$$m \cdot b' = b \cdot m' \tag{7}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele b şi m.

Atunci $m' \in \mathcal{M}_f$ şi deci $P \in |\Gamma|$, iar $b' \in \mu\mathcal{K}$ şi $X \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$. Evident.

3. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. Fie $Y \in |\mathcal{R}|$ şi $b : X \to Y \in \mu\mathcal{K}$. Există $A \in |\Gamma|$ şi $b_1 : A \to Y \in \mu\mathcal{K}$. Atunci

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "b"] \\ kY{=}kA \arrow[urr, dashed, "f"] \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "b_1"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 6.1.7

$b_1 \cdot k^A$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui Y şi

$$b_1 \cdot k^A = b \cdot f \tag{8}$$

pentru un f. Condiţia $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ este echivalentă cu condiţia $k(\Gamma) \subset \Gamma$ (Teorema 10.2.1 p.1). Astfel $kA \in |\Gamma|$ şi $f \in \mu\mathcal{K}$. Deci $X \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

Exemple. *1. Subcategoria $q\mathcal{T}on$ a spaţiilor quasi-tonelate (quasi-barrelled = infra-barrelled) este o subcategorie coreflectivă şi este închisă în raport cu produsele* ([J, 1981], 11.3 Proposition 1).

2. Un spaţiu se numeşte bornologic (ultra-bormologic) dacă este limita inductivă de spaţii normate (complete).

Următoarele afirmaţii sunt echivalente ([J, 1981], 13.5 Teorema 3):

(1) K^I este spaţiu bormologic pentru orice mulţime I.

(2) Subcategoria $\mathcal{B}or$ ($u\mathcal{B}or$) a spaţiilor bormologice (ultrabormologice) este închisă în raport cu produsele.

Notaţii. *Fie $\mathbb{K}_p$ (respectiv: $\mathbb{R}_s$) clasa subcategoriilor nenule coreflective (respectiv: reflective) închise în raport cu produsele (respectiv: sumele).*

Astfel $\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{T}on, \mathcal{B}or, q\mathcal{B}or \in \mathbb{K}_p$.

Clasa $\mathbb{B}ir$ a subcategoriilor bicoreflective [W, 1984] *aparţine ambelor clase $\mathbb{K}_p$ şi $\mathbb{R}_s$.*

Propoziţie. *Fie $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{R}$ două subcategorii dual izomorfe.*

1. $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_p \Longleftrightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}_s$.

2. Subcategoria $\mathcal{T}on$ este dual izomorfă cu subcategoria $s\mathcal{R}$ a spaţiilor semireflexive [Sch, 1966]. *Deoarece $\mathcal{T}on \in \mathbb{K}_p$, rezultă că $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}_s$.*

6.1.9*. Teoremă. *Fie că subcategoria relfectivă $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu sumele. Atunci functorul reflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ comută cu sumele.* $\uparrow$

Corolar. *1. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}on}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T}on)$ pentru orice $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.*

2. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ pentru $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

$\downarrow$ 1. Subcategoria spaţiilor tonelate $\mathcal{T}on$ este închisă în raport cu produsele şi în raport cu extensiile: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-factorobiecte.

2. $\mathcal{T}on \subset \tilde{\mathcal{M}}$ ([R, R, 1964], cap. 4, propoziţia 1, Corolar 2). Deci $\varepsilon\mathcal{S} = \mu\tilde{\mathcal{M}} \subset \mu\mathcal{T}on$. $\uparrow$

Probleme. *1. Fie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{K}, \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_2, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $t_1(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $t_2(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. În ce condiţii $t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$?*

2. Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$ şi $r_1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ şi $r_2(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. În ce condiţii $r(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$?

6.1.10. Propoziţie. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategore reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$.*

1. Dacă $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ este o structură de factorizare (de dreapta), atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{E}$-reflectivă.

2. Dacă $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ este o structură de factorizare de stânga, atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ este o subcategorie slab reflectivă.

3. Dacă $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ este o structură de factorizare de stânga, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_u$, $\mathcal{R}$ este $\mathcal{E}pi$-reflectivă şi $\mathcal{C}$ posedă pătrate cocarteziene, atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{E}pi$-reflectivă.

$\downarrow$ 1. Fie $X \in \mid \mathcal{C} \mid$, $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X, iar

$$r^X = m^X \cdot e^X \tag{1}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea lui r^X. Atunci e^X este $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$-replica lui X.

2. Factorizarea (1) ne conduce la $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$-replica slabă a lui X.

3. În virtutea Teoremei 2.6.2 $e^X \in \mathcal{E}pi$. $\uparrow$

6.1.11. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{M}_u(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_u$.*

2. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. Atunci $\mathcal{M}_u(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{M}_u$.

6.1.12. Probleme. *De descris clasa $\mathcal{M}_u(\mathcal{K})$ pentru orice subcategorie coreflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

2. Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ şi $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$. În ce situaţii între $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ există o subcategorie reflectivă?

3. Care functori coreflectori în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ comută cu sumele (vezi 10.1)?

6.2. Subcategorii $\mathcal{P}$-reflective şi subcategorii $\mathcal{I}$-coreflective

6.2.1. Definiţie. *Fie $\mathcal{A}$ o clasă de morfisme a categoriei $\mathcal{C}$. Subcatgoria reflectivă $\mathcal{R}$ se numeşte $\mathcal{A}$-reflectivă dacă $\mathcal{R}$-replica oricărui obiect X al categriei $\mathcal{C}$ aparţine clasei $\mathcal{A}$.*

$$\forall X \in \mid \mathcal{C} \mid \mapsto r^X \in \mathcal{A}.$$

d^* : Subcategorie $\mathcal{A}$-coreflectivă.

Subcategoriile $\mathcal{E}pi$-reflective ($\mathcal{M}ono$-reflective) se mai notează epirelective (monoreflective) şi respectiv pentru subcategorii coreflective.

6.2.2. Lemă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}$, iar $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R}$ este $\mathcal{P}$-reflectivă.

2. $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{I}$-subobiecte. $\uparrow$

6.2.3. Corolar. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta, iar $\mathcal{R}$ o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă. Atunci subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu limite proiective.*

$\downarrow$ Într-adevăr, subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu produsele şi $\mathcal{E}_q$-subobiecte şi $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{I}$. $\uparrow$

6.2.4. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}$, care este completă la stânga şi $\mathcal{P}$-colocal mică. Pentru o subcategorie plină $\mathcal{R}$ a categoriei $\mathcal{C}$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R}$ este $\mathcal{P}$-reflectivă.

2. $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu produse şi $\mathcal{I}$-subobiecte. $\uparrow$

6.2.5. Popoziţie. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie monoreflectivă a categoriei $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{R}$ este $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-reflectivă.*

$\downarrow$ Să demonstrăm că $\mathcal{R}$ este epireflectivă. Fie X un obiect al categoriei $\mathcal{C}$, $r^X : X \longrightarrow rX$ replica lui, iar

$$f \cdot r^X = g \cdot r^X \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r^X"] & rX \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "r^Y"] & rY \end{tikzcd}$$

Figura 6.2.1

Avem

$$r^Y \cdot f \cdot r^X = r^Y \cdot g \cdot r^X \tag{2}$$

şi din definiţia replicii obţinem că

$$r^Y \cdot f = r^Y \cdot g. \tag{3}$$

Deoarece r^Y este un *mono* din (3), rezultă că $f = g$.

Să demonstrăm acum că $r^X \in \mathcal{M}_u$. Fie

$$f' \cdot r^X = g \cdot f \tag{4}$$

un pătrat cocartezian

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r^X"] \arrow[d, "f"'] & rX \arrow[d, dashed, "f'"] \arrow[ddl, dashed, bend left=60, "h"] \\ Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "r^Y"'] & P \arrow[dl, dashed, "t"] \\ rY & \end{tikzcd}$$

Figura 6.2.2

Trebuie să demonstrăm că g este un *mono*. Conform definiţiei replicii avem

$$r^Y \cdot f = h \cdot r^X \tag{5}$$

pentru un morfism h. Ţinând cont că (4) este un pătrat cocartezian avem

$$r^Y = t \cdot g, \tag{6}$$

$$h = t \cdot f'. \tag{7}$$

Din egalitatea (6), deoarece r^Y este un *mono*, deducem că g este la fel. $\uparrow$

6.2.6. Exerciţiu. *Fie A un cogenerator al categoriei $\mathcal{C}$, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$ şi $A \in \mid \mathcal{R} \mid$. Atunci subcategoria $\mathcal{R}$ este monoreflectivă.*

6.2.7. Corolar. *1. Orice subcategorie reflectivă nenulă a categorei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-reflectivă.*

2. Orice subcategorie coreflectivă nenulă a categorei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono)$-coreflectivă.$\uparrow$

6.2.8. Exerciţiu. *Fie $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ două subcategorii reflective ale categorei $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$ şi subcategoria $\mathcal{R}_1$ este monoreflectivă. Atunci şi $\mathcal{R}_2$ este la fel.*

6.2.9. Corolar. *În categoria spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h$ o subcategorie reflectivă $\mathcal{R}$ este monoreflectivă atunci şi numai atunci, când ea conţine subcategoria spaţiilor compacte: $Comp_2 \subset \mathcal{R}$.*

6.2.10. Remarcă. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă, care nu-i epireflectivă, a unei categorii abeliene $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{O} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ şi $\mathcal{O}$ este o subcategorie epireflectivă, şi $\mathcal{R}$ nu este astfel.*

6.2.11. Notaţii. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Atunci:*

1. $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}(\mathcal{C})$ este clasa subcategoriilor reflective.

2. $\mathbb{K}$ sau $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ este clasa subcategoriilor coreflective.

3. $\mathcal{S}_{kr}$ este clasa subcategoriilor ce sunt coreflective şi reflective (vezi [W, 1974]).

4. Fie $\mathcal{A}$ o clasă de morfisme. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{A})$ (reflectiv $\mathbb{K}(\mathcal{A})$) este clasa subcategoriilor $\mathcal{A}$-reflective (respectiv: $\mathcal{A}$-coreflective).

5. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, iar $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$. Atunci

$$\mathbb{R}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R} \subset \mathcal{L}\}, \quad \mathbb{K}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{T}\},$$

6. În cazul categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasele $\mathbb{R}, \mathbb{K}, \mathbb{R}(\mathcal{L})$ şi $\mathbb{K}(\mathcal{T})$ nu conţin subcategoria nulă.

6.2.12. Fie $\mathcal{C}$ una din categoriile $\mathcal{U}_2$ sau $\mathcal{T}h$, $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ functorul liber, $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$, iar $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{S}_\mathcal{I}(\mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă a categoriei $\mathcal{C}$. Să examinăm o modalitate ce permite de a construi $\mathcal{S}_\mathcal{I}(\mathcal{R})$-replica unui obiect al categoriei $\mathcal{C}$.

Fie $X \in \mid \mathcal{C} \mid$, $f^X : X \to fX$ obiectul liber, $r^{fX} : fX \to rfX$ $\mathcal{R}$-replica lui fX, iar

$$r^{fX} \cdot f^X = i^X \cdot \tilde{r}^X \tag{1}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului respectiv.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f^X"] \arrow[d, dashed, "\tilde{r}^X"'] & fX \arrow[d, dashed, "r^{fX}"] \\
\tilde{r}X \arrow[r, dashed, "i^X"] & rfX
\end{tikzcd}$$

Figura 6.2.3

6.2.13. Teoremă. *$(\tilde{r}^X, \tilde{r}X)$ este $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$-replica obiectului X.* $\uparrow$

6.2.14. Problemă. *Fie $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ două subcategorii reflective al categorei $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ şi subcategoria $\mathcal{R}_1$ este epireflectivă. Când subcategoria $\mathcal{R}_2$ este epireflectivă?*

6.2.15. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Pentru $A \in \mid \mathcal{R} \mid$ fie $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica lui kA. Atunci

$$k^A = t^A \cdot r^{kA}$$

pentru un t^A.

Dacă $B \in \mid \mathcal{K} \mid, r^B : B \to rB$ $\mathcal{R}$-replica lui B, iar $k^{rB} : krB \to rB$ $\mathcal{K}$-coreplica lui rB, atunci

$$r^B = k^{rB} \cdot h^B \tag{2}$$

pentru un h^B.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "r^{kA}"] \arrow[rr, bend left, "k^A"] & rkA \arrow[r, "t^A"] & A & B \arrow[r, "h^A"] \arrow[rr, bend left, "r^B"] & krB \arrow[r, "k^{rB}"] & rB
\end{tikzcd}$$

Figura 6.2.4

Notaţii. *Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie $r(\mathcal{A})$ (respectiv: $k(\mathcal{A})$) subcategoria plină a tuturor obiectelor izomorfe cu un obiect de forma rX cu $X \in \mid \mathcal{A} \mid$ (respectiv: cu kY cu $Y \in \mid \mathcal{A} \mid$).*

Exerciţii. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $r(\mathcal{K})$ este o subcategorie slab reflectivă a categoriei $\mathcal{R}$.

1^*. *$k(\mathcal{R})$ este o subcategorie slab coreflectivă a categoriei $\mathcal{K}$.*

2. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, atunci $r(\mathcal{K})$ este o subcategorie coreflectivă a categoriei $\mathcal{R}$, iar t^A este $r(\mathcal{K})$-coreplica lui A (vezi 9.2.13).

2^*. *Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_u)$, atunci $k(\mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{R}$, iar h^B este $k(\mathcal{R})$-replica lui B.*

Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci:

3. $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(r(\mathcal{K}))$ este o subcategorie $\mathcal{I}$-coreflectivă a categoriei $\mathcal{R}$.

3^*. *$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(k(\mathcal{R}))$ este o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă a categoriei $\mathcal{K}$.*

4. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, atunci $r(\Sigma)$ este cea mai mică subcategorie coreflectivă (nenulă) a categoriei $\mathcal{R}$.

4^* *Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_u)$, atunci $\Pi \subset \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi Π este cea mai mică subcategorie reflectivă (nenulă) a categoriei $\mathcal{K}$).*

5. $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(r(\Sigma))$ este cea mai mică subcategorie coreflectivă (nenulă) a categoriei $\mathcal{R}$.

5^*. *$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_f}(k(\Pi))$ este cea mai mică subcategoriei reflectivă (nenulă) a categoriei $\mathcal{K}$.*

6.2.16. Definiţie. *Un functor $f : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ se numeşte x-functor, dacă pentru orice obiect (E, t) functorul f lasă spaţiul vectorial neschimbat, doar topologia o modifică în una mai fină: $f(E, u) = (E, f(u))$.*

6.2.17. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Pentru un obiect $X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ fie $r^X : X \to rX$, iar $k^{rX} : krX \to rX$ $\mathcal{R}$-replica şi $\mathcal{K}$-coreplica obiectelor respecrive, şi

$$k^{rX} \cdot u^X = r^X \cdot t^X \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele r^X şi k^{rX}, unde $t^X : tX \to X$. Atunci corespondenta $X \longmapsto tX$ defineşte un x-functor, numit x-functor generat de perechea de subcategorii $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$.

6.2.18. Remarcă. *Nu orice x-functor generat de o pereche de subcategorii este un functor coreflector.*

6.2.19. Exemplu. *Fiecărui spaţiu local convex (E, t) îi punem în corespondenţă β - topologia - topologia convergentei uniforme pe toate mulţimile $\sigma(E', E)$-mărginite. Obţinem spaţiul $E_\beta = (E, \beta(E', E))$. Orice operator continuu $f : (E, t) \to (F, u)$ rămâne continuu, dacă înzestrăm spaţiile respective cu β-topologii $\beta(f) : E_\beta \to F_\beta$* ([Gr, 1973],*Cap. 2, §16, Corollary 3 a). Menţionăm, că functorul $\beta : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ nu este un functor coreflector* ([R, R, 1964], *Anexa la Cap. V).*

6.2.20. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. Dacă $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă, atunci $(\mathcal{P} \cap \mathcal{R}, \mathcal{I} \cap \mathcal{R}) \in \mathbb{B}(\mathcal{R})$.*

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$. Atunci $(\mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) \cap \mathcal{R}, \mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) \cap \mathcal{R}) = (\mathcal{E}pi(\mathcal{R}), \mathcal{M}_f(\mathcal{R})) \in \mathbb{B}(\mathcal{R})$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. Pentru $f : A \to B \in \mathcal{R}$ fie

$$f = m \cdot p \tag{1}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea lui f. Atunci

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, dashed, "p"'] & & B \\
& & \\
X \arrow[uurr, dashed, "m"] \arrow[rr, dashed, "r^X"] & & rX \arrow[uu, dashed, "m_1"']
\end{tikzcd}$$

Figura 6.2.5

$$m = m_1 \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un m_1.

Fie clasa $\mathcal{I}$ $\varepsilon\mathcal{R}$-coereditară, iar $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) = ((\mathcal{I} \cap \mathcal{R})^{\urcorner}, (\mathcal{I} \cap \mathcal{R})$. Atunci

- $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) \in \mathbb{B}(\mathcal{R})$.
- $\mathcal{P}_1 = \{A \xrightarrow{p} X \xrightarrow{r^X} rX, r^X \cdot p \mid A \in \mid \mathcal{R} \mid, p \in \mathcal{P}\}$.
- $f = m_1 \cdot (r^X \cdot p)$ *este* $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1)$*-factorizarea lui* f.

4. Atfel pentru structura de factorizare $(\mathcal{E}_u(\mathcal{R}), \mathcal{M}_p(\mathcal{R}))$ avem:

$$\mathcal{E}_u(\mathcal{R}) = \{A \overset{p}{\to} X \overset{r^X}{\to} rX, r^X \cdot p \mid A \in \mid \mathcal{R} \mid, p \in \mathcal{E}_u\}, \mathcal{M}_p(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_p \cap \mathcal{R}.$$

5. Pentru structura de factorizare $(\mathcal{E}_u(\mathcal{R}), \mathcal{M}_p(\mathcal{R}))$ avem:

$$\mathcal{E}_p(\mathcal{R}) = \{A \overset{p}{\to} X \overset{r^X}{\to} rX, r^X \cdot p \mid A \in \mid \mathcal{R} \mid, p \in \mathcal{E}_p\}, \mathcal{M}_u(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_u \cap \mathcal{R}.$$

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\mathcal{E}_f(\mathcal{R}) = A\{\overset{p}{\to} X \overset{r^X}{\to} rX, r^X \cdot p, A \in \mid \mathcal{R} \mid, p \in \mathcal{E}_f\}$, $\mathcal{M}ono \cap \mathcal{R}$.

7. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \notin \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, atunci $\mathcal{E}_p(\mathcal{R}) \not\subset \mathcal{E}_u(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$.

8. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie $(\mu\mathcal{K})$-reflectivă. Atunci $k \cdot r \cdot k = k$.

9. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I})$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. Atunci:

a) $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$; *a') $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$;*

b) $k(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$; *b') $r(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.*

10. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ cu functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, iar $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$.

a) Dacă $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$, *atunci* $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}_u$;

b) Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, *atunci* $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}pi$.

6.2.21. Exerciţiu. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasele de morfisme $\mathcal{E}_f, \mathcal{E}_u, \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono, \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u, \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}ono, \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$ sunt închise în raport cu produsele (vezi Propoziţia 1.2.14) şi sunt stabile la stânga.

6.2.22. Exerciţii. *În categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *avem:*

1. Clasa $\mathcal{E}_f$ *este completă la stânga (vezi* [D, M, S, 1972], Teorema 1.1) *şi la dreapra.*

2. Clasa $\mathcal{E}_u$ *este compleă la stânga şi la dreapta.*

3. Clasa $\mathcal{E}pi$ *este închisă în raport cu produsele.*

4. Clasele $\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_p$ *şi* $\mathcal{M}_u$ *sunt complete la stânga şi la draeapta.*

5. Dacă $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *atunci clasa* $\mathcal{B}$ *este completă la stânga şi la dreapta.*

6.2.23. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{R}$ *o subcategorie nenulă a categoriei* $\mathcal{K}$. *Atunci:*

1. Corpul K, *ca sumând a oricărui obiect nenul, aparţine subcategoriei* $\mathcal{R}$.

2. $\mathcal{R}$*-replica oricărui obiect din* $\mathcal{K}$ *este un epi şi un monouniversal al cateogiriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

Sunt adevărate afirmaţiile duale.

6.3. Laticea structurilor de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$

6.3.1. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categorei $\mathcal{C}$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare (de dreapta). Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}$ examinăm $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea $\mathcal{R}$-replicii obiectului X:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u^X"] \arrow[rr, bend right, "r^X"'] & uX \arrow[r, "v^X"] & rX \end{tikzcd}$$

Figura 6.3.1

$$r^X = v^X \cdot u^X \tag{1}$$

Fie $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$.

Lemă. *1. Morfismul* v^X *este* $\mathcal{R}$*-replica obiectului* uX.

2. Corespondenţa

$$X \longmapsto (uX, u^X)$$

defineşte subcategoria $\mathcal{U}$ *ca pe o subcategorie* $\mathcal{P}$*-reflectivă a categoriei* $\mathcal{C}$.

3. $\mathcal{U}$ este cea mai mică subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă care conţine subcategoria $\mathcal{R}$. $\uparrow$

6.3.2. Teoremă. *1. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ este o structură de factorizare ($\mathcal{I} \subset \mathcal{M}ono$), sau $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.*

1^*. *Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de stânga în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ este o structură de factorizare ($\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi$), sau $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$.*

$\downarrow$ 1. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(0)$, iar

$$o^X = v^X \cdot u^X$$

este $(\mathcal{P},\mathcal{I})$-factorizarea morfismului $o^X : X \to 0$.

Conform lemei precedente subcategoria $\mathcal{U}$ este o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă, iar u^X este $\mathcal{U}$-replica lui X. Sunt posibile două cazuri: $\mathcal{U} = 0$, sau $\mathcal{U} \neq 0$.

Cazul $\mathcal{U} = 0$. Atunci $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ este o structură de factorizare. Pentru a demonstra afirmaţia dată este suficient de arătat, că $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{P}$.

Fie $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{E}_f$, iar $k : Z \longrightarrow X = ker f$. Atunci $f = coker\ k$. Se verifică uşor că pătratul

$$o^Y \cdot o^Z = f \cdot k \tag{2}$$

este cocartezian. Cum $o^Z \in \mathcal{P}$, rezultă că $f \in \mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "0^Z"'] & X \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r, "0^Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 6.3.2

Cazul $\mathcal{U} \neq 0$. Orice subcategorie reflectivă nenulă este $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-reflectivă. O să demonstrăm, că $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Fie $p : X \longrightarrow Y \in \mathcal{P}$. Examinăm pătratul comutativ

$$o^Y \cdot p = v^X \cdot u^X \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u^X"'] & Y \arrow[d, "0^Y"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
uX \arrow[r, "v^X"] & 0
\end{tikzcd}$$

Figura 6.3.3

Deoarece $p \in \mathcal{P}$, iar $v^X = o^{uX} \in \mathcal{I}$, $(p \perp v^X)$, există un morfism h astfel încât

$$u^X = h \cdot p, \tag{4}$$

$$o^Y = v^X \cdot h. \tag{5}$$

În egalitatea (4), $u^X \in \mathcal{M}_u$. Deci $p \in \mathcal{M}_u$. Astfel $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. $\uparrow$

6.4. Structura de factorizare $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$

6.4.1. Notaţii. *Fie $\mathcal{L}$ o subcategorie reflectivă cu functorul reflector $r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R}$. Notăm*

$$\varepsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi | r(e) \in \mathcal{I}so\}.$$

Morfismele clasei $(\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$ se numesc morfismul $\mathcal{R}$-perfecte (vezi [Str, 1974]).

d^*. $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono | k(m) \in \mathcal{I}so\}$.

Operatorul μ o să fie examinat şi în cazul când k este un x-functor (vezi 6.2.16).

Este evident, $e : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$, atunci şi numai atunci când $e \in \mathcal{E}pi$ şi

$$r^X = f \cdot e$$

pentru un morfism f.

6.4.2. Definiţie. *Fie $\mathcal{A}$ o subcategorie plină a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}$. $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ se numeşte pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{A} \cap \mu\mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \varepsilon\mathcal{L}$.*

În acest caz $\mathcal{K}$ (respectiv: $\mathcal{L}$) se numeşte subcategorie c-coreflectivă (respectiv: c-reflectivă) a categoriei $\mathcal{A}$, şi $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$ se numesc conjugate ale categoriei $\mathcal{A}$ (respectiv: $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$).

6.4.3. Notaţii. *1. $\mathbb{P}_c(\mathcal{A})$ (respectiv: $\mathbb{P}_c$) clasa perechilor de subcategorii conjugate ale categoriei $\mathcal{A}$ (respectiv: $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$).*

2. $\mathbb{K}_c(\mathcal{A})$ (respectiv:$\mathbb{K}_c$) clasa subcategoriilor c-coreflective ale categoriei $\mathcal{A}$ (respectiv: $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$).

3. $\mathbb{R}_c(\mathcal{A})$ (respectiv: $\mathbb{R}_c$) clasa subcategoriilor c-reflective ale categoriei $\mathcal{A}$ (respectiv $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$) (vezi 9.1-9.2).

4. Fie $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1), (\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2) \in \mathbb{P}_c(\mathcal{A})$. $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1) \leq (\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2) \Leftrightarrow \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$.

5. $\mathbb{B}ic = \{\varepsilon\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathbb{R}_c\}$.

6.4.4. Exerciţii. *1. $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ este cel mai mic element în clasa $\mathbb{P}_c$.*

2. $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ este cel mai mare element în clasa $\mathbb{P}_c$.

Alte exemple vezi în 9.1.

6.4.5. Exemplu. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie monoreflectivă. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Clasa $\varepsilon\mathcal{R}$ este a-ereditară şi a-coeredotară.

2. $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

3. Dacă $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}, A \in \mid \mathcal{R} \mid$ şi $f : X \to A$, atunci $f = g \cdot b$ pentru un g.

6.4.6. Teoremă. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu pătrate carteziene, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie monoreflectivă. Atunci*

1. $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}$.

2. Morfismul $f : X \to Y$ aparţine clasei $(\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$ atunci şi numai atunci când pătratul

$$r(f) \cdot r^X = r^Y \cdot f$$

este cartezian.

$\downarrow$ 1. Este suficient de demonstrat că orice morfism $g : X \to Y$ posedă $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$-factorizare. Examinăm pătratul comutativ

$$r(g) \cdot r^X = r^Y \cdot g. \tag{1}$$

Fie

$$r(g) \cdot b = r^Y \cdot g' \tag{2}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele $r(g)$ şi r^Y. Atunci

$$r^X = b \cdot t, \tag{3}$$

$$g = g' \cdot t \tag{4}$$

pentru un mofrsim $t : X \to P$.

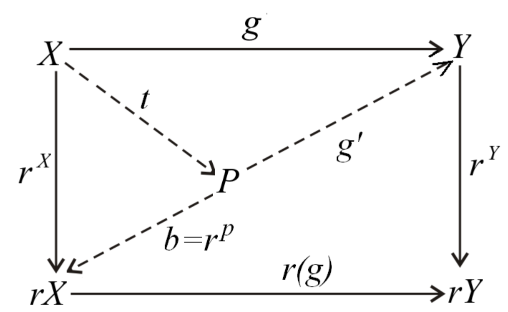


Figura 6.4.1

Avem $r^Y \in \mathcal{M}ono$, deci $r^Y \in \mathcal{M}_u$ şi $b \in \mathcal{M}_u$. Atunci în egalitatea (3) $r^X \in \mathcal{E}pi$ şi $b \in \mathcal{M}_u$. Deci $t \in \mathcal{E}pi$ (Teorema 2.6.2). Se verifică uşor că b este $\mathcal{R}$-replica obiectului P :

$$b = r^P. \tag{5}$$

Astfel am demonstrat că $t \in \varepsilon\mathcal{R}$.

Deoarece pătratul (2) este cartezian din p.2 rezultă că $g' \in (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$. Deci egalitatea (4) este $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$-factorizarea morfismului g.

2. Fie $f : X \to Y$ şi pătratul

$$r(f) \cdot r^X = r^Y \cdot f \tag{6}$$

este un pătrat cartezian şi o să demonstrăm că $f \in (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$. Într-adevăr, fie $b : A \to B \in \varepsilon\mathcal{R}$, iar

$$f \cdot u = v \cdot b. \tag{7}$$

Deoarece $rX \in \mid \mathcal{R} \mid$, iar $b \in \varepsilon\mathcal{R}$, rezultă că

$$r^X \cdot u = h \cdot b \tag{8}$$

pentru un h. Avem

$$r(f) \cdot h \cdot b = (\text{din}(8)) = r(f) \cdot r^X \cdot u = (\text{din}(6)) = r^Y \cdot f \cdot u = (\text{din}(7)) = r^Y \cdot v \cdot b,$$

i.e.

$$r(f) \cdot h \cdot b = r^Y \cdot v \cdot b \tag{9}$$

şi deoarece $b \in \mathcal{E}pi$, obţinem

$$r(f) \cdot h = r^Y \cdot v. \tag{10}$$

Dar (6) este un pătrat cartezian. Deci

$$h = r^X \cdot w, \tag{11}$$

$$v = f \cdot w$$

pentru un w. Avem

$$r^X \cdot w \cdot b = (\text{din}(11)) = h \cdot b = (\text{din}(8)) = r^X \cdot u$$

i.e.

$$r^X \cdot w \cdot b = r^X \cdot u \tag{13}$$

şi deoarece $r^X \in \mathcal{M}ono$ rezultă că

$$w \cdot b = u. \tag{14}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "b"] \arrow[d, "u"'] & & B \arrow[d, "v"] \arrow[dll, dashed, "w"'] \arrow[ddll, dashed, "h"'] \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "r^X"'] & & Y \arrow[d, "r^Y"] \\
rX \arrow[rr, "r(f)"] & & rY
\end{tikzcd}$$

Figura 6.4.2

Egalităţile (11) şi (14) arată că $b \perp f$.

Reciproc. Fie $f : X \to Y \in (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$ şi să demonstrăm că patratul

$$r(f) \cdot r^X = r^Y \cdot f \tag{15}$$

este cartezian. Într-adevăr, fie

$$r(f) \cdot u = r^Y \cdot v \tag{16}$$

patratul cartezian construit pe morfismele $r(f)$ şi r^Y.

Atunci

$$r^X = u \cdot w, \tag{17}$$

$$f = v \cdot w \tag{18}$$

pentru un morfism $w : X \to P$. Deoarece clasa $(\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$ este ereditară, rezultă că $w \in (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$, iar din cele demonstrate anterior, $w \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $w \in \mathcal{I}so$, iar pătratul (15) este cartezian. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[dd, "r^X"'] & & rX \arrow[dd, "r^Y"] \\
& P \arrow[ur, dashed, "v"'] \arrow[dl, dashed, "u"'] & \\
A \arrow[rr, "r(f)"] & & lA = rA
\end{tikzcd}$$

Figura 6.4.3

6.4.7. Lemă. *1. Fie* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = ((\mu\mathcal{K})^{\top}, \mu\mathcal{K})$*, unde* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$*. Atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$ *pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

2. Fie $\mathcal{A}$ *o clasă de morfisme completă la stânga. În particular, fie* $\mathcal{A} = \mathcal{E}_u$ *sau* $\mathcal{A} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}$*, unde* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$*. Atunci pentru orice* $(\mathcal{P}, \mathcal{J}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$*, rezultă că* $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$.

$\downarrow$ 1. Fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ şi

$$r^X = m^X \cdot e^X \tag{1}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea $\mathcal{R}$-replicii r^X, unde $e^X : X \to pX$. Atunci $pX \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})|$. Avem $r^X \in \mathcal{E}pi$ şi $m^X \in \mathcal{M}_u$. Deci $e^X \in \mathcal{E}pi$. Se verifică uşor, că $e^X : X \to pX$ este $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$-replica lui X.

2. Verificăm că subcategoria $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ este închisă în raport cu produse şi $\mathcal{J}$-subobiecte. Faptul $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ este închisă în raport cu produse rezultă din proprietatea respectivă a subcategoriei $\mathcal{R}$ şi a clasei $\mathcal{A}$.

Fie $T \in |\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})|, i : X \to T \in \mathcal{J}$ şi vom demonstra că $X \in |\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $A : Z \to T \in \mathcal{A}$. În pătratul cartezian

$$i \cdot a' = a \cdot i' \tag{1}$$

unde $a' : P \to X$, avem $a' \in \mathcal{A}$ şi $i' \in \mathcal{J}$. Deoarece $Z \in |\mathcal{R}|$ şi $i' \in \mathcal{J}$, rezultă că $P \in |\mathcal{R}|$ şi $X \in |\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})|$. $\uparrow$

6.4.7*. Lemă. *Fie* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$*, unde* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$*. Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}$ *pentru orice* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

2. Fie $\mathcal{A}$ *o clasă completă la dreapta. În particular,* $\mathcal{A} = \mathcal{M}_f$ *sau* $\mathcal{A} = \mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u$*, unde* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$*. Atunci pentru orice* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I})$*, rezultă că* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}(\mathcal{I})$. $\uparrow$

6.4.8. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{S}$ *subcategoria spaţiilor cu topologie slabă, iar* $\tilde{\mathcal{M}}$ *a spaţiilor cu topologie Mackey. Atunci* $\varepsilon\mathcal{S} = \mu\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.

2. Dacă $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$*. Atunci* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$.

3. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}$ *şi* $\Gamma_0 \subset \Gamma$*. Atunci* $\varepsilon\Gamma \subset \mathcal{M}_p$.

4. Fie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$*. Atunci* $\varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\top}$.

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$*. Atunci* $\mu\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\perp}$.

6.4.9. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$*. Examinăm structura de factorizare de stânga* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = ((\mu\mathcal{K})^{\top}, \mu\mathcal{K})$.

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ *este o subcategorie reflectivă (vezi 6.1.10).*

2. Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$*, atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ *este o subcategorie reflectivă.*

3. Dacă $\mathcal{K} = \Sigma$ *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$*, atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. Dacă $\mathcal{K} = \Sigma$, atunci pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$-replica oricărui obiect este o secţiune. În particular, ori $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, ori $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ nu este subcategorie refectivă.

5. $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$-reflectivă.

6.5. Subcategorii semireflexive

6.5.1. Teoremă. *Fie $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ un functor reflector.*

1. Clasa $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ posedă cel mai mic element, pe care îl vom nota $\mathcal{R}(l^{\mathcal{E}})$.

2. Clasa $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ posedă cel mai mic element egal cu Π.

3. Clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ posedă cel mai mic element, pe care îl vom nota $\mathcal{R}(l^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}})$.

$\downarrow$ 1. Fie

$$\mathcal{U} = \cap\big\{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})\big\}.$$

$\mathcal{U}$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Deci $\mathcal{R}(l^{\mathcal{E}}) = \mathcal{U}$.

2. Deoarece subcategoria Π este închisă în raport cu $\mathcal{E}pi$-factorobiecte (vezi p.9.4.7) rezultă că $\Pi \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ pentru orice $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$.

3.

$$\mathcal{R}(l^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}) = \cap\big\{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})\big\}. \uparrow$$

6.5.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Atunci clasele $\mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K}), \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K}), \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sunt latici complete cu cel mai mic şi cel mai mare elemente.*

$\downarrow$ În primul rând menţionăm că elementul $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ aparţine tuturor acestor clase. Mai departe, fie $\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ o subclasă a uneia din aceste clase $\mathbb{T}$. Atunci subcategoria

$$\wedge\big\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\} \equiv \cap\big\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\}$$

aparţine aceleeaşi clase. De aici rezultă că clasele respective sunt latici complete în raport cu operaţiile:

$$\wedge\big\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\} = \cap\big\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\},$$

$$\vee\big\{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\} = \cap\big\{\mathcal{L} \in \mathbb{T} \mid \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{L}, \forall\alpha \in \mathcal{A}\big\}. \uparrow$$

6.5.3. Propoziţie. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\Pi \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

2. $\Pi \subset \mathcal{K}$.

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. Fie $A \in | \Pi |$, şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $k^A \in \mu\mathcal{K}$. Deci $kA \in | \Pi |$. Deoarece $k^A \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că pe un spaţiu vectorial există două topologii local convexe comparabile ce-l fac complet cu topologia slabă. Deci $k^A \in \mathcal{I}so$.

$2 \Rightarrow 1$. Fie $A \in | \Pi |$, iar $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $b \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

6.5.4. Fie

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \Pi \subset \mathcal{K}\}.$$

În afară de subcategoria $\tilde{\mathcal{M}}$ (vezi [R, R, 1964], cap. V) clasa $\mathcal{A}$ conţine subcategoria Ton a spaţiilor tonelate, deoarece produsul de spaţii tonelate este un spaţiu tonelat ([R, R, 1964], cap. V, Propoziţia 27). Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, atunci $\Pi \subset \mathcal{K}$.

Notaţii. *Fie*

$$\mathcal{K}_\Pi = \cap\{\mathcal{K} \mid \mathcal{K} \in \mathcal{A}\}.$$

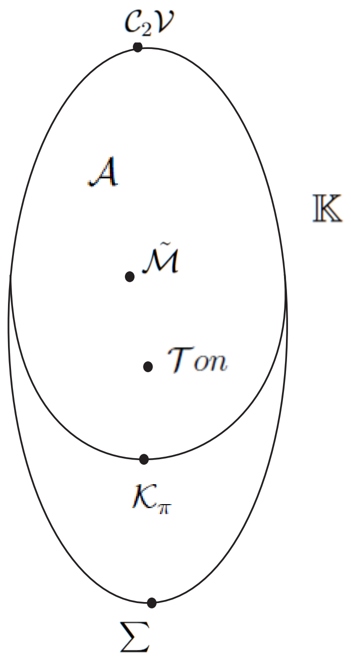


Figura 6.5.2

6.5.5. Exerciţii. *1. Pentru orice element $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ Π este cel mai mic element al laticei $\mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$.*

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$ atunci şi numai atunci, când $\mathcal{K}_\pi \subset \mathcal{K}$.

3. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\Pi \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Atunci $\Pi \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

5. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

6. $\mathbb{R}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}_f(\varepsilon\Pi)$.

7. $\mathbb{R}^s(\varepsilon\Pi) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Pi) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\} \neq \mathbb{R}_f(\varepsilon\Pi)$.

6.5.6. Propoziţie. *1. Fie* $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. *Atunci* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. *Adică pentru* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *dacă* $(E,t) \in |\Gamma|$ *şi* $(E,k(t))$ *este* $\mathcal{K}$*-coreplica lui* (E,t), *atunci pentru orice topologie local convexă* u *cu* $t \leq u \leq k(t), (E,t) \in |\Gamma|$.

2. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ *cu clasa* $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$*-ereditară. Atunci* $\mathbb{R}(\mathcal{I}) \subset \mathbb{R}^s(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$.

$\downarrow$ 1. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), A \in |\Gamma|, b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$, iar $g^X : X \to gX$ Γ-replica lui X. Atunci

$$b = f \cdot g^X$$

pentru un f. Deoarece $b \in \mathcal{M}_u$, şi $g^X \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $f \in \mathcal{M}_u$. Astfel f, iar cu el şi g^X aparţin clasei $\mu\mathcal{K}$. Deci $g^X \in \mu\mathcal{K} \cap \mathcal{M}_p \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$.

2. Demonstraţia ca şi la p. 1. $\uparrow$

6.5.7. Remarcă. *Faptul că* $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$ *este bine ştiut* (vezi [R, R, 1974], cap VI, Propoziţia 3) *şi se formulează astfel:*

- un spaţiu local convex complet rămâne complet în orice topologie local convexă mai fină, dar compatibilă cu aceeaşi dualitate.

Problemă. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. *Este adevărată afirmaţia: Dacă* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$, *atunci* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$?

6.5.8. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. *Atunci:*

1. $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\Gamma_0)$. *Adică subcategoria* $\mathcal{K}$ *este închisă în raport cu extensiile:* $(\mathcal{E}pi\cap\mathcal{M}_p)$*-factor obiecte.*

2. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *atunci* $\mathcal{K} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ Fie $A \in |\mathcal{K}|, b : A \to X \in \varepsilon\Gamma_0$, iar $k^X : kX \to X$. Atunci

$$b = k^X \cdot f \tag{1}$$

pentru un morfism f. $b \in \mathcal{E}pi$ şi $k^X \in \mathcal{M}_u$, deci $f \in \mathcal{E}pi$. Astfel pătratul

$$k^X \cdot f = 1 \cdot b \tag{2}$$

este cocartezian. Atunci $k^X \in \mathcal{M}_p$ sau $k^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$.

2. Fie $A \in |\mathcal{K}|$ şi $g^A : A \to gA$ Γ-replica lui A şi $k^{gA} : kgA \to gA$ $\mathcal{K}$-coreplica lui gA. Atunci

$$g^A = k^{g^A} \cdot t^A \tag{3}$$

pentru un t^A. Avem $g^A \in \mathcal{E}pi$ şi $k^{gA} \in \mathcal{M}_u$. Deci $t^A \in \mathcal{E}pi$. Mai departe, $t^A \in \mathcal{E}pi$ şi $g^A \in \mathcal{M}_p$. Deci $k^{gA} \in \mathcal{M}_p$ sau $k^{gA} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$. Definitiv, $g^A \in |\mathcal{K}|$. Se verifică uşor că gA este $(\mathcal{K} \cap \Gamma)$-replica lui A. $\uparrow$

6.5.9. Corolar ([Sch, 1966], cap. IV, Propoziţia 3.5). *Dacă E este un spaţiu cu topologie Mackey, atunci completarea lui este de asemenea spaţiu cu topologie Mackey.*

6.5.10. Teoremă. *Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\mathcal{T}), (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_c$ şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$. Atunci $(\mathcal{K} \cap \mathcal{T}, \mathcal{L} \cap \mathcal{T}) \in \mathbb{P}_c(\mathcal{T})$.* $\uparrow$

6.5.11. Exemple. *1. Subcategoria Π. Avem $\varepsilon\Pi = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.*

2. Subcategoria Γ_0. Avem $\varepsilon\Gamma_0 = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Deci $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

Definitiv: $\mathbb{R}^s(\varepsilon\Pi) = \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Pi) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\} \neq \mathbb{R}_f(\varepsilon\Pi)$ (vezi 12.1).

Fie A un spaţiu cu topologia slabă necomplet, şi $g_0^A : A \to g_0A$ Γ_0-replica lui. Atunci $g_0A \in\mid \Pi \mid$ şi $g_0^A \in \varepsilon\Gamma_0$. Deci $\Pi \notin \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$ şi $\Pi \notin \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$, dar $\Pi \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$. Deoarece există subcategorii $\mathcal{E}_u$-reflective ce nu sunt închise în raport cu extensiile (vezi Exemplul 6.7.10) deducem, că $\mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0) \neq \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

Definitv: Clasele $\mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0), \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$ şi $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$ sunt două câte două definite.

3. Subcategoria $\mathcal{S}$. Avem $\varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deci $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. În acelaşi timp spaţiile Banach infinit dimensional nu sunt complete în topologia slabă. Deci $\Gamma_0 \neq \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\Gamma_0 \neq \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

Mai departe, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$, dar $\mathcal{S} \neq \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathcal{S} \neq \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

Definitiv: Clasele $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}), \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ sunt diferite.

4. Subcategoria Σ. $\mu\Sigma = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Atunci $\mathbb{R}^s(\mu\Sigma) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$, şi $\mathbb{R}_f(\mu\Sigma) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \Pi\}$.

6.5.12. Probleme. *1. Sunt adevărate oare următoarele afirmaţii:*

a) Fie $\Pi \in \mathbb{R}^s(\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

b) Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\varepsilon\mathcal{M}_p)$ şi $\Gamma \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $\Pi \notin \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma)$.

c) Fie $\Gamma \notin \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\Pi \notin \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma)$.

2. De găsit cel mai mic element al unor latici de forma $\mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$, când $\mathcal{K}_\Pi \neq \mathcal{K}$ şi $\mathcal{K} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. De descris subcategoria $\mathcal{K}_\Pi$.

6.6. Laticea $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$

6.6.1. Notaţii. *Fie $\mathcal{R}$ a subcategorie reflectivă nenulă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru un obiect arbitrar $X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ notăm $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica, $\pi^X : X \to \pi X$ Π-replica acestui obiect, unde Π este subcategria spaţiilor complete cu topologia slabă. Deoarece $\Pi \subset \mathcal{R}$ avem*

$$\pi^X = v^X \cdot r^X \tag{1}$$

pentru un $v^X : rX \to \pi X$.

Notăm

$$\mathcal{U}(\mathcal{R}) = \{r^X \mid X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid\}, \quad \mathcal{V}(\mathcal{R}) = \{v^X \mid X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid\}.$$

Notaţii duale. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă nenulă. Pentru $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ notăm $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica, $\sigma X : \sigma X \to X$ Σ-coreplica obiectului X, unde Σ este subcategoria spaţiilor local convexe cu cea mai fină topologie local convexă. Deoarece $\Sigma \subset \mathcal{K}$*

$$\sigma^X = k^X \cdot v_1^X \tag{2}$$

pentru un $v_1^X : \sigma X \to kX$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r^X"] \arrow[dr, "\pi^X"'] & rX \arrow[d, "v^X"] \\ & \pi X \end{tikzcd}$$

Figura 6.6.1

$$\begin{tikzcd} \sigma X \arrow[r, "v_1^X"] \arrow[dr, "\sigma^X"'] & kX \arrow[d, "k^X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Figura 6.6.2

Notăm

$$\mathcal{U}_c(\mathcal{K}) = \{k^X \mid X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid\}, \quad \mathcal{V}_c(\mathcal{K}) = \{v_1^X \mid X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid\}.$$

6.6.3. Lemă. *1. Pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ avem $\mathcal{U}(\mathcal{R}) \perp \mathcal{V}(\mathcal{R})$*

1^*. *Pentru orice $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ avem $\mathcal{V}_c(\mathcal{K}) \perp \mathcal{U}_c(\mathcal{K})$.*

$\downarrow$ *1. Fie $X, Y \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ şi*

$$v^Y \cdot f = g \cdot r^X \tag{1}$$

Atunci

$$f = h \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un morfism h. Aceasta şi demonstrează că $r^X \perp v^Y$. $\uparrow$

6.6.4. Notaţii. *Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ fie*

$$\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\mathcal{V}(\mathcal{R}))^{\neg}, \mathcal{I}''(\mathcal{R}) = \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner}. \quad \mathcal{I}'(\mathcal{R}) = (\mathcal{U}(\mathcal{R}))^{\llcorner}, \mathcal{P}'(\mathcal{R}) = \mathcal{I}''(\mathcal{R}))^{\neg}.$$

d^*. Pentru $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ fie

$$\mathcal{E}''(\mathcal{K}) = (\mathcal{U}_c(\mathcal{K}))^{\neg}, \mathcal{M}''(\mathcal{K}) = (\mathcal{E}''(\mathcal{K}))^{\llcorner}, \quad \mathcal{M}'(\mathcal{K}) = (\mathcal{V}_c(\mathcal{K}))^{\llcorner}, \mathcal{E}'(\mathcal{K}) = (\mathcal{M}'(\mathcal{K}))^{\neg}.$$

6.6.5. Din Lema 6.5.3 rezultă

Lemă. 1. $\mathcal{U}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$.

2. $\mathcal{V}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{I}''(\mathcal{R})$.

1^*. $\mathcal{V}_c(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E}'(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E}''(\mathcal{K})$.

2^*. $\mathcal{U}_c(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}''(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{K})$. $\uparrow$

6.6.6. Notaţii. *Pentru* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *fie*

$$\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} \mid \mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})\}.$$

d^*. *Pentru* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *fie*

$$\mathbb{L}_x(\mathcal{K}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} \mid \mathcal{E}'(\mathcal{K}) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}''(\mathcal{K})\}.$$

6.6.7. Lemă. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. *Atunci pentru orice obiect* $X \in \mid \mathcal{C}_2(\mathcal{V}) \mid$ *egalitatea*

$$\pi^X = v^X \cdot r^X.$$

este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$*-factorizarea morfismului* π^X.

1^0. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{K})$. *Atunci pentru orice obiect* $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ *egalitatea*

$$\sigma^X = k^X \cdot v_1^X$$

este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$*-factorizarea morfismului* σ^X.

$\downarrow$ 1. Afirmaţia este adevărată deoarece ea este adevărată pentru stucturile de factorizare $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$ şi $(\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R}))$. $\uparrow$

6.6.8. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar

$$\sigma^X = i_1^X \cdot p_1^X, \tag{1}$$

$$\pi^X = i_2^X \cdot p_2^X, \tag{2}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea Σ-coreplicii σ^X şi Π-replicii π^X a unui obiect arbitrar $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$.

$$\sigma X \xrightarrow{p_1^X} kX \xrightarrow{i_1^X} X \xrightarrow{p_2^X} rX \xrightarrow{i_2^X} \pi X$$

Notăm

$$\mathcal{K} = \mathcal{Q}_\mathcal{P}(\Sigma), \mathcal{R} = \mathcal{S}_\mathcal{I}(\Pi).$$

Atunci $i_1^X : kX \to Y$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X, şi $p_2^X : X \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului X. Astfel $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

Cu notaţiile de mai sus avem

Lemă. 1. $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\Sigma))$.

2. $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi))$. $\uparrow$

6.6.9. Teoremă. *1. Pentru orice element $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ clasa $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ este o latice completă cu cel mai mic element $(\mathcal{P}'(\mathcal{R}),\mathcal{I}'(\mathcal{R}))$ şi cel mai mare element $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.*

1^*. *Pentru orice element $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ clasa $\mathbb{L}_x(\mathcal{K})$ este o latice completă cu cel mai mic element $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}),\mathcal{M}'(\mathcal{K}))$ şi cel mai mare element $(\mathcal{E}''(\mathcal{K}),\mathcal{M}''(\mathcal{K}))$.*

2. Laticele $\{\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}) \mid \mathcal{R} \in \mathbb{R}\}$ divizează laticea $\mathbb{B}$ în clase disjuncte.

2^*. *Laticele $\{\mathbb{L}_x(\mathcal{K} \mid \mathcal{K} \in \mathbb{K}\}$ divizează laticea $\mathbb{B}$ în clase disjuncte.* $\uparrow$

6.6.10. Teoremă. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci:*

1. $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p$.

2. Morfismul $f : X \to Y$ aparţine clasei $\mathcal{I}''(\mathcal{R})$ atunci şi numai atunci, când f este un mono universal ($f \in \mathcal{M}_u$) şi patratul

$$r(f) \cdot r^X = r^Y \cdot f$$

este cartezian.

$\downarrow$ 1. Clasa $\mathcal{E}_p$ a epimorfismelor exacte este $(\varepsilon\mathcal{R})$-ereditară, deoarece $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_u$. Astfel $(\varepsilon\mathcal{R} \circ \mathcal{E}_p), (\varepsilon\mathcal{R})^\perp \cap \mathcal{M}_u)$ este o structură de factorizare (Teorema 2.7.3.). Teorema 6.4.6. descrie clasa $(\varepsilon\mathcal{R})^\perp \cap \mathcal{M}_u$. A rămas de demonstrat că $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p$.

$(\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. Deoarece $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) = (\mathcal{V}(\mathcal{R}))^{\urcorner}$, trebuie de demonstrat că $(\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p \perp \mathcal{V}(\mathcal{R})$. Avem $\mathcal{V}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_u$, deci $\mathcal{E}_p \perp \mathcal{V}(\mathcal{R})$. Să arătăm că $\varepsilon\mathcal{R} \perp \mathcal{V}(\mathcal{R})$. Fie $b : A \to B \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi

$$v^X \cdot u = v \cdot b \tag{1}$$

un pătrat comutativ. Dacă $r^B : B \to rB$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului B, atunci $r^B \cdot b : A \to rB$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului A. Deci

$$u = w \cdot r^B \cdot b \tag{2}$$

pentru un morfism $w : rB \to rX$. Egalitatea scrisă şi arată că $b \perp v^X$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "r^B"] \arrow[d, "v"] & rB \arrow[dll, dashed, "w"'] \\
rX \arrow[r, "v^X"] & \pi X &
\end{tikzcd}$$

Figura 6.6.4

$\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \subset \varepsilon\mathcal{R} \circ \mathcal{E}_p$. Fie $f : X \to Y \in \mathcal{P}''(\mathcal{R})$ şi

$$f = i \cdot p \tag{3}$$

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$-factorizarea morfismului f, $r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-replica, iar $v^Z : rZ \to \pi Z$ Π-replica obiectelor respective. Deoarece πZ este un obiect $\mathcal{M}_u$-injectiv, iar $i \in \mathcal{M}_u$, morfismul $v^Z \cdot r^Z$ se extinde prin morfismul i :

$$v^Z \cdot r^X = g \cdot i \tag{4}$$

pentru un morfism g. Avem $f \in \mathcal{P}''(\mathcal{R})$, deci, şi $i \in \mathcal{P}''(\mathcal{R})$, adică $i \perp v^Z$. Există un morfism $h : Y \to rZ$ astfel încât

$$r^Z = h \cdot i, \tag{5}$$

$$g = v^Z \cdot h. \tag{6}$$

Din egalitatea (5) rezultă că $i \in \varepsilon\mathcal{R}$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r^Z"'] & rX \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, dashed, "g"] \\
& rZ \arrow[r, "v^Z"] & \pi Z
\end{tikzcd}$$

Figura 6.6.5

6.6.10*. Teoremă. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă nenulă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci:*

1. $\mathcal{M}'(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K})$.

2. Morfismul $f : X \to Y$ aparţine clasei $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ atunci şi numai atunci când f este un epi universal ($f \in \mathcal{E}_u$) şi pătratul

$$f \cdot k^X = k^Y \cdot k(f)$$

este cocartezian. $\uparrow$

6.6.11. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Subcategoria $\mathcal{R}$ este $\mathcal{P}$-reflectivă.

2. $\mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$.

$\downarrow 1 \Longrightarrow 2$ Dacă $\mathcal{R}$ este o subcategrie $\mathcal{P}$-reflectivă, atunci $\mathcal{U}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$, şi $\mathcal{P}'(\mathcal{R}) = (\mathcal{U}(\mathcal{R}))^{\llcorner\urcorner} \subset \mathcal{P}^{\llcorner\urcorner} = \mathcal{P}$.

$2 \Longrightarrow 1$. Evident. $\uparrow$

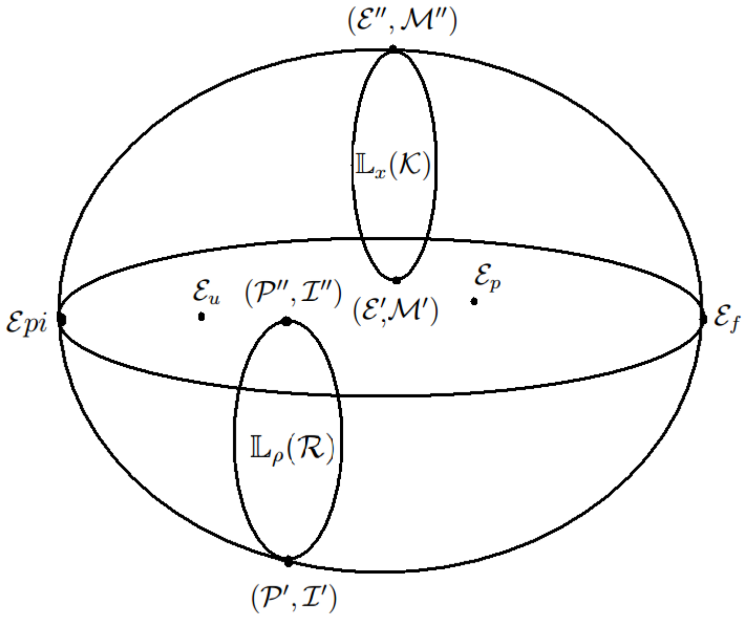


Figura 6.6.6

6.6.12. Notaţii. *Pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ fie $\mathbb{B}_{\varepsilon p}(\mathcal{L})$ clasa structurilor de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ cu proprietăţile:*

- $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_u(\mathcal{R})$;

- clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u(\mathcal{R})$-ereditară.

Clasa $\mathbb{B}_{\varepsilon p}(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$ vom mai nota-o şi $\mathbb{B}_{\varepsilon p}$.

6.6.13. Teoremă. *Aplicaţiile $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \mapsto \varphi''(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$ pentru $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}_{\varepsilon p}$, $\mathcal{R} \mapsto \psi''(\mathcal{R}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$, pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ sunt reciproc inverse şi stabilesc un antiizomorfism al laticelor $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{B}_{\varepsilon p}$.*

$\downarrow$ Fie că $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$ şi clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Examinăm subcategoria reflectivă

$$\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$$

şi o să demonstrăm că $\mathcal{P} = \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. $\mathcal{R}$-replica unui obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ o putem obţine atât prin $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului $\pi^X : X \to \pi X$:

$$\pi^X = i^X \cdot p^X, \tag{1}$$

cât şi prin $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$-factorizarea aceluiaşi morfism π^X :

$$\pi^X = i_1^X \cdot p_1^X. \tag{2}$$

Există un izomorfism t astfel încât

$$p_1^X = t \cdot p^X, \tag{3}$$

$$i^X = i_1^X \cdot t. \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, "i^X"] \arrow[dd, dashed, "t"] & \\
X \arrow[ur, "p^X"] \arrow[rr, "\pi^X"] \arrow[dr, "p_1^X"'] & & \pi X \\
& \bullet \arrow[ur, "i_1^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 6.6.7

Deci $\mathcal{U}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$ şi $\mathcal{V}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{I}$, sau $\mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$.

Să demonstrăm, că $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$. Fie $b : Z \to Y \in \mathcal{P}''(\mathcal{R})$, şi

$$b = m \cdot e \tag{5}$$

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$-factorizarea acestui morfism. Atunci $e \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$. Rămâne de demonstrat, că $m \in \mathcal{P}$. Deoarece $m \in \varepsilon\mathcal{R}$, atunci

$$r^X = r^Y \cdot m. \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "b"] & X \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend left, "r^X"] & Y \arrow[r, "r^Y"] & rX = rY
\end{tikzcd}$$

Figura 6.6.8

Astfel $r^X \in \mathcal{P}, r^Y \in \mathcal{M}_u$ şi clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Deci $m \in \mathcal{P}$.

Clasele $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ nu se intersectează în clasa $\mathbb{B}$. Aşadar aplicaţia indicată este biunivocă. Mai departe, dacă $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$, atunci $\varepsilon\mathcal{R}_2 \subset \varepsilon\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{P}''(\mathcal{R}_2) \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R}_1)$. $\uparrow$

6.6.14. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

2. Clasa $\mathcal{P}$ este $(\varepsilon\mathcal{R})$-ereditară.

$\downarrow 1 \Longrightarrow 2$. Clasa $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, şi $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_u$.

$2 \Longrightarrow 1$. Fie $b \cdot f \in \mathcal{P}$ şi $b \in \mathcal{M}_u$. Deoarece $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$ morfismul $b \cdot f$ se poate prezenta

$$b \cdot f = e \cdot p \tag{1}$$

cu $e \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $p \in \mathcal{E}_p$.

Deoarece $p \perp b$ există un morfism g astfel încât

$$f = g \cdot p, \tag{2}$$

$$e = b \cdot g. \tag{3}$$

Clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Deci $f \in \mathcal{E}pi$. Din egalitatea (2), rezultă că $g \in \mathcal{E}pi$, iar în egalitatea (3) toate componentele aparţin clasei $\varepsilon\mathcal{R}$. În baza ipotezei 2 deducem că $f \in \mathcal{P}$. Am demonstrat că clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Deci $\mathcal{P} = \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. $\uparrow$

6.6.15. Exemple. *1. Subcategoria reflectivă $\mathcal{S}$ a spaţiilor cu topologie slabă.*

$$\varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u, (\varepsilon\mathcal{S}) \circ \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_u, (\mathcal{P}''(\mathcal{S}), \mathcal{I}''(\mathcal{S})) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_f).$$

2.Subcategoria reflectivă Π a spaţiilor complete cu topologie clasă.

$$\varepsilon\Pi = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u, (\varepsilon\Pi) \circ \mathcal{E}_p = \mathcal{E}pi, (\mathcal{P}''(\Pi), \mathcal{I}''(\Pi)) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f).$$

3. Subcategoria coreflectivă $\tilde{\mathcal{M}}$ a spaţiilor cu topologie Mackey.

$$\mu\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u, \quad \mathcal{I}'(\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}_u, \quad (\mathcal{E}'(\tilde{\mathcal{M}}), \mathcal{M}'(\tilde{\mathcal{M}})) = (\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u).$$

Astfel $\mathcal{E}_p = \mathcal{M}_u^{\urcorner}$ este clasa tuturor morfismelor $f : X \to Y$ ce aparţin clasei $\mathcal{E}_u$ şi pentru care pătratul

$$f \cdot m^X = m^Y \cdot m(f)$$

este cocartezian (vezi 2.4.8).

Să exprimăm acest moment utilizând topologiile pe spaţiile respective. Fie $f : (E, u) \to (F, v) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $m^F : (F, m(v)) \to (F, v)$ $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului (F, v).

Morfismul f aparţine clasei $\mathcal{E}_p$ atunci şi numai atunci când f este o aplicaţie surjectivă $(f \in \mathcal{E}_u)$ şi v este cea mai fină topologie local convexă pentru care aplicaţiile f şi m^F sunt continui.

4. Subcategoria reflectivă Γ_0 a spaţiilor complete.

$$\varepsilon\Gamma_0 = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p, \mathcal{P}''(\Gamma_0) = \mathcal{E}_p \circ (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p).$$

5. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ (vezi 2.7.8), şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci $(\mathcal{B}^{\llcorner}, \mathcal{B})$ este o structură de factorizare de stânga şi clasa $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$ este $\mathcal{B}$-ereditară. Astfel $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{I}''(\mathcal{R}) \circ \mathcal{B})$ este o structură de factorizare (vezi Teorema 2.7.3).*

6.6.16. Notaţii. *Construcţia prezentată în acest paragraf poate fi aplicată într-o categorie arbitrară $\mathcal{C}$. Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ două subcategorii epireflective ale categoriei $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. Pentru orice obiect $X \in \mid \mathcal{C} \mid$ avem următoarea diagramă comutativă.*

$$l^X = v^X \cdot r^X. \tag{1}$$

pentru un morfism v^X. Notăm ca şi mai sus

$$\mathcal{U}(\mathcal{R}) = \{r^X \mid X \in \mid \mathcal{C} \mid\}, \mathcal{V}(\mathcal{R}) = \{v^X \mid X \in \mid \mathcal{C} \mid\}.$$

Examinam perechile

$$(\mathcal{P}''_d(\mathcal{R}), \mathcal{I}''_d(\mathcal{R})), (\mathcal{P}'_d(\mathcal{R}), \mathcal{I}'_d(\mathcal{R})), \tag{$*$}$$

unde

$$\mathcal{P}''_d(\mathcal{R}) = (\mathcal{V}(\mathcal{R}))^{\urcorner}, \mathcal{I}''_d(\mathcal{R}) = (\mathcal{P}''_d(\mathcal{R}))^{\perp},$$

$$\mathcal{I}'_d(\mathcal{R}) = (\mathcal{U}(\mathcal{R}))^{\perp}, \mathcal{P}'_d(\mathcal{R}) = (\mathcal{I}'_d(\mathcal{R}))^{\urcorner}.$$

Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie colocal mică cu limite proiective, atunci perechile (*) sunt structuri de factorizare de dreapta.

6.6.17. Teoremă. $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{P}''_d(\mathcal{R})$. $\uparrow$

6.6.18. Exemple. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare de stânga, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, iar $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$.*

1. $\mathcal{L}$ este o subcategorie slab reflectivă.

2. Fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X,

$$r^X = m^X \cdot l^X$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea lui r^X. Atunci $l^X : X \to lX$ este slab $\mathcal{L}$-replica lui X.

3. $l \cdot l = l$.

4. Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, atunci $\mathcal{L}$ este o subcategorie reflectivă.

5. Dacă $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_u$, atunci $\mathcal{L}$ este o subcategorie reflectivă.

6. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = ((\mu\Sigma)^{\top}, \mu\Sigma)$.

a) Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, *atunci* $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

b) Dacă $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, *atunci* $\mathcal{L}$ *este o subcategorie slab reflectivă;* e^X *este o secţiune; pentru* $f : X \to A$ *cu* $A \in \mid \mathcal{L} \mid$ *morfismul* $f \cdot t$ *îl extinde pe* f *prin* e^X, *unde* t *este un invers de stânga pentru* e^X; *unicitatea extinderii lipseşte, în genere, deoarece inversul de stânga* t *nu este unic.*

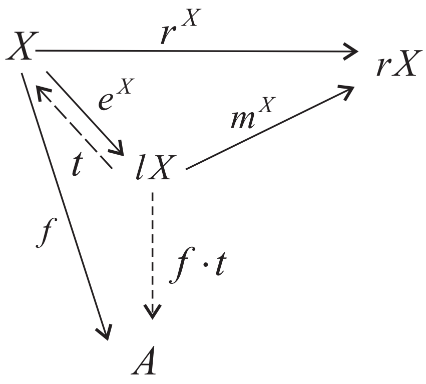


Figura 6.6.9

6.6.19. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{P}''(\mathcal{R}_1) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}_2) = \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. $\mathcal{I}''(\mathcal{R}_1) \cap \mathcal{I}''(\mathcal{R}_2) = \mathcal{M}_f \Leftrightarrow \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 = \Pi$.

6.6.20. Exerciţii. 1. $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = (\mathcal{P}''(\Pi), \mathcal{I}''(\Pi)) = (\mathcal{E}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{M}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V}))$.

2. $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) = (\mathcal{P}''(\mathcal{S}), \mathcal{I}''(\mathcal{S}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{M}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}))$.

3. $(\mathcal{E}'_p, \mathcal{M}'_u) \in \mathbb{L}_x(\tilde{\mathcal{M}}) \cap \mathbb{L}_\rho(\Pi)$.

4. $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) = (\mathcal{P}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{I}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V})) = (\mathcal{E}'(\tilde{\mathcal{M}}), \mathcal{M}'(\tilde{\mathcal{M}}))$.

5. $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = (\mathcal{E}'(\Sigma), \mathcal{M}'(\Sigma)) = (\mathcal{P}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{I}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}))$.

6. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \Leftrightarrow \mathcal{P}''(\mathcal{R}) \subset (\varepsilon\Gamma_0) \circ \mathcal{E}_p$.

7. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \Leftrightarrow \mathcal{P}''(\mathcal{R}) \subset \mathcal{E}_u$.

6.6.21. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) = \mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *şi*

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1(\mathcal{R}) = \{b : X \to Y \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u \mid X \in \mid \mathcal{R} \mid\},$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2(\mathcal{R}) = \{b : X \to Y \in \mathcal{M}_u \mid X \in \mid \mathcal{R} \mid\}.$$

Atunci $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R})) = (\mathcal{V}_1^{\urcorner}, \mathcal{V}_1^{\urcorner\llcorner}) = (\mathcal{V}_2^{\urcorner}, \mathcal{V}_2^{\urcorner\llcorner})$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $(\mathcal{E}_p(\mathcal{R}), \mathcal{M}_u(\mathcal{R})) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}, \mathcal{I}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R})$.

4. Deoarece $\Pi \subset \tilde{\mathcal{M}}$, rezultă că $\mathcal{U}(\Pi) \perp \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$ pentru $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

Astfel $(\mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) \in L_\rho(\Pi)$ pentru orice $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

5. $\mathbb{L}_\rho(\Pi)$ conţine o clasă proprie de elemente.

În particular, dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, atunci $\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}) \supset \mathcal{M}_u$, şi $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) \subset \mathbb{L}_\rho(\Pi)$.

6. $\mathcal{M}''(\mathcal{K}_\Pi) \subset \mathcal{I}'(\Pi)$ şi $\mathcal{M}''(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{I}''(\Pi)$.

6.6.22. Exerciţii. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Notăm $\mathbb{B}_\mathcal{R} = \{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} \mid \mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}\}$. Definim următoarele aplicaţii: ψ, φ_s şi φ_m, unde $\psi(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{R}, \mathcal{I} \cap \mathcal{R})$ pentru $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}_\mathcal{R}$, $\varphi_s(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{M}^{\urcorner}, \mathcal{M}^{\urcorner\llcorner}) = (\mathcal{E}^0, \mathcal{M}^0)$ pentru $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{R})$ şi $\psi_m(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{E}^{\llcorner}) = (\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$. Atunci:*

1. $\psi \cdot \varphi_i = 1$ şi $\psi \cdot \varphi_s = 1$.

2. $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}^0$ şi $\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}_0$.

3. Fie $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) \in \mathbb{B}$. Atunci

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{R}, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{R}) = (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E}^0.$$

6.6.23. Probleme. *1. Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}$. În ce condiţii laticele $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}_1)$ şi $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}_2)$ sunt izomorfe?*

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ cu functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ exact la stânga. Prin ce se caractezirează structura de factorizare $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$?

3. Aceeaşi problemă pentru cazul când $\mathcal{R}$ este c-reflectivă, adică $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ este exact la stînga.

4. De descris structurile de factorizare $(\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R}))$.

5. De construit două subcategorii reflective $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ astfel că $\mathcal{L}$ să nu fie $\mathcal{E}$-reflectivă cu $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$.

6.7. Unele proprietăţi ale functorilor reflectori şi coreflectori

6.7.1. În acest paragraf şi pe viitor o să aducem exemple de subcategorii reflective şi coreflective în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ enumerând totodată şi unele proprietăţi ale lor:

- proprietatea functorului reflector de a fi monofunctor;

- exactitatea la stânga sau la dreapta a functorului reflector;

- exactitatea la stânga a functorului reflector sau la dreapta a functorului coreflector;

- proprietatea unei subcategorii reflective (respectiv: coreflective) de a fi o subcategorie c-reflectivă (respectiv: c-coreflectivă);

- proprietatea unei subcategorii reflective de a fi închisă în raport cu extensiile: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-factorobiecte;

- proprietatea subcategoriei de a avea un obiect universal;

- proprietatea subcategoriei de a conserva clasa de proiecţii sau cea de injecţii a unei structuri de factorizare.

6.7.2. Exemple. *Fie* $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *functorul reflector.*

1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Atunci* $r(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{M}ono$.

2. Fie $m : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci* $r(m) \in \mathcal{M}_u \Leftrightarrow m \in \mathcal{M}_u$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $r(m) \in \mathcal{M}_p \Leftrightarrow m \in \mathcal{M}_p$.

4. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) r *este un monofunctor:* $r(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{M}ono$.

b) clasa $\mathcal{M}ono$ *este* $(\varepsilon\mathcal{R})$*-coereditară.*

5. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi* $g_0(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, *unde* $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_0$ *este functorul reflector. Atunci* $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$*-factorobiecte.*

6. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. *Dacă* r *este un monofunctor, atunci şi* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *este la fel.*

7. $r(\mathcal{J}''(\mathcal{R})) \subset \mathcal{J}''(\mathcal{R})$.

8. $r(\mathcal{M}_u) \subset \mathcal{J}''(\mathcal{R})$.

9. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. *Atunci:*

- $r(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_u' = \mathcal{M}_f \circ (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$.

- $r(\mathcal{M}_u') \subset \mathcal{M}_u'$.

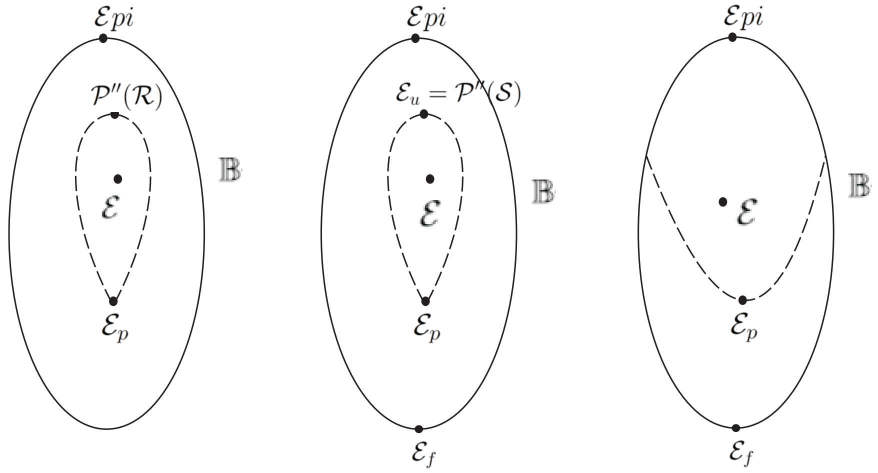
10. Fie $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. *Atunci* $k(\mathcal{M}_u') \subset \mathcal{M}_u'$.

6.7.3. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \subset \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. *Atunci* $r(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

$\downarrow$ Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}$. În pătratul

$$r(m) \cdot r^X = r^Y \cdot m$$

avem $r(m) \subset \mathcal{M}_u \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{J}''(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}$. $\uparrow$



$r(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ $\quad$ $s(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ $\quad$ $\pi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$

Figura 6.7.1

6.7.4. Pentru $\mathcal{S}$ şi Π avem

$$(\mathcal{P}''(\mathcal{S}), \mathcal{J}''(\mathcal{S})) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p), (\mathcal{P}''(\Pi), \mathcal{J}''(\Pi)) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f).$$

Corolar. *1. Pentru* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$ *avem* $s(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

2. Pentru $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}$ *avem* $\pi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. $\uparrow$

6.7.5. Propoziţie. *Fie* Π *subcategoria spaţiilor complete cu topologie slabă. Atunci functorul reflector* $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Pi$ *nu este un monofunctor.*

$\downarrow$ Fie τ un cardinal, şi K corpul peste care se examinează spaţiile vectoriale din $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Mai departe, fie $X = K^\tau, \sigma^X : \sigma X \to X$ Σ-coreplica lui X, iar $\pi^{\sigma X} : \sigma X \to \pi\sigma X$ Π-replica lui σX. Atunci

$$\sigma^X = f \cdot \pi^{\sigma X} \tag{1}$$

pentru un f, unde $f = \pi(\sigma^X)$. Avem $f \in \mathcal{E}_u$ şi $\sigma^X \in \mathcal{M}ono$. Dacă π ar fi un monofunctor, atunci $f \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Astfel pe spaţiul vectorial K^τ există două topologii slabe comparabile. Deci $f \in \mathcal{I}so$ ([Gr, 1973], Ch. 4, p.6, Proposition 11). Astfel $\sigma^X \in \mathcal{M}_u$ - situaţie posibilă pentru τ finit. $\uparrow$

6.7.6. Corolar. *1. Functorul reflector* $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_0$ *nu este un monofunctor.*

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \Gamma_0$. *Atunci functorul reflector* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *nu este un monofunctor.*

3. În laticea $\mathbb{R}(\Gamma_0)$ *nu există functori reflectori care să fie monofunctori.*

$\downarrow$ 1. Ţinem cont că

$$\pi = g_0 \cdot s.$$

2 şi 3. Evident $\uparrow$

6.7.7. Propoziţie. *Fie* Σ *subcategoria spaţiilor cu cea mai fină topologie local convexă, iar* $\sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma$ *functorul coreflector. Atunci* σ *nu este un epifunctor.*

$\downarrow$ Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, Y un subspaţiu dens propriu, iar $b : Y \to X$ incluziunea canonică. Atunci $b \in \mathcal{E}pi$, iar $\sigma(b) \neq \mathcal{E}pi$ (vezi [Gr, 1973], Ch.4, p.6, Proposition 8). $\uparrow$

6.7.8. Exemplu. *Fie* $\mathcal{T} = \lambda^*_\Sigma(\tilde{\mathcal{M}})$, *şi* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ *functorul coreflector (vezi 7.2). Atunci:*

1. t *nu este un epifunctor.*

2. Pentru $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ *functorul coreflector* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *nu este un epifunctor.* $\uparrow$

6.7.9. Notaţii. *Fie* $\mathbb{R}_{ex}$ *clasa subcategoriilor refective care sunt închise în raport cu extensiile:* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$*-factorobiecte;*

Fie $\mathbb{R}_{ne}$ *clasa subcategoriilor reflective care nu sunt închise în raport cu extensiile.*

Clasa subcategoriilor închise în raport cu extensiile $\mathbb{R}_{ex}$ *este* $\mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0) : \mathbb{R}_{ex} = \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$.

Fie $\mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$ clasa subcategoriilor $\mathcal{E}_u$-reflective închise în raport cu extensiile.

6.7.10. Examinăm spacţiul Hilbert $l^2_{\mathcal{I}}$ cu mulţimea de indici I (vezi [Pt, 1965], p.1.1.7). În acest spaţiu evidenţiem subspaţiul E_I format din elementele $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$, unde $x_i \neq 0$ doar pentru un număr finit de coordonate. Stabilim pe subspaţiul E_I topologia indusă din spaţiul $l^2_{\mathcal{I}}$. Fie $\mathcal{R}$ subcategoria plină a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, formată din subspaţiile de forma E_I^τ pentru un cardinal arbitrar τ : $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(E_I)$. Deci $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

Deoarece însăşi elementele spaţiului $l^2_{\mathcal{I}}$ au nu mai mult decât un număr numerabil de coordonate nenule ([Pt, 1972], Propoziţia 1.1.5), rezulă că subspaţiul E_I este dens în spaţiul $l^2_{\mathcal{I}}$. Deci Γ_0-replica spaţiului E_I este spaţiul $l^2_{\mathcal{I}}$: $g_0(E_I) = l^2_{\mathcal{I}}$. Dacă $l^2_{\mathcal{I}}$ ar aparţine subcategoriei $\mathcal{R}$, atunci $l^2_{\mathcal{I}}$ s-ar realiza ca un subspaţiu al spaţiului E_I^τ pentru un cardinal τ. Deoarece $l^2_{\mathcal{I}}$ ca obiect dual mic (Teorema 3.3.3.), putem spune că $l^2_{\mathcal{I}}$ ar fi un subspaţiu al spaţiului E_I^n pentru un număr natural n. Contradicţia obţinută ne demonstrează următorul rezultat.

Teoremă. *Subcategoria $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(E_I)$ are următoarele proprietăţi:*

1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

2. Subcategoria $\mathcal{R}$ nu este închisă în raport cu extensiile.

3. În laticea $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ există o clasă proprie de elemente din $\mathbb{R}_{ne}$, care nu sunt închise în raport cu extensiile. ↑

6.7.11. Exemplu. $\mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0) \cap \mathbb{R}(\mathcal{M}_p) = \{\Gamma_0\}$.

6.7.12. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}$;

b) $g_0(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

2. Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}_{ex}$. Atunci $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}_{ex}$.

3. Examinăm condiţiile:

a) $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma)$;

b) $g(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Atunci $a \Rightarrow b$.

Dacă $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P}), \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$, atunci $b \Rightarrow a$.

6.7.13. Problemă. *Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}_{ex}$. În ce condiţii $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}_{ex}$.*

6.7.14. Ca şi obiectele injective obiectele universale trebuie definite în raport cu o clasă de morfisme.

Definiţie. *Fie A o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}$, iar $\mathcal{M}$ o clasă de morfisme. Obiectul $B \in |\mathcal{C}|$ se numeşte obiect $\mathcal{M}$-universal pentru subcategoria $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{A} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}P(B)$.*

6.7.15. Exemple. *1. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_u}P(K) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_u}(\Pi)$, adică corpul K peste care se examenează spaţiile vectoriale este un obiect $\mathcal{M}_u$-universal pentru categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru orice obiect*

$X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ Π-replica lui $\pi^X : X \to \pi X \in \mathcal{M}_u$, iar $\pi X = K^\tau$.

2. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. Atunci K este un obiect $\mathcal{M}$-universal pentru subcategoria $\mathcal{R}$.

3. În topologia generală şi în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cel mai des se examinează obiecte $\mathcal{M}_p$-universale şi $\mathcal{M}_f$-universale.

Astfel corpul numerelor reale R este obiect $\mathcal{M}_f$-universal pentru subcategoria spaţiilor Hewitt:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} P(R) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\Pi).$$

4. Subcategoria spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h$ poate fi scrisă

$$\mathcal{T}h = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P([0,1]) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P((0;1)) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(R).$$

5. Subcategoria spaţiilor compacte

$$\mathcal{C}omp_2 = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} P([0,1]).$$

6. Subcategoria spaţiilor zero dimensionale

$$\mathcal{Z} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(\mathbb{D}),$$

unde $\mathbb{D}$ este spaţiul compact format din două puncte.

7. Subcategoria spaţiilor zero dimensionale şi compacte

$$\mathcal{Z}_c = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} P(\mathbb{D}).$$

6.7.16. Examinăm clasa $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ de subcategorii $\mathcal{E}_u$-reflective a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru elementele acestei clase a fost abordată problema existenţei obiectelor $\mathcal{M}_p$-universale.

1. **$\mathcal{S}$ subcategoria spaţiilor cu topologie slabă.** Corpul K este obiect $\mathcal{M}_p$-universal.

2. **$u\mathcal{N}$ subcategoria spaţiilor ultranucleare.** Spaţiul l^2 cu topologia nucleară este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal $u\mathcal{N} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(nl^2)$ (vezi [Br, 1968]).

Fie A un spaţiu ce conţine ca subspaţiu spaţiul ℓ_2 cu topologia nucleară. Atunci $u\mathcal{N}$-replica obiectului A este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $u\mathcal{N}$. În particular, $u\mathcal{N}$-replica oricărui spaţiu Banach infinit-dimensional este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $u\mathcal{N}$ ([D, M, S, 1972], Teorema 3.1 şi Teorema 8.3.7).

3. **$\mathcal{N}$ subcategoria spaţiilor nucleare.** Spaţiul Fréchet al şirurilor rapid descrescătoare este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal [K, K, 1966].

4. $\mathcal{S}h$ **subcategoria spaţiilor Schwartz** [Rn, 1973], Spaţiul Banach c_0 înzestrat cu topologia k_0 este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $\mathcal{S}h$. (c_0, k_0) este $\mathcal{S}h$-replica obiectului $c_0 : (c_0, k_0) = \mathcal{S}_h c_0$, unde $\mathcal{S}_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}h$ este functorul reflector.

$$\mathcal{S}h = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(s_h c_0).$$

Topologia k_0 pe spaţiul vectorial c_0 este determinată de seminormele:

$$q_\lambda(\mu) = \sup \mid \lambda_n \mid\mid \mu_n \mid,$$

unde $\lambda, \mu \in c_0$.

[A.Todd]. Fie A un spaţiu Banach infinit dimensional şi separabil. Atunci $\mathcal{S}h \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(A)$.

Astfel dacă A este un astfel de spaţiu, atunci

$$\mathcal{S}h = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(\mathcal{S}_h A).$$

$\mathcal{S}h$-replica spaţiilor $c_0(m), \ell_\infty(m), C_1(m)$ sau $\mathcal{C}([0,1])$ este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $\mathcal{S}h$ (vezi [Rn, 1973], Teorema 2.4).

6.7.17. Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ două subcategorii reflective ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu functorii reflectori $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$. Vom considera că pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele lrX şi rlX sunt izomorfe şi vom scrie $lrX = rlX$. Fie $l^X : X \to lX,\ r^X : X \to rX,\ l^{rX} : rX \to lrX$ şi $r^{lX} : lX \to rlX$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{R}$-replicile obiectelor respective. Există atunci morfismele $l(r^X) : lX \to lrX$ şi $r(l^X) : rX \to rlX$ astfel încât

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l^X"] \arrow[d, "r^X"'] & lX \arrow[d, dashed, "l(r^X)"', shift right] \arrow[d, "r^{lX}", shift left] \\
rX \arrow[r, "l^{rX}", shift left] \arrow[r, dashed, "r(l^X)"', shift right] & lrX{=}rlX
\end{tikzcd}$$

Figura 6.7.2.

$$l(r^X) \cdot l^X = l^{rX} \cdot r^X, \tag{1}$$

$$r(l^X) \cdot r^X = r^{lX} \cdot l^X. \tag{2}$$

Propoziţie. *Fie că pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele lrX şi rlX sunt izomorfe. Atunci:*

1. a) $l^{rX} = r(l^X)$,

b) $r^{lX} = l(r^X)$,

c) $l^{rX} \cdot r^X = r^{lX} \cdot l^X$.

2. Functorii l *şi* r *comută:* $l \cdot r = r \cdot l$.

$\downarrow$ 1. a) Vom considera X ca subspaţiu vectorial al spaţiilor lX şi rX, care la rândul lor le vom considera subspaţii vectoriale ale spaţiului lrX, iar morfismele l^X, r^X, l^{rX} şi r^{lX} ca aplicaţii identice ale unor submulţimi în mulţimi mai mari. Mai departe, mulţimea X este densă în spaţiile lX, rX şi lrX. Atunci din egalitatea (1) rezultă că morfismul $l(r^X)$ coincide cu aplicaţia identică a submulţimii lX în mulţimea $lrX : l(r^X) = r^{lX}$.

b) Se demonstrează în acelaşi mod.

c) Rezultă din a) şi b).

2. Să demonstrăm că functorii $l \cdot r$ şi $r \cdot l$ coincid pe morfisme. Fie $f : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Scriem egalităţile (1) şi (2) pentru obiectul Y :

$$l(r^Y) \cdot l^Y = l^{rY} \cdot l^Y, \tag{3}$$

$$r(l^Y) \cdot r^Y = r^{lY} \cdot l^Y, \tag{4}$$

cât şi egalităţile

$$l^{rX} = r(l^X) \tag{5}$$

$$r^{lX} = l(r^X) \tag{6}$$

$$l^{rX} \cdot r^X = r^{lX} \cdot l^X \tag{7}$$

$$l^{rY} = r(l^Y) \tag{8}$$

$$r^{lY} = l(r^Y) \tag{9}$$

$$l^{rY} \cdot r^Y = r^{lY} \cdot l^Y \tag{10}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "l^X"'] \arrow[dr, "r^X"] & & & Y \arrow[dl, "r^Y"'] \arrow[dd, "l^Y"] \\
& rX \arrow[r, "r(f)"] \arrow[dd, "l^{rX} = r(l^X)"] & rY \arrow[dd, "r(l^Y) = l^{rY}"'] & \\
lX \arrow[rrr, "l(f)"] \arrow[dr, "r^{lX} = l(r^X)"'] & & & lY \arrow[dl, "r^{lY} = l(r^Y)"] \\
& rlX = lrX \arrow[r, shift left, "lr(f)"] \arrow[r, shift right, "rl(f)"'] & rlY = lrY &
\end{tikzcd}
$$

Figura 6.7.3.

Avem

$$lr(f) \cdot r^{lX} \cdot l^X = (\text{din}(7)) = lr(f) \cdot l^{rX} \cdot r^X = l^{rY} \cdot r(f) \cdot r^X =$$

$$= (\text{din}(9)) = r(l^Y) \cdot r(f) \cdot r^X = r(l^Y) \cdot r^Y \cdot f = (\text{din}(10)) = r^{lY} \cdot l^Y \cdot f =$$

$$= r^{lY} \cdot l(f) \cdot l^X = rl(f) \cdot r^{lX} \cdot l^X,$$

i.e.

$$lr(f) \cdot r^{lX} \cdot l^X = rl(f) \cdot r^{lX} \cdot l^X. \tag{11}$$

Deoarece $r^{lX} \cdot l^X$ este un epi, deducem că

$$lr(f) = rl(f). \qquad \uparrow (12)$$

6.7.18. Fie $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ doi functori coreflectori cu proprietatea: pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele ktX şi tkX sunt izomorfe şi vom scrie $ktX = tkX$. Mai departe, fie $k^X : kX \to X, t^X : tX \to X, k^{tX} : ktX \to tX, t^{kX} : tkX \to kX$ $\mathcal{K}$- şi $\mathcal{T}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$
\begin{tikzcd}
ktX{=}tkX \arrow[r, shift left, "t^{kX}"] \arrow[r, shift right, dashed, "k(t^X)"'] \arrow[d, shift right, "k^{tX}"'] \arrow[d, shift left, dashed, "t(k^X)"] & kX \arrow[d, "k^X"] \\
tX \arrow[r, "t^X"] & X
\end{tikzcd}
$$

Figura 6.7.4

$$t^X \cdot t(k^X) = k^X \cdot t^{tX}, \tag{1}$$

$$k^X \cdot k(t^X) = t^X \cdot k^{tX}. \tag{2}$$

Propoziţie. *Fie că pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele ktX şi tkX sunt izomorfe: $ktX = tkX$. Atunci:*

1. a) $k^{tX} = t(k^X)$;

b) $t^{kX} = k(t^X)$;

c) $k^X \cdot t^{kX} = t^X \cdot k^{tX}$.

2. Functorii k şi t comută: $k \cdot t = t \cdot k$. $\uparrow$

6.7.19. Fie $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ un functor coreflector şi unul reflector şi pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele krX şi rkX sunt izomorfe: $krX = rkX$. Notăm $k^X : kX \to X,\ r^X : X \to rX, k^{rX} : krX \to rX$ şi $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{K}$-coreplicile şi $\mathcal{R}$-replicile obiectelor respective. Atunci:

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, shift left, "r^{kX}"] \arrow[r, shift right, dashed, "k(r^X)"'] \arrow[d, "k^X"'] & krX=rkX \arrow[d, shift right, "k^{rX}"'] \arrow[d, shift left, dashed, "r(k^X)"] \\
X \arrow[r, "r^X"] & rX
\end{tikzcd}$$

Figura 6.7.5

$$r^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot k(r^X), \tag{1}$$

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX}. \tag{2}$$

Propoziţie. *Fie că pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ obiectele krX şi rkX sunt izomorfe: $krX = rkX$. Atunci:*

1. a) $r^{kX} = k(r^X)$;

b) $k^{rX} = r(k^X)$;

c) $k^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot r^{kX}$.

2. Functorii k şi r comută: $k \cdot r = r \cdot k$. $\uparrow$

Capitolul 7. Divizarea laticei $\mathbb{R}$ de o structură de factorizare

7.1. Clasa subcategoriilor $\mathcal{P}$-reflective $\mathbb{R}(\mathcal{P})$

În acest capitol vom considera că $\mathcal{C}$ este o categorie local şi colocal mică completă la stânga.

7.1.1. Notaţii. *Fie $\mathcal{R}_0$ o subcategorie a categoriei $\mathcal{C}, \mathbb{R}$ laticea tuturor subcategoriilor reflective în $\mathcal{C}$, şi $\mathbb{R}_0 = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}\}$. Atunci orice structură de factorizare de dreapta $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ divizează clasa $\mathbb{R}_0$ în următoarele trei subclase:*

- clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ a sbcategoriilor $\mathcal{P}$-reflective;

- clasa $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ a subcategoriilor $\mathcal{I}$-reflective;

- clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}_0 \setminus (\mathbb{R}(\mathcal{P}) \cup \mathbb{R}(\mathcal{I}))) \cup \{\mathcal{C}\}$, subcategorii ce nu-s nici $\mathcal{P}$-reflective, nici $\mathcal{I}$-reflective, la care se adaugă categoria $\mathcal{C}$ pentru a fi deseori o sublatice completă. Fiecare două din aceste clase au exact un element comun - subcategoria $\mathcal{C}$.

d^* : Fie $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}(\mathcal{C})$.

- $\mathbb{K}_0 = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}\}$;

- $\mathbb{K}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K}_0 \mid \mathcal{K}$ este $\mathcal{P}$-coreflectivă$\}$;

- $\mathbb{K}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K}_0 \mid \mathcal{K}$ este $\mathcal{I}$-coreflectivă$\}$;

- $\mathbb{K}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathbb{K}_0 \setminus (\mathbb{K}(\mathcal{P} \cup \mathcal{K}(\mathcal{I}))) \cup \{\mathcal{C}\}$.

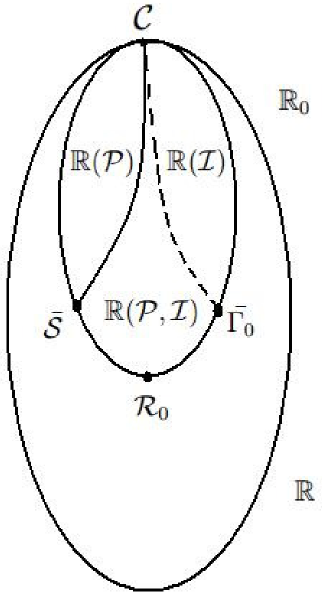


Figura 7.1.1

7.1.2. Exemple. *1. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare cu clasa $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}$ono-ereditară, iar $\mathcal{R}_0$ o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}_0$, şi $\mathbb{R}(\mathcal{I}) = \mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = \{\mathcal{C}\}$.*

2. Fie $\mathcal{R}_0$ o subcategorie $\mathcal{I}$-reflectivă. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = \{\mathcal{C}\}$, şi $\mathbb{R}(\mathcal{I}) = \mathbb{R}_0$.

7.1.3. Propoziţie. *1. Clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ posedă cel mai mic element $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R}_0)$.*

2. Fie că $\varepsilon\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{P}$. În particular, dacă clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Atunci

$$\mathbb{R}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}_0 \mid \bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{R}\}. \uparrow$$

7.1.4. Propoziţie. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu limite proiective $\mathcal{P}$-colocal mică şi $\varepsilon\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{P}$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ este o latice completă cu cel mai mic element $\bar{\mathcal{S}}$ şi cel mai mare $\mathcal{C}$.* $\uparrow$

7.1.5. Propoziţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare de dreapta în categoria $\mathcal{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_0$:*

1. $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{S}}$.

2. $\mathcal{P}'_d(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}''_d(\mathcal{R})$. $\uparrow$

7.1.6. Propoziţie. *Fie că $\mathcal{V}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}ono$, şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$ (referitor la $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ vezi p.6.6.1 înlocuind Π cu $\mathcal{R}_0$). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{P}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. $\uparrow$

7.1.7.Remarca. *1. Deoarece în categorii abeliene există o singură structură de factorizare şi orice bimorfism este un izomorfism pentru a avea o divizare netrivială a laticei $\mathbb{R}_0$ trebuie să apelăm la structurile de factorizare de dreapta.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ dacă $\mathcal{R}_0 \neq 0$, în particular, dacă $\mathcal{R}_0 = \Pi$ (Π este cel mai mic element nenul în $\mathbb{R}$), atunci $\mathcal{V}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}ono$. În acest caz putem fixa o structură de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$.

3. Pentru categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ când $\mathcal{R}_0 = \Pi$ condiţia $\varepsilon\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{P}$ se îndeplineşte de fiecare dată când clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară.

7.1.8. Să examinăm divizarea laticelor $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{K}$ de unele structuri de factorizare.

1. *Struturile de factorizare $(\mathcal{B}^{\llcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$, $\mathcal{B} \supset \mathbb{B}ic$* (vezi 7.2.4). $\mathbb{R}(\mathcal{B}^{\llcorner}) \supset \mathbb{R}(\varepsilon\Gamma_0) = \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, deoarece $\varepsilon\Gamma_0 \subset \mathcal{B}^{\llcorner}$.

$\mathbb{R}(\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) = \mathbb{R}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{R}\}$, unde $\mathcal{L} = S_{\mathcal{B}^{\perp}}(\Pi) = \lambda(\mathcal{B})$ (vezi 7.3.1).

$\mathbb{K}(\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) = \mathbb{K}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{K} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{T}\}$, unde $\mathcal{K} = Q_{\mathcal{B}^{\perp}}(\Sigma) = \lambda^*(\mathcal{B})$ (vezi p.7.3.1).

2. *Structurile de factorizare $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^{\perp}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.*

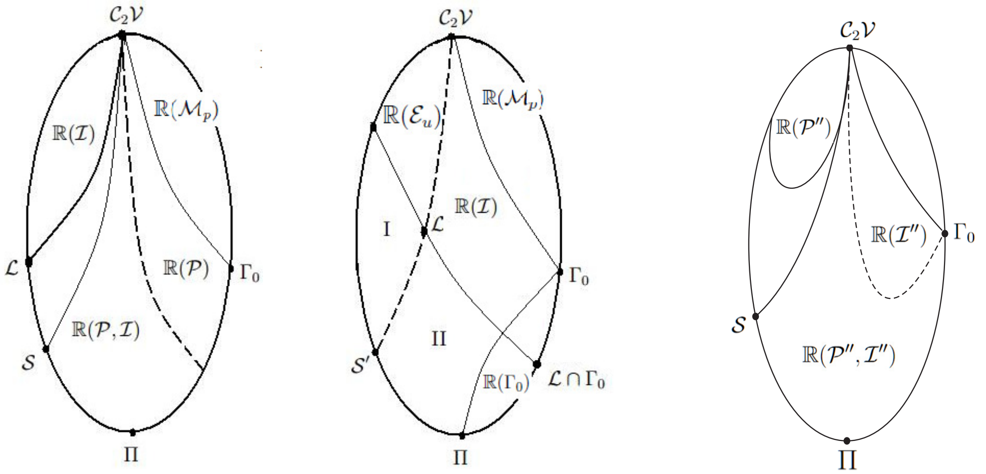
$\mathbb{R}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L} \cap \Gamma \subset \mathcal{R}\}$, unde $\mathcal{L} = S_{\mathcal{B}^{\perp}}(\Pi) = \lambda(\mathcal{B})$.

$\mathbb{R}(\mathcal{B}^{\llcorner}) \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

$\mathbb{K}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = \mathbb{K}(\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$.

3. *Structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.*

$\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \Gamma_0 \subset \mathcal{R}\}$. $\quad \mathbb{K}(\mathcal{M}_p) = \mathbb{K}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.
$\mathbb{R}(\mathcal{E}_u) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{R}\}$. $\quad \mathbb{K}(\mathcal{E}_u) = \mathbb{K}$.



Divizarea laticei $\mathbb{R}$ cazul $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{B}^{\top}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$

Divizarea laticei $\mathbb{R}$ cazul $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^{\top}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$

Divizarea laticei $\mathbb{R}$ cazul $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$

Figura 7.1.2

7.1.9. Exemple.
Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$. *Atunci*
1. $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{R})) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.
2. $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) = \mathbb{K}$.
3. $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R})) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

7.1.10. Exemple. 1.Structura de factorizare $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.

$$\mathbb{K}(\mathcal{E}pi) = \mathbb{K}, \quad \mathbb{K}(\mathcal{M}_f) = \mathbb{R}(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\},$$

$$\mathbb{R}(\mathcal{E}pi) = \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}(\mathcal{M}_f) = \mathbb{R}(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}.$$

2. Structura de factorizare $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$.

$$\mathbb{K}(\mathcal{E}_f) = \mathbb{K}(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}, \quad \mathbb{K}(\mathcal{M}ono) = \mathbb{K}.$$

$$\mathbb{R}(\mathcal{E}_f) = \mathbb{R}(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}, \quad \mathbb{R}(\mathcal{M}ono) = \mathbb{R}.$$

7.1.11. Exemple. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci:*
1. $\mathbb{K}(\mathcal{I}''(\mathcal{R})) = \mathbb{K}(\mathcal{M}_u) = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} \mid \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}\}$.
2. $\mathbb{K}(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) = \mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$.

7.1.12. Problemă. *Clasa* $\mathbb{K}(\mathcal{E}_p)$ *conţine şi alte elemente în afară de elementul* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*?*

7.2. Clasa subcategoriilor $\mathcal{I}$-reflective $\mathbb{R}(\mathcal{I})$

7.2.1.Exerciţiu. *Fie* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}_0, \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ *şi* $\mathcal{R}_1 \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$. *Atunci* $\mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$.

7.2.2. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare cu clasa* $\mathcal{I}$ *completă la dreapta. Atunci în clasa* $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ *există cel mai mic element* $\bar{\Gamma}_0$, *iar obiectele subcategoriei* $\bar{\Gamma}_0$ *sunt obiecte* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I})$*-injective.*

$\downarrow$ Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I}, (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I})^{\perp})$, iar $\bar{\Gamma}_0 = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}_0)$. Se verifică că $\bar{\Gamma}_0$ este cel mai mic element în $\mathbb{R}(\mathcal{I})$. $\uparrow$

7.2.3. Corolar. *În categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *există o clasă proprie de structuri de factorizare* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *astfel încât:*

1. Clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ *posedă cel mai mic element* $\bar{\mathcal{S}}$.

2. Clasa $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ *posedă cel mai mic element* $\bar{\Gamma}_0$. $\downarrow$

7.2.4. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, iar $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

Teoremă. *1.* $\mathcal{L}$ *este cel mai mic element în clasa* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$.

2. $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{R}(\mathcal{B}^{\urcorner})$.

3. $\mathcal{L} \cap \Gamma_0$ *este cel mai mic element în clasa* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$.

$\downarrow$ 1. Evident.

2. Este suficient de demonstrat că $\varepsilon\Gamma_0 \perp \mathcal{E}_u$.

3. Rezultă din faptul că $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 = g_0(\mathcal{L})$, deoarece $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. $\uparrow$

7.3. Clasa subcategoriilor reflective $\mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$

7.3.1. Notaţii. Operaţiile $\lambda(\mathcal{A})$ şi $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$. *Fie* $\mathcal{A}$ *o clasă de epimorfisme. Notăm cu* $\lambda(\mathcal{A})$ *subcategorie plină a tuturor obiectelor* Z *cu proprietatea:*

Pentru orice $p : X \to Y \in \mathcal{A}$ *orice morfism* $f : X \to Z$ *se extinde prin* p*:*

$$f = g \cdot p$$

pentru un g.

Dacă $\mathcal{L}$ *este o clasă de obiecte sau o subcategorie şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) = \lambda(\mathcal{A})$, *unde* $\mathcal{A} = \{r^X | X \in |\mathcal{L}|\}$.

Operaţiile $\lambda^*(\mathcal{A})$ *şi* $\lambda^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ *se definesc dual, unde* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}ono$, *sau* $\mathcal{A}$ *este o subcategorie şi* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_0$. *Atunci:*

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$ *cu functorul reflector* $b : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$.

$\bar{G}(\mathcal{R})$ este clasa tuturor $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ cu functorul reflector $t : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$ ce verifică egalitatea $r = t \cdot b$.

$G(\mathcal{R}) = \bar{G}(\mathcal{R}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{I})$.

E posibil ca clasa $G(\mathcal{R})$ să fie şi vidă. Mai departe, fie $\mathcal{A}''(\mathcal{R}) = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ (vezi 10.3).

Vom presupune că $\mathcal{A}''(\mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă cu functorul reflector $a'' : \mathcal{C} \to \mathcal{A}''(\mathcal{R})$ (vezi 10.3).

Dacă clasa $G(\mathcal{R})$ nu este vidă, atunci $\mathcal{A}'(\mathcal{R}) = \cap\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \in G(\mathcal{R})\}$ cu functorul reflector $a' : \mathcal{C} \to \mathcal{A}'(\mathcal{R})$.

7.3.2. Propoziţie. *1. $\bar{G}(\mathcal{R}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R}_0 \mid \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}''(\mathcal{R})\}$.*

2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{L} = \mathcal{R}$ pentru orice $\mathcal{L} \in \bar{G}(\mathcal{R})$.

$\downarrow$ 1. Fie că $\mathcal{T} \in \bar{G}(\mathcal{R})$, şi $A \in \mid \mathcal{T} \mid$. Atunci pentru orice obiect $X \in \mid \mathcal{C} \mid, i^X : bX \to rX$ este $\mathcal{T}$-replica obiectului bX. Astfel orice morfism din obiectul bX în obiectul A se extinde prin i^X. Deci $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}''$.

Demonstrăm incluziunea $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$. Pentru orice obiect X al subcategoriei $\mathcal{R}$ morfismele r^X, b^X şi i^X sunt iso. Deci $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$. Reciproc, deoarece $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{A}''$-replicile obiectului X ale subcategoriei $\mathcal{B}$ este i^X, rezultă că i^X este şi $\mathcal{T}$-replica acestui obiect pentru orice $\mathcal{T}$ ce verifică relaţia $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}''$.

2. Rezultă din egalitatea $a'' \cdot l = r$. $\uparrow$

7.3.3. Fie clasa $\mathcal{I}$ completă la dreapta. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ posedă cel mai mic element $\bar{\Gamma}_0$.

Teoremă. *În condiţiile indicate:*

1. $\bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{A}''(\mathcal{R})$. În particular $\mathcal{A}''(\mathcal{R}) \in G(\mathcal{R})$.

2. $G(\mathcal{R}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{I}) \mid \mathcal{A}'(\mathcal{R}) \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{A}''(\mathcal{R})\}$.

3. Pentru orice subcategorii $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$ şi $\mathcal{M} \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$ functorii respectivi verifică egalitatea $r = m \cdot l$ atunci şi numai atunci, când $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ şi $\mathcal{M} \in G(\mathcal{R})$.

$\downarrow$ 1. În virtutea faptului că obiectele subcategoriei $\bar{\Gamma}_0$ sunt $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I})$-injective.

2. Evident.

3. Deoarece $a' \cdot b = a'' \cdot b = r$, rezultă că $g \cdot b = r$ pentru orice functor reflector $g : C \to \Gamma$, dacă $\Gamma \in G(\mathcal{R})$.

Reciproc. Fie $r = m \cdot t$. Să examinăm următoarea diagramă comutativă,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X \arrow[r, "b^X"] \arrow[d, "t^X"'] \arrow[dr, "r^X" near start] & bX \arrow[d, "i^X"] \arrow[dl, dashed, "t"' near start] \\
tX \arrow[r, dashed, "m^X"] & rX
\end{tikzcd}$$

Figura 7.3.1

unde t^X este $\mathcal{T}$-replica lui X, şi m^X $\mathcal{M}$-replica lui tX. Deoarece $b^X, t^X \in \mathcal{P}, i^X, m^X \in \mathcal{I}$, rezultă că avem două $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizări ale morfismului r^X. Există deci un izo t astfel încât

$$t^X = t \cdot b^X \tag{1}$$

$$i^X = m^X \cdot t. \tag{2}$$

Astfel $\mathcal{L} = \mathcal{B}$, şi $\mathcal{M} \in G(\mathcal{R})$. $\uparrow$

7.3.4. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ examinăm structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ şi subcategoria reflectivă Π a spaţiilor complete cu topologie slabă.

Atunci $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Pi) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\Pi) = \mathcal{S}$ subcategoria spaţiilor cu topologie slabă,

$$\lambda_\Pi(\mathcal{B}) = \lambda_\Pi(\mathcal{S}) = \mathcal{A}''(\Pi), \quad \Gamma_0 = \mathcal{A}'(\Pi).$$

Deci

$$G(\Pi) = \{\Gamma \in \mathbb{R} \mid \Gamma_0 \subset \Gamma \subset \mathcal{A}''\}.$$

Teoremă. *1. Subcategoria $\mathcal{A}''(\Pi)$ conţine toate spaţiile normate.*

2. Laticea $G(\Pi)$ conţine o clasă proprie de elemente.

$\downarrow$ 1. Fie X un spaţiu cu topologie slabă, şi $g_0^X : X \to g_0X$ Γ_0-replica lui. Atunci g_0^X este şi Π-replica acestui obiect. Deci g_0X este izomorf unui obiect de tipul K^τ, unde K este corpul peste care se definesc spaţiile vectoriale: $K = R$ sau $K = C$. Fie $f : X \to Y \to \hat{Y}$, unde Y este spaţiu normat, iar $\hat{Y}$ este completarea lui: $\hat{Y} = g_0Y$. Atunci

$$g_0^Y \cdot f = h \cdot g_0^X \tag{1}$$

pentru un morfism h. Deoarece g_0Y este un spaţiu Banach, spaţiul $hg_0^X(X)$ este finit dimensional (Teorema 3.3.3). Astfel subspaţiul $f(X)$ în Y este finit dimensional, deci este un spaţiu complet şi

$$f = h_1 \cdot g_0^X \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g_0^X"] \arrow[d, "f"'] & g_0X = K^\tau \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dl, dashed, "h_1"'] \\
Y \arrow[r, dashed, "g_0^Y"] & g_0Y
\end{tikzcd}$$

Figura 7.3.2

deoarece h ia valori în Y.

2. Fie X şi Y două spaţii normate necomplete şi dimensiunile lor algebrice verifică inegalităţile:

$$\chi_0 \leq \mathrm{d}imX < \mathrm{d}imY.$$

Mai departe, fie Γ_1 (respectiv: Γ_2) cea mai mică subcategorie reflectivă ce conţine spaţiul X (respectiv: Y) şi subcategoria Γ_0. Atunci subcategoria Γ_1 nu se conţine în subcategoria Γ_2. $\uparrow$

7.3.5. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ examinăm cazul $\mathcal{R}_0 = \Pi$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

Exerciţiu. *Structura de factorizare* $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *împarte clasa* $\mathbb{R}$ *în trei subclase proprii:* $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *şi* $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

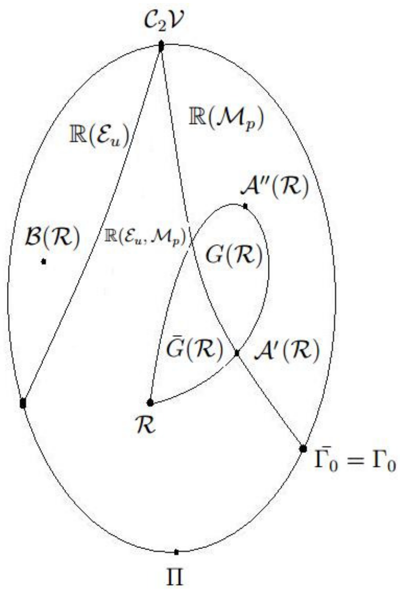


Figura 7.3.3

7.4. Cazul structurii de factorizare $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$

7.4.1. Orice subcategorie reflectivă $\mathcal{L}$ a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ defineşte în mod unic structura de factorizare $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$, cu clasa de proiecţii $\mathcal{M}_u$-ereditară. $\mathcal{L}$ este cel mai mic element în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{P}(\mathcal{L})) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{R}\}$.

Vom examina, ca exemplu, divizarea laticei $\mathbb{R}$ de structurile de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ şi $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$, când $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$.

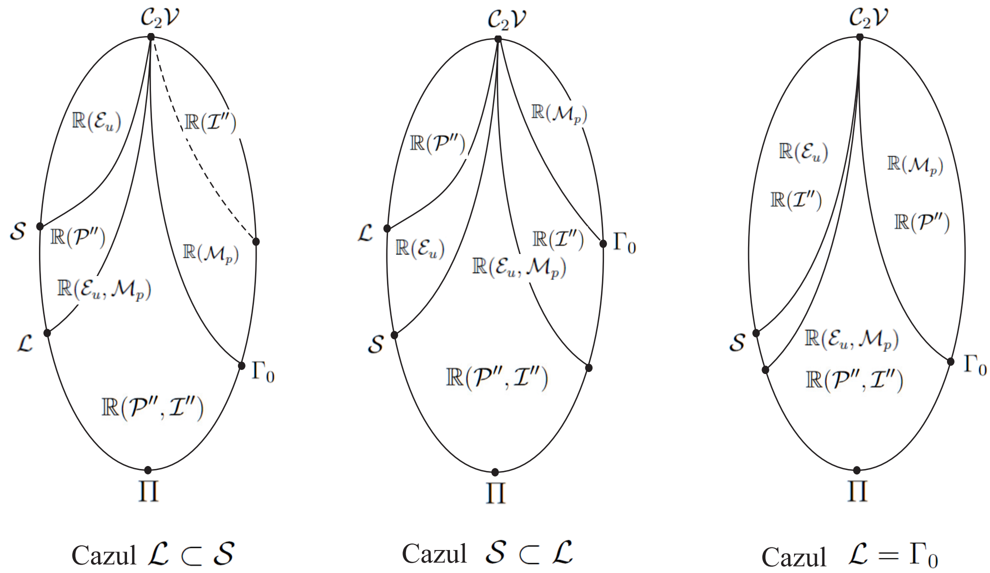


Figura 7.4.1

7.4.2. Fie două elemente arbitrare $\mathcal{B} \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'')$. Notăm $\mathcal{R} = \mathcal{B} \cap \Gamma$.

Propoziţie. *1. $\mathcal{B} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'')$ atunci şi numai atunci, când $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

2. $\mathcal{B} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ atunci şi numai atunci, când $\Gamma = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. Dacă $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\Gamma \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, atunci $\mathcal{B} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$.

$\downarrow$ 1. Fie X un obiect arbitrat al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $b^X : X \to bX$ $\mathcal{B}$-replica, şi $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica acestui obiect. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$, rezultă că

$$r^X = f^X \cdot b^X \qquad (1)$$

pentru un morfism f^X. Fie că $\mathcal{R}$ este $\mathcal{I}''$-reflectivă. Atunci $r^X \in \mathcal{I}''$, iar din egalitatea (1) deducem că şi $b^X \in \mathcal{I}''$. Dar $b^X \in \mathcal{P}''$. Astfel $b^X \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{I}'' = \mathcal{I}so$. Deci $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r^X"] \arrow[d, "b^X"'] & rX \\
bX \arrow[ur, dashed, "f^X"] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 7.4.2

Reciproc. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \Gamma = \Gamma$. Astfel $\mathcal{R}$ este $\mathcal{I}''$-reflectivă.

2. Fie X un obiect arbitrar al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}, g^X : X \to gX$ Γ-replica, şi $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica acestui obiect. Atunci

$$r^X = i^X \cdot g^X \tag{2}$$

pentru un morfism i^X.

Fie că $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\mathcal{P}''$-reflectivă. Atunci $r^X \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{M}_u$. Deoarece $g^X \in \mathcal{E}pi$, iar clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, din egalitatea (2) deducem că $i^X \in \mathcal{M}_u$. Astfel $r^X \in \mathcal{P}''$ şi clasa $\mathcal{P}''$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară (Teorema 6.6.14). Deci $g^X \in \mathcal{P}''$, sau $g^X \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{I}'' = \mathcal{I}so$.

Reciproc. Evident. $\uparrow$

7.4.3. În genere, nu orice element al laticei $\mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ poate fi obţinut ca intersecţia a două elemente - unul din clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$, şi altul din clasa $\mathbb{R}(\mathcal{I})$. Într-adevăr, fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$. Atunci $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{A}''(\mathcal{R})$, unde $r = a'' \cdot b$ este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea functorului reflector r conform structurii de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$. Dar în acest caz doar $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$, iar $\mathcal{A}''(\mathcal{R})$ aparţine clasei $\mathbb{R}(\mathcal{I})$, dacă $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I}, (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{I})^\perp)$ este o structură de factorizare de dreapta.

7.4.4. Examinăm structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ şi divizarea laticei $\mathbb{R}$ conform acestei structuri $\mathbb{R} : \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

Teoremă. *Fie $\mathcal{L}$ un element al laticei $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$. Atunci:*

1. $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A}''(\mathcal{L})$.

2. Functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ poate fi obţinut în doi paşi $l = a'' \cdot b$ sau în trei paşi $l = b \cdot a' \cdot b$.

3. Pentru orice două subcategorii reflective proprii $\mathcal{B} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi *$\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), \mathcal{B} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.* $\uparrow$

7.4.5. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P}'')$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

2. $\mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L})) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. Clasa $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ conţine toate elementele clasei $\mathbb{R}(\mathcal{I}(\mathcal{L}))$ şi unele elemente ale clasei $\mathbb{R}(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$.

7.5. Factorizarea functorului reflector şi a functorului liber

7.5.1. Vom examina factorizarea functorului liber $l : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $l : \mathcal{T}h \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ (vezi 4.3 şi 4.4).

Spaţiul X (în ambele cazuri) este un subspaţiu închis în spaţiul lX. Astfel spus, morfismul $l^X : X \to lX$ este un mono strict, adică aparţine clasei $\mathcal{M}_f$ a categoriei $\mathcal{U}_2$ sau $\mathcal{T}h$. Fie $\mathcal{C} = \mathcal{U}_2$ sau $\mathcal{C} = \mathcal{T}h$.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{U}_2$ sau $\mathcal{T}h$. Atunci pentru orice obiect $X \in \mid \mathcal{C} \mid$ $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului l^X este trivială $l^X = l^X \cdot 1$.* $\uparrow$

7.5.2. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă nenulă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$. Este bine ştiut că:

a) $r \cdot l : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{R}$ este functorul liber;

b) $r \cdot l : \mathcal{T}h \to \mathcal{R}$ este functorul liber.

Fie acum $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă nenulă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}$. Pentru un obiect arbitrar $X \in \mid \mathcal{C} \mid$ examinăm următoarele morfisme:

$l^X : X \to lX$ - obiectul liber;

$r^{lX} : lX \to rlX$ – $\mathcal{R}$-replica obiectului lX; rlX este obiectul $\mathcal{R}$-liber al obiectului X;

$X \to \tilde{r}X \to rlX$ – $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului $r^{lX} \cdot l^X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l^X"] \arrow[d, dashed, "e^X"'] & lX \arrow[d, "r^{lX}"] \\ \tilde{r}X \arrow[r, dashed, "m^X"] & rlX \end{tikzcd}$$

Figura 7.5.1

Astfel avem

$$r^{lX} \cdot l^X = m^X \cdot e^X. \qquad (1)$$

Notăm cu $\tilde{\mathcal{R}}$ subcategoria plină a tuturor $\mathcal{I}$-subobiectelor obiectelor subcategoriei $\mathcal{R}$. Menţionăm că suntem în categoria $\mathcal{C}$ şi aceste subobiecte nu sunt obligatoriu spaţii vectoriale.

Teoremă. *Corespondenţa* $X \mapsto (\tilde{r}X, e^X)$ *defineşte subcategoria* $\tilde{\mathcal{R}}$ *ca o subcategorie reflectivă a categoriei* $\mathcal{C}$, *iar morfismul* $m^X : \tilde{r}X \to rlX$ *realizează obiectul* rlX *ca obiect liber al obiectului* $\tilde{r}X$ *în categoria* $\mathcal{R}$. $\uparrow$

7.5.3. Exemple. *Fie* $\mathcal{C} = \mathcal{T}h$, *şi* $\mathcal{R} = \Pi$. *Atunci* $\tilde{\mathcal{R}} = Q$ *subcategoria spaţiilor Hewitt.*

2. Fie $\mathcal{C} = \mathcal{U}_2$, *şi* $\mathcal{R} = \Gamma_0$. *Atunci* $\tilde{\mathcal{R}}$ *este subcategoria spaţiilor uniforme Hausdorff complete.*

7.5.4. Probleme. *1. Fie* $\mathcal{L}$ *o subcategorie a categoriei* $\mathcal{C}$, *pentru care există functorul liber* $l : \mathcal{C} \to \mathcal{L}, \mathcal{R}$ *o subcategorie reflectivă a categoriei* $\mathcal{L}$, *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare a categoriei* $\mathcal{C}$.

În ce condiţii

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{L} = \mathcal{R}?$$

2. Fie $\mathcal{C} = \mathcal{U}_2$, $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *şi* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *în categoria* $\mathcal{U}_2$.

Să se examineze subcategoriile epireflective

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)).$$

3. Să se exameneze subcategoriile epireflective

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)); \quad \mathcal{L} \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \Gamma_0.$$

Capitolul 8. Latici de structuri de factorizare

8.1. Structura de factorizare $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{I}(\mathcal{A}))$

8.1.1. Notaţii. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare de dreapta în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ *o clasă de morfisme, şi*

$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{e \in \mathcal{E}pi\mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid \exists a \in \mathcal{A}$ *astfel încât* $\exists a \cdot e$ *şi* $a \cdot e \in \mathcal{P}\}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = (\mathcal{P}(\mathcal{A}))^{\llcorner}$.

8.1.2. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *şi* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\perp})$ *două structuri de factorizare de dreapta în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1. $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{I}(\mathcal{A}))$ *este o structură de factorizare de dreapta în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Clasa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *este* $\mathcal{A}$*-ereditară.*

3. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ *este cea mai mică clasă* $\mathcal{A}$*-ereditară, care conţine clasa* $\mathcal{P}$.

4. Dacă $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *este o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *atunci şi* $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{I}(\mathcal{A}))$ *este o strctură de factorizare.*

$\downarrow$ 1. O să verificăm că clasa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ este completă la dreapta (Definiţia 2.2.2) şi atunci $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{I}(\mathcal{A}))$ este o structură de factorizare (Teorema 2.5.4).

- $\mathcal{I}so\mathcal{C}_2\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Evident.

- $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \circ \mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Fie $e_1, e_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, unde

$$X \xrightarrow{\quad e_2 \quad} Y \xrightarrow{\quad e_1 \quad} Z$$

Există morfismele $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, astfel încât $a_1 \cdot e_1, a_2 \cdot e_1 \in \mathcal{P}$. Construim pătratele cocarteziene:

pe morfismele e_1 şi a_2

$$e_1' \cdot a_2 = a_2' \cdot e_1, \tag{1}$$

pe morfismele a_2' şi a_1

$$a_1' \cdot a_2' = a_2'' \cdot a_1 \tag{2}$$

Atunci $a_2', a_1', a_2'' \in \mathcal{A}$, şi

$$(a_1' \cdot e_1') \cdot a_2 = a_2'' \cdot (a_1 \cdot e_1) \tag{3}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele a_2 şi $a_1 \cdot e_1$. Deoarece $a_1 \cdot e_1 \in \mathcal{P}$, rezultă că $a_1' \cdot e_1' \in \mathcal{P}$. Dar şi $a_2 \cdot e_2 \in \mathcal{P}$. Deci $a_1' \cdot e_1' \cdot a_2 \cdot e_2 \in \mathcal{P}$ şi

$$a_1' \cdot e_1' \cdot a_2 \cdot e_2 = (a_2'' \cdot a_1) \cdot (e_1 \cdot e_2) \tag{4}$$

cu $a_2'' \cdot a_1 \in \mathcal{A}$ şi $e_1 \cdot e_2 \in \mathcal{E}pi$. Astfel am demonstrat că $e_1 \cdot e_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_2"] & Y \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "a_2"'] & Z \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, dashed, "a_2'"] & {} \arrow[d, dashed, "a_2''"] \\
 & {} \arrow[r, dashed, "e_1'"] & P_1 \arrow[r, "a_1'"] & P_2
\end{tikzcd}
$$

Figura 8.1.1

- Clasa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ este stabilă la dreapta.

Fie $e : X \to Y \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, iar

$$f' \cdot e = e' \cdot f \tag{4}$$

un pătrat cocartezian. Există un morfism $a \in \mathcal{A}$, astfel încât $a \cdot e \in \mathcal{P}$. Fie

$$a' \cdot f' = f'' \cdot a \tag{5}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele f' şi a. Atunci $a' \in \mathcal{A}$, iar

$$(a' \cdot e') \cdot f = f'' \cdot (a \cdot e) \tag{6}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele $a \cdot e$ şi f. Deci $a' \cdot e' \in \mathcal{P}, a' \in \mathcal{A}$ şi $e' \in \mathcal{E}pi$. Astfel am demonstrat că $e' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & Z \arrow[d, dashed, "f''"] \\
P \arrow[r, dashed, "e'"] & P_1 \arrow[r, dashed, "a'"] & P_2
\end{tikzcd}
$$

Figura 8.1.2

- Clasa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ este închisă în raport cu intersecţia unei familii de factorobiecte:

dacă $e_i : X \to X_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ şi $e = \wedge e_i$, atunci $e \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Într-adevăr, fie $e_i : X \to X_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, $a_i : X_i \to Z_i \in \mathcal{A}$ şi $a_i \cdot e_i \in \mathcal{P}, \forall i \in \Gamma$, iar $q : X \to L$ şi $q = \vee\{q_i \mid i \in \Gamma\}$ cu morfismele canonice $q_i : X_i \to L$:

$$q = q_i \cdot a_i, \forall i \in \Gamma \tag{7}$$

Pentru orice $i \in \Gamma$ fie

$$a_i' \cdot q_i = q_i' \cdot a_i \tag{8}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele q_i şi a_i. Atunci $a_i' \in \mathcal{A}$ şi fie $a : L \to P \quad a = \vee\{a_i' \mid i \in \Gamma\}$ cu morfismele canonice $p_i : L_i \to P$ ce verifică egalităţile

$$a = p_i \cdot a_i', \ \forall i \in \Gamma. \tag{9}$$

Atunci $a \in \mathcal{A}, a \cdot q = \vee\{a_i \cdot e_i \mid i \in \Gamma\}$ cu morfismele canonice $p_i \cdot q_i' : Z_i \to P$ ce verifică egalităţile

$$a \cdot q = (p_i \cdot q_i') \cdot (a_i \cdot e_i). \tag{10}$$

Avem $a \cdot q \in \mathcal{P}, a \in \mathcal{A}$ şi $q \in \mathcal{E}pi$. Deci $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_i"] \arrow[dr, "q"'] & X_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "q_i"] & Z_i \arrow[d, dashed, "q'"] \\
 & L \arrow[r, dashed, "a_i'"] \arrow[dr, dashed, "a"'] & L_i \arrow[d, dashed, "p_i"] \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

Figura 8.1.3

2. Fie $e \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ şi

$$e = a \cdot f \tag{11}$$

cu $a \in \mathcal{A}$. Deoarece $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_u$ (Teorema 6.3.2) şi clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, rezultă că $f \in \mathcal{E}pi$. Există un morfism $a_1 \in \mathcal{A}$ astfel încât $a_1 \cdot e \in \mathcal{P}$. Atunci $(a_1 \cdot a) \cdot f \in \mathcal{P}$ şi $f \in \mathcal{E}pi$, iar $a_1 \cdot a \in \mathcal{A}$. Deci $f \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

3. În primul rând, menţionăm că $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$: orice morfism $p \in \mathcal{P}$ se poate scrie

$$p = 1 \cdot p \tag{12}$$

cu $p \in \mathcal{E}pi$ şi $1 \in \mathcal{A}$.

Fie $\mathcal{E}$ o clasă $\mathcal{A}$-ereditară ce conţine clasa $\mathcal{P}$, şi $e \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Atunci există un morfism $a \in \mathcal{A}$ astfel încât $a \cdot e \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$. Deoarece clasa $\mathcal{E}$ este $\mathcal{A}$-ereditară, rezultă că $e \in \mathcal{E}$.

4. Avem $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Deci $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{I}(\mathcal{A}))$ este o structură de factorizare.

8.1.3. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. *Atunci* $(\mathcal{P}(\varepsilon\mathcal{R}), (\mathcal{P}(\varepsilon\mathcal{R}))^{\llcorner}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

$\downarrow$ În primul rând $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$ şi $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$ este unica structură de factorizare cu clasa de proiecţii $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$ $(\varepsilon\mathcal{R})$-ereditară (Teorema 6.6.12). $\uparrow$

8.1.4. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, (\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}, \mathcal{P} \subset \mathcal{E}'(\mathcal{K}), l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}, \mathcal{H} \subset \mathcal{E}pi$ *şi* $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$. *Dacă clasa* $\mathcal{I}$ *este* $\mathcal{H}$*-coereditară. Atunci şi clasa* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *este* $\mathcal{H}$*-coereditară.*

$\downarrow$ Referitor la clasa $\mathcal{E}'(\mathcal{K}) = (\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))^{\urcorner}$ vezi 6.6.10*. Cât priveşte condiţia $l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ vezi 9.1.10 p.9.

Fie $i : X \to Y \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$. Deoarece $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$, rezultă că $\mathcal{I}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{I}$. Dacă

$$i = m \cdot h \tag{1}$$

cu $h \in \mathcal{H}$, atunci $m \in \mathcal{I}$. Să demonstrăm că $m \in \mathcal{I}(\mathcal{B})$. O să verificăm că $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \perp m$. Fie $e : A \to B \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ şi

$$m \cdot u = v \cdot e. \tag{2}$$

Atunci există un $b : B \to C \in \mathcal{B}$ astfel încât $b \cdot e \in \mathcal{P}$. Examinăm $\mathcal{L}$-replicile obiectelor X şi Y şi $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor A şi B. Astfel

$$l^Y \cdot v = w \cdot b \tag{3}$$

pentru un w şi

$$l(m) \cdot l^Z = l^Y \cdot m \tag{4}$$

cu $l(m) \in \mathcal{I}$. Mai departe, avem

$$w \cdot (b \cdot e) = l(m) \cdot (l^Z \cdot u) \tag{5}$$

cu $b \cdot e \in \mathcal{P}$ şi $l(m) \in \mathcal{I}$. Deci

$$l^Z \cdot u = t \cdot b \cdot e \tag{6}$$

şi

$$w = l(m) \cdot t \tag{7}$$

pentru un t.

De asemenea

$$e \cdot k^A = k^B \cdot k(e), \tag{8}$$

şi $b \cdot k^B$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui $\mathcal{C}$. Deoarece $kB \in \mid \mathcal{K} \mid$ şi $l^Z \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, rezultă că

$$t \cdot b \cdot k^B = l^Z \cdot f \tag{9}$$

pentru un f. Avem

$$l(m) \cdot l^Z \cdot u \cdot k^A = (\text{din}(5)) = w \cdot b \cdot e \cdot k^A = (\text{din}(7)) = l(m) \cdot t \cdot b \cdot e \cdot k^A = (\text{din}(8) =$$

$$l(m) \cdot t \cdot b \cdot k^B \cdot k(e) = (\text{din}(9)) = l(m) \cdot l^Z \cdot f \cdot k(e),$$

i.e.

$$l(m) \cdot l^Z \cdot u \cdot k^A = l(m) \cdot l^Z \cdot f \cdot k(e), \tag{10}$$

sau

$$u \cdot k^A = f \cdot k(e). \tag{11}$$

În afară de pătratul (8) avem şi pătratul

$$(b \cdot e) \cdot k^A = (b \cdot k^B) \cdot k(b \cdot e) \tag{12}$$

cu $b \cdot e \in \mathcal{P}$. Deci (12) este un pătrat cocartezian (Teorema 6.6.10*). Atunci din (11) rezultă că

$$u = g \cdot b \cdot e \tag{13}$$

şi

$$f = g \cdot b \cdot k^B \tag{14}$$

pentru un g. Egalitatea (13) demonstrează că $e \perp m$. ↑

$$\begin{tikzcd}
 & kA \arrow[r, "k(e)=k(b\cdot e)"] \arrow[d, "k^A"'] & kB=kC \arrow[d, "k^B"'] \arrow[dr, "k^C=b\cdot k^B"] \arrow[ddl, dashed, "f"'] & \\
 & A \arrow[r, "e\in\mathcal{E}pi"] \arrow[rr, bend right, "b\cdot e\in\mathcal{P}"'] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "b\in\mathcal{B}"] \arrow[dr, "v"] & C \arrow[dll, dashed, "g"'] \arrow[ddll, dashed, "t"] \arrow[dd, dashed, bend left, "w"] \\
X \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "i\in\mathcal{I}"'] & Z \arrow[rr, "m\in\mathcal{I}"] \arrow[d, "l^Z"'] & & Y \arrow[d, "l^Y"] \\
 & lZ \arrow[rr, "l(m)\in\mathcal{I}"] & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 8.1.4

8.1.5. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K},\mathcal{L}),(\mathcal{T},\mathcal{R}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \subset \mathcal{L}, \mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$ *şi* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{T}),\mathcal{M}'(\mathcal{T}))$. *Atunci:*

1. $(\mathcal{P}(\mathcal{B}),\mathcal{I}(\mathcal{B})) \in \mathbb{B}$ *şi clasa* $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ *este* $\mathcal{B}$*-ereditară.*

2. Clasa $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *este* $\mathcal{E}pi$*-coereditară.*

3. Clasa $\mathcal{I}$ *este coereditară şi* $l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

$\downarrow$ 1 şi 2 rezultă din Teorema 8.4.1.

3. Verificăm că se îndeplineşte condiţiile teoremei precedente.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \mu\mathcal{K} \subset \mu\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{M}'(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{E}'(\mathcal{T}) \subset \mathcal{E}'(\mathcal{K}) \Rightarrow \mathcal{P} \subset \mathcal{E}'(\mathcal{K})$.

Mai departe, $\mathcal{I} = \mathcal{M}'(\mathcal{T}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{T})$. Astfel clasa $\mathcal{I}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

Să verificăm condiţia $l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. În primul rând, $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{I}$. În al doilea rând, fie $b : X \to Y \in \mu\mathcal{T} = \varepsilon\mathcal{R}$. $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$-replicile obiectelor ne dau următoarea diagramă comutativă.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, "b"] \arrow[dd, "l^X"'] & & rX{=}rY \\
& Y \arrow[ur, "r^Y"] \arrow[d, "l^Y"'] & \\
lX \arrow[r, "l(b)"] & lY \arrow[uur, "r^{lY}"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 8.1.5

Avem $r^{lX} \cdot l(b) \cdot l^X \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $l^X \in \mathcal{E}pi$. Deci $l(b) \cdot r^{lX} \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deoarece $l(b) \in \mathcal{E}pi$, deducem, că $l(b) \in \varepsilon\mathcal{R} = \mu\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$. $\uparrow$

8.2. Structura de factorizare $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E},\mathcal{M})$

8.2.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})$ *clasa tuturor morfismelor* $\mathrm{e} : X \to Y \in \mathcal{E}$ *pentru care*

$$e \cdot k^X = k^Y \cdot k(e) \tag{1}$$

este un pătrat cocartezian (fig.8.2.1). Mai departe, fie $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) = (\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}))^{\perp}$ *şi* $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}),\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}))$.

8.2.2. Notaţiile duale. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ *o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{I})$ *clasa tuturor morfismelor* $m : X \to Y \in \mathcal{I}$ *pentru care*

$$r(m) \cdot r^X = r^Y \cdot m \tag{2}$$

este un pătrat cartezian (fig. 8.2.2).

Mai departe, fie $\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) = (\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}))^{\top}$ şi $\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{P},\mathcal{I}) = ((\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}), \beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}))$.

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[r, "k(e)"] \arrow[d, "k^X"'] & kY \arrow[d, "k^Y"] \\ X \arrow[r, "e"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 8.2.1

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "r^X"'] & Y \arrow[d, "r^Y"] \\ rX \arrow[r, "r(m)"] & rY \end{tikzcd}$$

Figura 8.2.2

8.2.3 Lemă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ cu functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare.*

1. Dacă $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$, atunci $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}_u$.

2. Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, atunci $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}pi$.

$\downarrow$ Fie $p : X \to Y$ şi examinăm pătratul comutativ

$$p \cdot k^X = k^Y \cdot k(p).$$

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[r, "k(p)"] \arrow[d, "k^X"'] & kY \arrow[d, "k^Y"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 8.2.3

1. Dacă $p \in \mathcal{E}_u$, atunci $p \cdot k^X \in \mathcal{E}_u$. Deci $k^Y \cdot k(p) \in \mathcal{E}_u$, iar $k^Y \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Clasa $\mathcal{E}_u$ este $\mathcal{M}ono$-ereditară (Exerciţiul 2.6.4. p.2), deci $k(p) \in \mathcal{E}_u$.

2. Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, atunci $k^Y \in \mathcal{M}_u$. Deci $k^Y \cdot k(p) \in \mathcal{E}pi$ şi clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară (Teorema 2.6.2). Astfel $k(p) \in \mathcal{E}pi$.

8.2.4. Teorema. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă cu functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

1. Dacă $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}pi$, atunci $(\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}), \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M}))$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. $\mu\mathcal{K} \subset \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M})$. În particular, $\mathcal{K}$ este o subcategorie $\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M})$-coreflectivă.

3. Clasa $\mathcal{E}$ este $((\mu\mathcal{K})^\top, \mu\mathcal{K})$-ereditară atunci şi numai atunci când $\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$. În această situaţie $(\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}), \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M})) = ((\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}, \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K}))$ şi perechea dată este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$\downarrow$ 1. Verificăm că perechea $(\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}), \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M}))$ are clasa de proiecţii completă la dreapta.

- Condiţiile $\mathcal{I}so \subset \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$ şi $\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}) \circ \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E} \subset \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$ evident se îndeplinesc.

- Clasa $\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$ este stabilă la dreapta. Fie $e : X \to Y \in \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$, iar

$$e' \cdot f = f' \cdot e \tag{1}$$

un pătrat cocartezian.

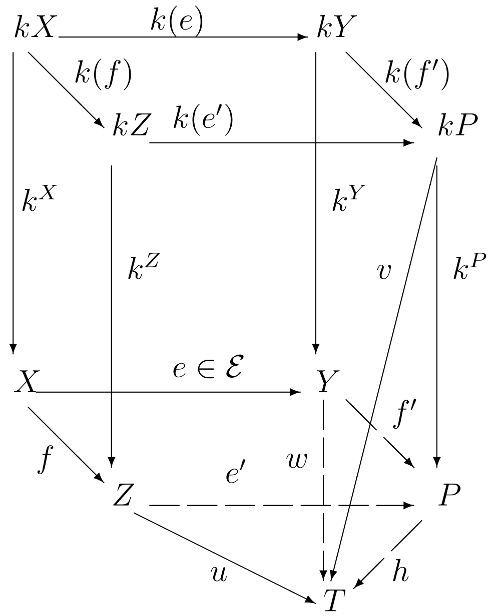


Figura 8.2.4

Examinând $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor respective obţinem următoarele egalităţi

$$e \cdot k^X = k^Y \cdot k(e) \tag{2}$$

pătrat ce este cocartezian, deoarece $e \in \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$,

$$f \cdot k^X = k^Z \cdot k(f), \tag{3}$$

$$f' \cdot k^Y = k^P \cdot k(f'), \tag{4}$$

$$e' \cdot k^Z = k^P \cdot k(e'). \tag{5}$$

Din egalitatea (1) rezultă

$$k(f') \cdot k(e) = k(e') \cdot k(f). \tag{6}$$

Trebuie să demonstrăm că pătratul (5) este cocartezian. Fie

$$u \cdot k^Z = v \cdot k(e'). \tag{7}$$

Atunci

$$u \cdot f \cdot k^X = (\text{din}(3)) = u \cdot k^Z \cdot k(f) = (\text{din}(7)) = v \cdot k(e') \cdot k(f) = (\text{din}(7)) = v \cdot k(f') \cdot k(e).$$

i.e.

$$(u \cdot f) \cdot k^X = (v \cdot k(f')) \cdot k(e) \tag{8}$$

şi deoarece (2) este un pătrat cocartezian, rezultă că

$$u \cdot f = w \cdot e, \tag{9}$$

$$v \cdot k(f') = w \cdot k^Y \tag{10}$$

pentru un morfism $w : Y \to T$. Ţinând cont că (1) de asemenea este un pătrat cocartezian din egalitatea (9), deducem că

$$u = h \cdot e', \tag{11}$$

$$w = h \cdot f' \tag{12}$$

pentru un morfism $h : P \to T$. Mai departe,

$$h \cdot k^P \cdot k(e') = (\text{din}(5)) = h \cdot e' \cdot k^Z = (\text{din}(11)) = u \cdot k^Z = (\text{din}(7)) = v \cdot k(e'),$$

i.e.

$$h \cdot k^P \cdot k(e') = v \cdot k(e'). \tag{13}$$

În baza ipotezei $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}pi$, rezultă că $k(e') \in \mathcal{E}pi$, atunci

$$v = h \cdot k^P. \tag{14}$$

Unicitatea morfismului h ce verifică egalitățile (11) şi (14) rezultă din faptul că $e' \in \mathcal{E}$.

- Fie $\{e_i : X \to X_i \mid i \in \Gamma\}$ o familie de elemente a clasei $\mathcal{E}$, şi $e = \wedge\{e_i \mid i \in \Gamma\}$. Atunci $e \in \mathcal{E}$. Examinăm $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor respective, obţinem următoarele egalităţi

$$e_i \cdot k^X = k^{X_i} \cdot k(e_i), i \in \Gamma, \tag{15}$$

$$q_i \cdot k^{X_i} = k^Y \cdot k(q_i), i \in \Gamma, \tag{16}$$

Deoarece $\{q_i, i \in \Gamma\}$ sunt morfismele canonice, atunci

$$e = q_i \cdot e_i, \forall i \in \Gamma. \tag{17}$$

Deci

$$k(e) = k(q_i) \cdot k(e_i), \forall i \in \Gamma, \tag{18}$$

$$e \cdot k^X = k^Y \cdot k(e). \tag{19}$$

Pentru orice $i \in \Gamma$ pătratul (15) este cocartezian. Trebuie de demonstrat că şi pătratul (20) este şi el cocartezian. Fie

$$u \cdot k^X = v \cdot k(e) \tag{20}$$

Avem

$$u \cdot k^X = (\text{din}(20)) = v \cdot k(e) = (\text{din}(18)) = v \cdot k(q_i) \cdot k(e_i),$$

i.e.

$$u \cdot k^X = (v \cdot k(q_i)) \cdot k(e_i). \tag{21}$$

Deoarece (15) este un pătrat cocartezian, rezultă că

$$u = w_i \cdot e_i, \tag{22}$$

$$v \cdot k(q_i) = w_i \cdot k^{X_i}, i \in \Gamma \tag{23}$$

pentru un w_i. Din egalităţile (22) rezultă că există un morfism h astfel încât

$$w_i = h \cdot q_i, \quad i \in \Gamma \tag{24}$$

$$u = h \cdot e. \tag{25}$$

Avem

$$h \cdot k^Y \cdot k(e) = (\text{din}(19)) = h \cdot e \cdot k^X = (\text{din}(25)) = u \cdot k^X = (\text{din}(20)) = v \cdot k(e)$$

i.e.

$$h \cdot k^Y \cdot k(e) = v \cdot k(e). \tag{26}$$

Deoarece familia $\{e_i \mid i \in \Gamma\}$ aparţine clasei $\mathcal{E}$, rezultă că $e \in \mathcal{E}$. Deci $k(e) \in \mathcal{E}pi$. Astfel din egalitatea (26) rezultă

$$h \cdot k^Y = v. \tag{28}$$

Unicitatea morfismului h ce verifică egalităţile (25) şi (26) rezultă din faptul că $e \in \mathcal{E}pi$.

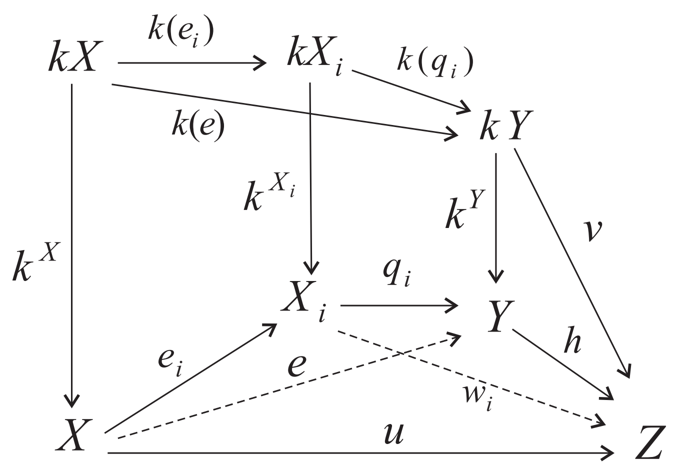


Figura 8.2.5

2. Fie $b : X \to Y \in \mu\mathcal{K}$ şi o să demonstrăm că $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}) \perp b$. Într-adevăr, fie $e : A \to B \in \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E})$ şi

$$b \cdot u = v \cdot e. \tag{28}$$

Examinăm pătratul cocartezian

$$e \cdot k^A = k^B \cdot k(e). \tag{29}$$

Dacă $k^X : kX \to X$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X, atunci $b \cdot k^X : kX \to Y$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului Y. Există un morfism $w : kB \to kY$ astfel încât

$$v \cdot k^B = b \cdot k^X \cdot w. \tag{30}$$

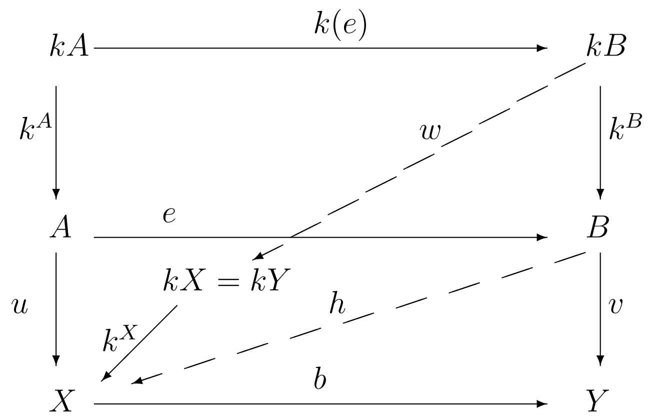


Figura 8.2.6

Avem

$$b \cdot k^X \cdot w \cdot k(e) = (\text{din}(30)) = v \cdot k^B \cdot k(e) = (\text{din}(29)) = v \cdot e \cdot k^A = (\text{din}(28)) = b \cdot u \cdot k^A,$$

i.e.

$$b \cdot k^X \cdot w \cdot k(e) = b \cdot u \cdot k^A. \tag{31}$$

Deoarece $b \in \mathcal{M}ono$, avem

$$k^X \cdot w \cdot k(e) = u \cdot k^A. \tag{32}$$

Pătratul (29) este cocartezian. Deci există un morfism $h : B \to X$ astfel încât

$$u = h \cdot e, \tag{33}$$

$$k^X \cdot w = h \cdot k^B. \tag{34}$$

Egalitatea (33) demonstrează că $e \perp b$.

3. Fie clasa $\mathcal{E}$ $((\mu\mathcal{K}^\top, \mu\mathcal{K})$-ereditară.

În baza Teoremei 2.7.3* $((\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}, \mu\mathcal{K} \circ \mathcal{M})$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. O să demonstrăm, că $\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}) = (\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}$, de unde rezultă că $(\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}), \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{M})) = ((\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}, (\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{M})$.

$\alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E}) \subset (\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}$. Fie $e : X \to Y \in \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Atunci pătratul (1) este cocartezian şi $k(e) \in \mathcal{K}.\mathcal{K} \perp \mu\mathcal{K}$, deci $k(e) \in (\mu\mathcal{K})^\top$, sau $e \in (\mu\mathcal{K})^\top$. Astfel $e \in (\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}$.

$(\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E} \subset \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{K})$. Fie $e : X \to Y \in (\mu\mathcal{K})^\top \cap \mathcal{E}$ şi o să demostrăm că pătratul (1) este cocartezian. Fie

$$b \cdot k^X = t \cdot k(e) \tag{35}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi $k(e)$. Atunci

$$e = u \cdot b, \tag{36}$$

$$k^Y = u \cdot t \tag{37}$$

pentru un morfism $u : P \to Y$. Avem $k^X \in \mathcal{E}_u$, deci $t \in \mathcal{E}_u$, iar din egalitatea (37) rezultă că $t \in \mathcal{M}ono$. Astfel $t \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Clasa $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ este a-coereditară, deci $u \in \mathcal{M}ono$. Atunci $u \in \mu\mathcal{K}$. Mai departe, clasa $(\mu\mathcal{K})^\top$ este coereditară (Teorema 2.4.3* p.8). Deci $e \in (\mu\mathcal{K})^\top$ şi din egalitatea (36) rezultă că $u \in (\mu\mathcal{K})^\top$. Astfel $u \in (\mu\mathcal{K})^\top \cap \mu\mathcal{K} = \mathcal{I}so$. Am demonstrat că pătratul (1) este cocartezian, şi $e \in \alpha_\mathcal{K}(\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(e)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & kY \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[dd, "k^Y"] \\
& P \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
X \arrow[ur, dashed, "b"] \arrow[rr, "e"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 8.2.7

Fie $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$ şi o să demonstrăm că clasa $\mathcal{E}$ este $((\mu\mathcal{K})^{\top}, \mu\mathcal{K})$-ereditară. Într-adevăr fie $m \cdot b \in \mathcal{E}$, unde $b \in (\mu\mathcal{K})^{\top}$, şi $m \in \mu\mathcal{K}$. Trebuie să demonstrăm că $b \in \mathcal{E}$. Examinăm $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea

$$b = i \cdot e. \tag{38}$$

Atunci $m \in \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K}), i \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$. Deci $m \cdot i \in \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$. Astfel morfismul $m \cdot i$ poate fi scris

$$m \cdot i = i_1 \cdot m_1 \tag{39}$$

cu $i_1 \in \mathcal{M}$ şi $m_1 \in \mu\mathcal{K}$. Avem

$$i_1 \cdot m_1 \cdot e = (\text{din}(40)) = m \cdot i \cdot e = (\text{din}(39)) = m \cdot b \in \mathcal{E}.$$

Deci $i_1 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$, şi $m \cdot i = \mu\mathcal{K}$. Deoarece $i \in \mathcal{M}ono$ din relaţia $m \cdot i \in \mu\mathcal{K}$, rezultă că $i \in \mu\mathcal{K}$. $b \in (\mu\mathcal{K})^{\top}$ şi din egalitatea (38), deoarece clasa $(\mu\mathcal{K})^{\top}$ este coereditară, deducem că $i \in (\mu\mathcal{K})^{\top}$. Definitiv $i \in (\mu\mathcal{K})^{\top} \cap \mu\mathcal{K} = \mathcal{I}so$, şi din egalitatea (38) deducem că $b \in \mathcal{E}$. Egalitatea $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$ rezultă din Teorema 2.7.3*. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "e"] \arrow[d, "b \in (\mu\mathcal{K})^{\top}"'] & P \arrow[r, dashed, "m_1 \in \mu\mathcal{K}"] \arrow[dl, dashed, "i"'] & T \arrow[d, dashed, "i_1 \in \mathcal{M}"] \\
X \arrow[rr, "m \in \mu\mathcal{K}"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 8.2.8

8.2.4*. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$.*

1. Dacă $r(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{M}ono$, atunci $(\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}), \beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})) \in \mathbb{B}$.

2. $\varepsilon\mathcal{R} \subset \alpha_{\mathcal{R}}(\mathcal{E})$. În particular, $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$-reflectivă.

3. Clasa $\mathcal{M}$ este $(\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}), \beta_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}))$-coereditară atunci şi numai atunci, când $\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}) = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \varepsilon$. În acest caz $(\beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}), \beta_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})) = ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp} \cap \mathcal{M})$ şi perechea dată este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

8.2.5. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.*

1. $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}_u)$ este clasa tuturor morfismelor $b : X \to Y \in \mathcal{E}_u$ pentru care pătratul

$$b \cdot k^X = k^Y \cdot k(b)$$

este cocartezian.

2. $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_p) = \mathcal{M}_p \circ \mu\mathcal{K}$.

$\downarrow$ $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, şi clasa $\mathcal{E}_u$ este $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$-ereditară. $\uparrow$

8.2.6. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$.*

1. $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}pi)$ este clasa tuturor morfismelor $b : X \to Y$ pentru care pătratul

$$b \cdot k^X = k^Y \cdot k(b)$$

este cocartezian.

2. $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_f) = \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K})$.

3. $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_f)$ sunt acele morfisme din clasa $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_p)$ care au imagine închisă.

$\downarrow$ $1-2$. Deoarece clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară (Teorema 2.6.2).

3. Fie $m : X \to Y \in \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_p)$ şi m are imaginea închisă. Atunci

$$m = i \cdot b \tag{1}$$

cu $i \in \mathcal{M}_p$ şi $b \in \mu\mathcal{K}$. Deoarece b este o aplicaţie bijectivă rezultă că i are imagine închisă. Deci $i \in \mathcal{M}_f$.

Reciproc. Fie $i \cdot b \in \mathcal{M}_f \cdot (\mu\mathcal{K})$, cu $i \in \mathcal{M}_f$ şi $b \in \mu\mathcal{K}$. Deoarece b este o aplicaţie bijectivă, şi i are imaginea închisă, rezultă că şi $i \cdot b$ are imaginea închisă.

8.2.7. Corolar (vezi [B, G, 1973]). $\alpha_{\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_u) = (\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ *(vezi 2.4.9).*

2. $\alpha_{\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f) = (\mathcal{E}'_p, \mathcal{M}'_u)$, $\mathcal{E}'_p = (\varepsilon\Gamma_0) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}'_u = \mathcal{M}_f \circ (\mu\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}_f \circ (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$ şi clasa $\mathcal{M}'_u$ este clasa monomorfismelor universale cu imagine închisă.

8.2.8. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

1. Fie $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'(\mathcal{K})$. Atunci $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

2. Fie $\mathcal{E}'(\mathcal{K}) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$. Atunci $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K}))$.

$\downarrow$ Conform definiţiei clasei $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ morfismul $e : X \to Y$ aparţine clasei $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ atunci şi numai atunci, când $e \in \mathcal{E}_u$ şi pătratul

$$e \cdot k^X = k^Y \cdot k(e)$$

este cocartezian. $\uparrow$

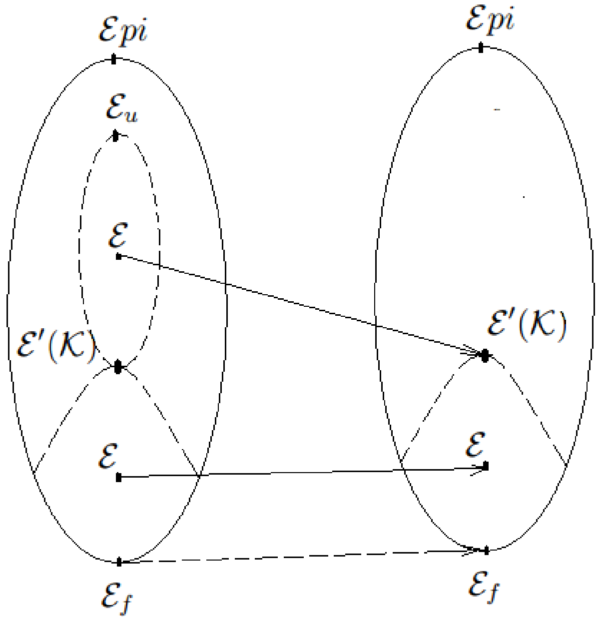


Figura 8.2.9

8.3. Supremul a două subcategorii reflective

8.3.1. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$, iar $l^X : X \to lX$ şi $r^X : X \to rX$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{R}$-replica lui X. Există diverse morfisme f, g astfel încât

$$f \cdot l^X = g \cdot r^X. \tag{1}$$

- Dacă $f \in \mathcal{M}_u$, atunci şi $g \in \mathcal{M}_u$.
- Dacă $f \in \mathcal{E}pi$, atunci şi $g \in \mathcal{E}pi$.
- Dacă $f \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

O să examinăm cazul când $f \cdot g \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Astfel de situaţie o avem când:

1. $f = r^{lX}$ şi $g = r(l^X)$.
2. $g = l^{rX}$ şi $f = l(r^X)$.
3. $f \cdot l^X = g \cdot r^X$ este pătrat cocartezian construit pe morfismele l^X şi r^X.
4. f şi g sunt Π-replicile obiectelor respective.

Fie că avem pătratul comutativ (1) şi pe morfismele f şi g construim pătratul cartezian

$$f \cdot w^X = g \cdot v^X. \tag{2}$$

Atunci există un morfism $u^X : X \to uX$, astfel încât

$$l^X = w^X \cdot u^X, \tag{3}$$

$$r^X = v^X \cdot u^X. \tag{4}$$

8.3.2. Exerciţii. *Fie $f \cdot g \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Atunci*

1. $v^X, w^X, u^X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

2. w^X este $\mathcal{L}$-replica lui uX.

3. v^X este $\mathcal{R}$-replica lui uX.

4. $l^{rX} \cdot v^X = l(r^X) \cdot w^X$ este un pătrat cartezian.

5. $r^{lX} \cdot v^X = r^{lX} \cdot w^X$ este un pătrat cartezian.

6. $\pi^{lX} \cdot w^X = \pi^{rX} \cdot v^X$ este un pătrat cartezian.

7. $w^X \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$.

8. $v^X \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$.

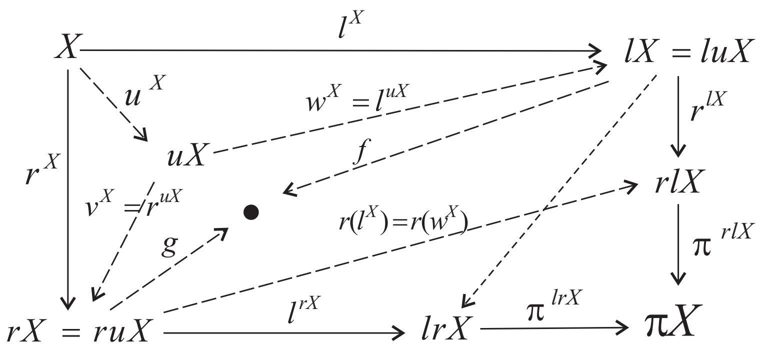


Figura 8.3.1

8.3.3. Notaţii. *Fie $\mathcal{U}$ subcategoria plina a tuturor obiectelor izomorfe cu obiecte de forma $uX, X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$.*

8.3.3. Teoremă. *1. Subcategoria $\mathcal{U}$ este supremul subcategoriilor $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ în laticea $\mathbb{R}$, şi u^X este $\mathcal{U}$-replica lui X.*

2. $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}''(\mathcal{L})}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{I}''(\mathcal{L})}(\mathcal{R})$.

3. $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}''(\mathcal{R})}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{I}''(\mathcal{R})}(\mathcal{L})$.

4. $l^X = w^X \cdot u^X$ este $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$-factorizarea lui l^X.

5. $r^X = v^X \cdot u^X$ *este* $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$*-factorizarea lui* r^X. $\uparrow$

8.3.5. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *şi*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \{r^X \mid X \in \mid \mathcal{L} \mid\}, \mathbb{B}(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} \mid \varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{P}, \mathcal{A} \subset \mathcal{I}\}.$$

8.3.6. Lemă. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\varepsilon\mathcal{L} \perp \mathcal{A}(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. $\uparrow$

8.3.7. Lemă. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci*

1. $((\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner\urcorner}, (\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner}) \in \mathbb{B}(\mathcal{L}, \mathcal{R})$.

2. $(\mathcal{A}^{\urcorner}, \mathcal{A}^{\urcorner\llcorner}) \in \mathbb{B}(\mathcal{L}, \mathcal{R})$.

3. $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L})) \in \mathbb{B}(\mathcal{L}, \mathcal{R})$.

4. $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R})) \in \mathbb{B}(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. $\uparrow$

8.3.8. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$, *iar* $\mathcal{A}(\mathcal{L}, \mathcal{P}) \subset \mathcal{I}$. *Atunci*

1. $\mathcal{L} \vee \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$.

2. $r^X = v^X \cdot u^X$ *este* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$*-factorizarea lui* r^X.

3. $l^X = w^X \cdot u^X$ *este* $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$*-factorizarea lui* l^X. $\uparrow$

8.3.9. Corolar. *Pentru a obţine* $\mathcal{U}$*-replica unui obiect arbitrar* X *al categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *trebuie să efectuăm* $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$*-factorizarea* $\mathcal{R}$*-replicii acestui obiect, sau* $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$*-factorizarea* $\mathcal{L}$*-replicii lui.*

8.3.10. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, *iar* $\mathcal{L} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. *Atunci* $\mathcal{T} = \mathcal{L} \vee (\mathcal{T} \cap \mathcal{R})$.

2. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, *iar* $l^X : X \to lX, r^X : X \to rX$ *şi* $u^X : X \to uX$ *replicile respective ale unui obiect arbitrar* $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$.

- Fie că există un morfism $f : rX \to lX$ *astfel încât* $l^X = f \cdot r^X$. *Atunci* $r^X \sim u^X$.

- Fie că există un morfism $g : lX \to rX$ *astfel încât* $r^X = g \cdot l^X$. *Atunci* $l^X \sim u^X$.

3. Fie $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$. *Atunci* $\varepsilon\mathcal{U} = (\varepsilon\mathcal{L}) \cap (\varepsilon\mathcal{R})$.

8.4. Elemente complementare în laticea $\mathbb{R}$

8.4.1. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Mai departe, fie $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}''}(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}'' = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$, şi $\bar{G}(\mathcal{R}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}''\}$ (vezi 7.3).

Lemă. *Fie* $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$. *Atunci:*

1. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \Gamma$.

2. $\mathcal{B} \cap \Gamma = \mathcal{R}$. $\uparrow$

8.4.2. Lemă. *Fie elementele* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{R}$ *incomparabile în laticea* $\mathbb{R}$ *şi* $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$. *Atunci şi elementele* $\mathcal{L}$ *şi* Γ *sunt incomparabile.* $\uparrow$

8.4.3. Lemă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. *Atunci* $\mathcal{L} \vee \Gamma = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\uparrow$

8.4.4. Fixăm în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$. Factorizând functorul reflector $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Pi$ după această structură de factorizare, obţinem:

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Pi) = \mathcal{S}$ categoria spaţiilor cu topologie slabă,

$\Gamma''(\Pi)$ conţine toate spaţiile normate, astfel $\Gamma_0 \subset \Gamma''(\Pi)$ (Teorema 7.3.4),

$\bar{G}(\Gamma) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{R} \mid \Pi \subset \mathcal{L} \subset \Gamma''(\Pi)\}$,

$G(\Gamma) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{R} \mid \Gamma_0 \subset \mathcal{L} \subset \Gamma''(\Pi)\}$,

$\Gamma(\Pi)$ conţine o clasă proprie de elemente (Teorema 7.3.4).

Teoremă. *Fie* Γ_1 *şi* Γ_2 *două elemente comparabile dar diferite* $(\Gamma_1 < \Gamma_2)$ *din laticea* $G(\Pi)$. *Atunci elementele* $\Pi, \mathcal{S}, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *formează o sublatice pentagon în laticea* $\mathbb{R}$.

$\downarrow$ În baza Lemei 8.4.3 avem $\mathcal{S} \vee \Gamma_1 = \mathcal{S} \vee \Gamma_2 = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

În baza Lemei 8.4.1 avem $\mathcal{S} \wedge \Gamma_1 = \mathcal{S} \wedge \Gamma_2 = \Pi$. $\uparrow$

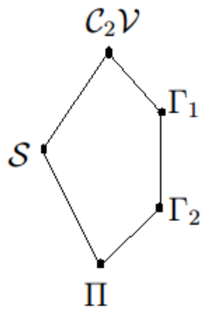


Figura 8.4.1

8.4.5. Corolar. *Laticea* $\mathbb{R}$ *nu este modulară: elementele* $\Pi, \mathcal{S}, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *formează o sublatice pentagon* (vezi [Gre, 1978]). $\uparrow$

8.4.6. Corolar. *Orice element al laticei* $G(\Pi)$ *este un element complementar pentru elementul* $\mathcal{S}$. *Astfel elementul* $\mathcal{S}$ *are o clasă proprie de elemente complementare.* $\uparrow$

Deoarece laticele $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{B}_{\varepsilon p}$ sunt antiizomorfe (Teorema 6.6.14), obţinem

8.4.7. Teoremă. *Laticea de structuri de factorizare* $\mathbb{B}_{\varepsilon p}$ *nu este modulară.*

8.4.8. Remarcă. *Autorul nu cunoaşte alte exemple de elememte complementare în laticea* $\mathbb{R}$ *decât* $(\mathcal{S}, \Gamma_0)$ *şi* $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \Pi)$.

8.4.9. Probleme. *1. Laticea* $\mathbb{K}$ *pentru categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este nemodulară?*

2. Fie că structura de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *împarte clasa* $\mathbb{R}$ *în trei subclase netriviale. Când aceste latici sunt nemodulare?*

3. Fie că structura de factorizare $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *împarte clasa* $\mathbb{K}$ *în trei subclase netriviale. Când aceste clase sunt nemodulare?*

4. Clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ *este nemodulară?*

8.5. Elemente complementare în laticea $\mathbb{B}$

8.5.1. Examinăm în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ laticea $\mathbb{B}$ a structurilor de factorizare. În 2.5 au fost examinate operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ în această latice. În orice categorie $\mathcal{C}$ dacă $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ şi $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ sunt structuri de factorizare, atunci $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ este cel mai mic element, iar $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ cel mai mare element în clasa structurilor de factorizare. Deci ele sunt reciproce complementare.

8.5.2. Fie $\mathcal{B}$ o clasă de morfisme bicompletată în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}, (\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare cu clasa de injecţii $\mathcal{M}, (\mathcal{B}, \mathcal{B}^{\perp})$-coereditară, $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare cu clasa de proiecţii $\mathcal{P}$ $(\mathcal{B}^{\top}, \mathcal{B})$-ereditară. În baza Teoremei 2.7.3 şi a dualei sale, perechile

$$(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{E}, \mathcal{B}^{\perp} \cap \mathcal{M}), \quad (\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{B}^{\top}, \mathcal{I} \circ \mathcal{B})$$

sunt structuri de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

Teoremă. *1. Clasa $\mathcal{I}_1$ este $\mathcal{P}$-coereditară.*

2. Clasa $\mathcal{E}_1$ este $\mathcal{M}$-ereditară.

3. $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E} \cap \mathcal{P}$.

4. $\mathcal{E} \cup \mathcal{P} \subset \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{P}_1$.

În particular, dacă structurile de factorizare $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ sunt complementare, atunci la fel sunt şi structurile de factorizare $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ şi $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1)$.

$\downarrow$ 1. Fie $i \cdot b \in \mathcal{I}_1$ cu $i \in \mathcal{I}$ şi $b \in \mathcal{B}$, iar

$$i \cdot b = f \cdot p \tag{1}$$

cu $p \in \mathcal{P}$. Trebuie să demonstrăm că $f \in \mathcal{I}_1$. Deoarece $p \perp i$, există un morfism g astfel încât

$$b = g \cdot p, \tag{2}$$

$$f = i \cdot g. \tag{3}$$

Din egalitatea (2), deoarece $p \in \mathcal{E}pi$, rezultă că pătratul

$$g \cdot p = 1 \cdot b \tag{4}$$

este cocartezian. Deci $g \in \mathcal{B}$, şi în egalitatea (3) $i \in \mathcal{I}$ şi $g \in \mathcal{B}$. Astfel am demonstrat că $f \in \mathcal{I}_1$.

2. Demonstraţie duală.

3. Avem

$$(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{P}_1) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{E}) \cap (\mathcal{P} \cap \mathcal{B}^{\perp}).$$

Fie că $f \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{P}_1$. Atunci

$$f = b \cdot p \tag{5}$$

cu $b \in \mathcal{B}$ şi $p \in \mathcal{E}$.

De asemenea $b \cdot p \in \mathcal{P}$ şi $b \cdot p \in \mathcal{B}^\top$. Din relaţia $b \cdot p \in \mathcal{B}^\top$, rezultă că $b \in \mathcal{B}^\top$. Deci $b \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp = \mathcal{I}so$. Atunci $b \cdot p \in \mathcal{P}$ şi $b \cdot p \in \mathcal{E}$ sau $b \cdot p \in \mathcal{E} \cap \mathcal{P}$.

4. Deoarece $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$ rămâne de demonstrat că $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{P}$. Fie $p \in \mathcal{P}$, iar

$$p = m \cdot e \tag{6}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea acestui morfism, iar

$$m = b \cdot b' \tag{7}$$

$(\mathcal{B}^\perp, \mathcal{B})$-factorizarea morfismului m. Din egalitatea (6) rezultă că $m \in \mathcal{P}$, iar din egalitatea (7), rezultă că $b' \in \mathcal{P}$, deoarece clasa $\mathcal{P}$ este $(\mathcal{B}^\perp, \mathcal{B})$-ereditară. Astfel în egalitatea

$$p = b \cdot b' \cdot e \tag{8}$$

avem $e \in \mathcal{E}, b \in \mathcal{B}$ şi $b' \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}^\top$. Aşadar $b, b', e \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{P}_1$, iar $b \cdot b' \cdot e \in \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{P}_1$. $\uparrow$

8.5.3. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ examinăm structurile de factorizare complementare $(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ şi $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ şi o clasă bicompletă de bimorfisme $\mathcal{B}$.*

1. Structurile de factorizare

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f, \mathcal{B}^{\llcorner}), (\mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$$

sunt recirpoc complementare.

2. Clasa $\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

3. Clasa $\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f$ este $\mathcal{M}ono$-ereditară.$\uparrow$

8.5.4. Teoremă. *În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există o clasă proprie de perechi de structuri de factorizare complementare.* $\uparrow$

8.5.5. Teoremă. *Structurile de factorizare $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u), (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p), (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$, $(\mathcal{P}''(\Gamma_0), \mathcal{I}''(\Gamma_0))$ şi $(\mathcal{P}''(\Gamma), \mathcal{I}''(\Gamma))$ formează un pentagon în laticea $\mathbb{B}$. Astfel $\mathbb{B}$ este o latice nemodulară, unde $\Gamma \in \mathbb{R}(\Gamma_0), \Gamma \neq \Gamma_0$ şi $\Gamma \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.* $\uparrow$

Capitolul 9. Perechi de subcategorii conjugate

9.1. Laticea perechilor de subcategorii conjugate $\mathbb{P}_c$

9.1.1. Propoziţie. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategore coreflectivă, iar $\mathcal{L}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $k \cdot l = k$.

2. $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$.

3. $\mathcal{L}^\top \subset \mathcal{K}^\perp$.

4. $\mathcal{K} \subset \lambda^*(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2 Fie $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}, l^Y : Y \to lY$ $\mathcal{L}$-replica obiectului X, şi $k^X : kX \to X$ - $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X. Deorece $b \in \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $l^Y \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X

$$l^X = l^Y \cdot b. \tag{1}$$

Mai departe, din ipoteza 1 rezulă că $l^X \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului lX :

$$l^X \cdot k^X = k^{lX}. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} & kX \arrow[dl, "k^X"'] \arrow[dr, "k^{lX}"] & \\ X \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dr, "b"'] & & lX=lY \\ & Y \arrow[ur, "l^Y"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 9.1.1

Clasele $\mu\mathcal{K}$ şi $\varepsilon\mathcal{L}$ sunt a-ereditare şi a-coereditare. Din egalitatea

$$l^Y \cdot b \cdot k^X = k^{lX}, \tag{3}$$

rezultă că $b \cdot k^X \in \mu\mathcal{K}$ şi, deoarece $b \in \mathcal{M}ono$, deducem că $b \in \mu\mathcal{K}$.

2 $\Rightarrow$ 3 Deoarece $\varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{L}^\top$, şi $\mu\mathcal{K} = \mathcal{K}^\perp$ (vezi Exerciţiul 6.4.7 p. 4 şi p.5).

3 $\Rightarrow$ 2. Evident.

2 $\Rightarrow$ 4. Referitor la operaţia λ^* vezi p.7.3.1. Fie $A \in |\mathcal{K}|, b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $f : A \to Y$. Deoarece $b \in \varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$, rezultă că $b \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului Y, Deci

$$f = b \cdot g \tag{4}$$

pentru un morfism g.

$4 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A, iar $k^A : kA \to A$ şi $k^{lA} : klA \to lA$ $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$l^A \cdot k^A = k^{lA} \cdot u \tag{5}$$

pentru un u. Deoarece $l^A \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $klA \in |\lambda^*(\varepsilon\mathcal{L})|$ rezultă că

$$k^{lA} = l^A \cdot h \tag{6}$$

pentru un h. Atunci

$$h = k^A = \cdot v \tag{7}$$

pentru un v. Se verifică că $u = v^{-1}$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & klA \arrow[dl, dashed, shift left, "v"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "k^{lA}"] & \\
kA \arrow[ur, dashed, shift left, "u"] \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.2

9.1.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. a) $k \cdot l = k$;

b) $l \cdot k = l$.

2. $\varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$.

3. $\mathcal{K}^{\perp} = \mathcal{L}^{\top}$.

4. a) $\mathcal{K} = \lambda^*(\varepsilon\mathcal{L})$;

b) $\mathcal{R} = \lambda(\mu\mathcal{K})$. $\uparrow$

9.1.3. În p. 6.4.2 s-au introdus noţiunile de perechi de subcategorii conjugate (ce formează clasa $\mathbb{P}_c$), subcategorii c-coreflective (clasa $\mathbb{R}_c$) subcategorii c-coreflective (clasa $\mathbb{K}_c$) şi relaţia de ordine $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1) \leq (\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2) \Leftrightarrow \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$.

9.1.4. Exerciţii. *1.* $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ *este cel mai mic element în clasa* $\mathbb{P}_c$.

2. $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ *este cel mai mare element în clasa* $\mathbb{P}_c$.

3. Fie $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1), (\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2) \in \mathbb{P}_c$. $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

4. $\mathbb{R}_c \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

5. $\mathbb{K}_c \subset \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.

9.1.5. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci functorul $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este adjunctul din stânga al functorului $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

$\downarrow$ Fie X, Y două obiecte ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi o stabilim izomorfismele functoriale (vezi [BD, 1972], cap.1 §1)

$$Hom(kX, Y) \overset{\varphi}{\to} Hom(X, lY) \overset{\psi}{\to} Hom(kX, Y)$$

stabilind pentru $f : kX \to Y$ şi $g : X \to lY$

$$\varphi(f) = l(f) \cdot l^X, \quad \psi(g) = k^Y \cdot k(g).$$

$k^X = \prod \in \alpha$

$$\begin{tikzcd}
klX = kX \arrow[r, "k^X"] \arrow[d, shift right, "k(f)"'] \arrow[d, shift left, "k(g)"] \arrow[dr, "f"] & X \arrow[r, "l^X"] \arrow[dr, "g"'] & lX = lkX \arrow[d, shift right, "l(f)"'] \arrow[d, shift left, "l(g)"] \\
klY = kY \arrow[r, "k^Y"] & Y \arrow[r, "l^Y"] & lY = lkY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.3

Avem

$$\psi\varphi(f) = \psi(l(f) \cdot l^X) = k^Y \cdot k(l(f) \cdot l^X) = k^Y \cdot kl(f) \cdot k(l^X) = k^Y \cdot k(f) \cdot 1 = k^Y \cdot k(f) = f,$$

$$\varphi\psi(g) = \varphi(k^Y \cdot k(g)) = l(k^Y \cdot k(g)) \cdot l^X = l(k^Y) \cdot lk(g) \cdot l^Y = 1 \cdot l(g) \cdot l^X = l(g) \cdot l^X = g. \uparrow$$

9.1.6. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ o pereche de subcategorii conjugate. Atunci functorul $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cât şi functorul $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ posedă atât ajuncţi la stânga cât şi la dreapta.* $\uparrow$

9.1.7. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, iar $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

2. $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Fie $p : X \to Y \in \mathcal{P}$, şi

$$k(p) = i_1 \cdot p_1 \tag{1}$$

este $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea morfismului $k(p)$, unde $p_1 : kX \to Z$. Examinăm $\mathcal{L}$-replicile şi $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor X, Y şi Z. -

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k^X"] \arrow[dd, "k(p)"'] \arrow[dr, dashed, "k(p_1)"'] \arrow[drr, dashed, "p_1"] & & X \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dd, "p"] & & lX \arrow[dd, "l(p)"] \arrow[dl, dashed, "l(p_1)"'] \\
& kZ \arrow[r, "k^Z"] \arrow[dl, dashed, "k(i_1)"] & Z \arrow[r, "l^Z"] \arrow[dll, dashed, "i_1"] & lZ \arrow[dr, dashed, shift left, "l(i_1)"] & \\
kY \arrow[rr, "k^Y"'] & & Y \arrow[rr, "l^Y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & & lY \arrow[ul, dashed, shift left, "g"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.1.4

Avem următoarele egalităţi:

$$p \cdot k^X = k^Y \cdot k(p), \tag{2}$$

$$p_1 = k^Z \cdot k(p_1), \tag{3}$$

$$i_1 \cdot k^Z = k(i_1), \tag{4}$$

$$l^Z \cdot p_1 = l(p_1) \cdot l^X \cdot k^X, \tag{5}$$

$$l(i_1) \cdot l^Z = l^Y \cdot k^Y \cdot i_1, \tag{6}$$

$$l(p) \cdot l^X = l^Y \cdot p. \tag{7}$$

Din egalitatea (1) obţinem

$$lk(p) = l(i_1 \cdot p_1) = l(i_1) \cdot l(p_1). \tag{8}$$

Deoarece

$$lk(p) = l(p) \tag{9}$$

din egalitatea (8) rezultă

$$l(p) = l(i_1) \cdot l(p_1). \tag{10}$$

Avem

$$l(i_1) \cdot l(p_1) \cdot l^X \cdot k^X = (\text{din}(10)) = l(p) \cdot l^X \cdot k^X = (\text{din}(7)) = l^Y \cdot p \cdot k^X$$

i.e.

$$l(i_1) \cdot l(p_1) \cdot l^X \cdot k^X = l^Y \cdot p \cdot k^X, \tag{11}$$

sau

$$l(i_1) \cdot \Big(l(p_1) \cdot l^X\Big) = l^Y \cdot p. \tag{12}$$

Conform ipotezei 1 $l(i_1) \in \mathcal{I}$. Atunci în pătratul (12) $p \perp l(i_1)$. Deci există un morfism $h : Y \to lZ$ astfel încât

$$l(p_1) \cdot l^X = h \cdot p, \tag{13}$$

$$l^Y = l(i_1) \cdot h. \tag{14}$$

Atunci

$$h = g \cdot l^Y \tag{15}$$

pentru un morfism $g : lY \to lZ$. Avem

$$l(i_1) \cdot g \cdot l^Y = (\text{din}(15)) = l(i_1) \cdot h = (\text{din}(14)) = l^Y,$$

i.e.

$$l(i_1) \cdot g \cdot l^Y = l^Y, \tag{16}$$

sau

$$l(i_1) \cdot g = 1. \tag{17}$$

Din egalitatea (17), ţinând cont că $l(i_1)$ este un mono, deducem că $l(i_1) \in \mathcal{I}so$, şi cu el şi $k(i_1) \in \mathcal{I}so$. Din egalitatea (4) rezultă că şi $k^Z \in \mathcal{I}so$. Deci $k(p) \sim k(p_1) \sim p_1$, iar $k(p) \in \mathcal{P}$.

$2 \Rightarrow 1$. Demonstraţia este duală. $\uparrow$

9.1.8. Corolar. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

1. Deoarece $l(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{M}ono$ *şi* $k(\mathcal{E}pi) \subset \mathcal{E}pi$, *deci*

$$k(\mathcal{E}_f) \subset \mathcal{E}_f \text{ şi } l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f.$$

În particular, functorul $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este exact la dreapta, şi functorul* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este exact la stânga.*

2. $k(\mathcal{E}_u) \subset \mathcal{E}_u$. *Deci* $r(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.

3. $l(\mathcal{M}_u) \subset \mathcal{M}_u$. *Deci* $k(\mathcal{E}_p) \subset \mathcal{E}_p$. $\uparrow$

9.1.9. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_c$.

2. Functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *posedă proprietatea* $r(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.

$\downarrow$ Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}_p$. Examinăm următoarea diagramă comutativă,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "m"] \arrow[dr, "l^X"] \arrow[dd, "r^X"'] & & & Y \arrow[dl, "l^Y"'] \arrow[dd, "r^Y"] \\
& lX \arrow[r, "l(m)"] \arrow[dl, "r^{lX}"'] & lY \arrow[dr, "r^{lY}"] & \\
rX \arrow[rrr, "r(m)"] & & & rY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.5

unde l^X şi l^Y sunt $\mathcal{L}$-replicile, r^X şi r^Y $\mathcal{R}$-replicile obiectelor X şi Y, iar r^{lX} şi r^{lX} $\mathcal{R}$-replicile obiectelor lX şi lY, şi $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R})$.

$1 \Rightarrow 2$. Deoarece $\mathcal{L}$ este o subcategorie c-reflectivă, rezultă că $l(m) \in \mathcal{M}_p$. Astfel în egalitatea

$$r(m) \cdot r^{lX} = r^{lY} \cdot l(m) \tag{1}$$

$r^{lY} \cdot l(m) \in \mathcal{M}_p$. Deci $r(m) \cdot r^{lX} \in \mathcal{M}_p$ şi $r^{lX} \in \mathcal{E}pi$. Clasa $\mathcal{M}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară şi $r(m) \in \mathcal{M}_p$.

$2 \Rightarrow 1$. Dacă $r(m) \in \mathcal{M}_p$, atunci din (1), rezultă că şi $l(m) \in \mathcal{M}_p$. $\uparrow$

9.1.10. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{L}$ este o subcategorie c-reflectivă: $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

2. Clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este completă la stânga.

3. Clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este stabilă la stânga.

4. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.

5. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi $l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f$.

6. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi functorul l este exact la stânga.

7. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi functorul l comută cu pătrate carteziene.

8. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi functorul l comută cu limite proiective.

9. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi pentru orice $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, astfel încât $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \subset \mathcal{P}$ şi clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, avem $l(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. În particular, dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

10. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi pentru orice $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, astfel încât $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \subset \mathcal{P}$ şi clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, avem $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

11. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ perechea $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap (\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner}, \mathcal{I}''(\mathcal{R}) \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

12. Functorul l posedă un adjunct la stânga.

↓ Vom demonstra următoarele implicaţii

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 9 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Leftrightarrow 6 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 8,$$

$$1 \Rightarrow 11 \Rightarrow 8 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1, \quad 2 \Rightarrow 10 \Rightarrow 3.$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] & 3 \arrow[r, Rightarrow] & 9 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & 4 \arrow[r, Rightarrow] & 5 \arrow[r, Leftrightarrow] & 6 \arrow[r, Leftrightarrow] & 7 \arrow[r, Leftrightarrow] & 8 \\
12 \arrow[r, Rightarrow] & 8 \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & 11 \arrow[u, Rightarrow] & 10
\end{tikzcd}$$

$1 \Rightarrow 2$. $\varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, şi $\mu\mathcal{K}$ este o clasă completă la stânga.

$2 \Rightarrow 3$. Evident.

$5 \Leftrightarrow 6$. Deoarece $\mathcal{M}_f = Ker(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$.

$6 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 8$. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, atunci functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută cu produsele (Teorema 6.1.6), iar nucleele pot fi construite cu ajutorul pătratelor carteziene şi invers (Teoremele 1.3.9 şi 1.3.12).

$1 \Rightarrow 12$. În baza Teoremei 10.1.5.

$12 \Rightarrow 8$. În baza Teoremei P.Freyd: Un functor ce posedă un adjunct la stânga comută cu limitele proiective.

$9 \Rightarrow 4$. Deoarece $\mathcal{M}_p = \mathcal{I}''(\mathcal{S})$, iar $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$.

$4 \Rightarrow 5$. Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}_f$. Examinăm pătratul comutativ

$$l(m) \cdot l^X = l^Y \cdot m. \tag{1}$$

Atunci $l(m) \in \mathcal{M}_p$. Deoarece $m(X)$ este o mulţime închisă în spaţiul Y, iar spaţiile Y şi lY sunt compatibile cu aceeaşi dualitate, rezultă că $m(X)$ este o mulţime închisă şi în lY ([R, R, 1964], cap. IV, §2, Teorema 1). Astfel $l(m)$ are imagine închisă. Deci $l(m) \in \mathcal{M}_f$.

$8 \Rightarrow 2$. Deoarece functorul $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ comută cu produsele rezultă că clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este închisă în raport cu produsele. Să demonstrăm că ea este stabilă la stânga şi închisă în raport cu intersecţiile. Fie $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar

$$b \cdot f' = f \cdot b'. \tag{2}$$

un pătrat cartezian. Examinăm imaginea acestui pătrat aplicând functorul l :

$$l(b) \cdot l(f') = l(f) \cdot l(b'). \tag{3}$$

Conform ipotezei 8 pătratul (3) este cartezian şi $l(b) \in \mathcal{I}so$. Deci şi $l(b') \in \mathcal{I}so$. Astfel am demonstrat că $b' \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "b'"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f'"'] & & Z \arrow[dr, "l^Z"] \arrow[dd, "f" near start] & \\
& lP \arrow[rr, "l(b')" near start] \arrow[dd, "l(f')" near start] & & lZ \arrow[dd, "l(f)"] \\
X \arrow[rr, "b" near start] \arrow[dr, "l^X"'] & & Y \arrow[dr, "l^Y"] & \\
& lX \arrow[rr, "l(b)"] & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.16

$$\begin{tikzcd}
\bar{X} \arrow[d, "p_i"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X_i \arrow[r, "b_i"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
l\bar{X} \arrow[d, "l(p_i)"'] \arrow[dr, "l(b)"] & \\
lX_i \arrow[r, "l(b_i)"] & lX
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.17

Să demonstrăm că clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este închisă în raport cu intersecţiile. Fie $\Big\{b_i : X_i \to X \,|\; i \in \mathcal{I}\Big\}$ o familie de $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiectelor a obiectului X. Examinăm limita proiectivă a acestui spectru: $\Big\{p_i : \bar{X} \to X_i | i \in \mathcal{I}\Big\}$ şi $b : \bar{X} \to X$ cu egalităţile

$$b_i \cdot p_i = b, \forall i \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

Deoarece $b_i \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ rezultă că $b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Aplicând functorul l obţinem că $l(b_i) \in \mathcal{I}so$, $\forall i \in \mathcal{I}$, iar $\big\{l(p_i) | i \in \mathcal{I}\big\}$ şi $l(b)$ este limita proiectivă a spectrului respectiv. Deci $l(b) \in \mathcal{I}so$

$2 \Rightarrow 1$. Dacă clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este completă la stânga, atunci $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$ este o structură de factorizare de stânga (Teormea 2.5.2*). Factorizând după această structură $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, obţinem o subcategorie $(\varepsilon\mathcal{L})$-coreflectivă $\mathcal{K}$:

$$m^X = k^X \cdot p^X. \tag{5}$$

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[dr, "k^X"] & & \\
mX \arrow[u, "p^X"] \arrow[r, "m^X"'] & X \arrow[r, "l^X"] & lX
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.1.8

Deoarece $mlX = mX$, rezultă că $klX = kX$, şi egalitatea $lkX = lX$ o deducem din faptul că $l^X \cdot k^X \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$2 \Rightarrow 11$. Examinăm structura de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ şi structura de factorizare de stânga $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$. Deoarece clasa $\mathcal{E}_u$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-ereditară, în baza Teoremei 2.7.3.* $(\mathcal{E}_u \cap (\varepsilon\mathcal{L})^\perp, \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$ este o structură de factorizare.

$11 \Rightarrow 3$. Examinăm cazul $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. Atunci $\mathcal{I}''(\mathcal{R}) = \mathcal{I}''(\mathcal{S}) = \mathcal{M}_p$. Să demonstrăm că şi clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este stabilă la stânga. Fie $b \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar

$$f \cdot b' = b \cdot f' \tag{6}$$

un pătrat cartezian. Atunci $b' \in \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L})$ şi $b' \in \mathcal{E}_u$, deoarece $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deci $b' \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$3 \Rightarrow 9$. Fie $i : X \to Y \in \mathcal{I}$. Atunci

$$l(i) \cdot l^X = l^Y \cdot i. \tag{7}$$

Vom demonstra că $\mathcal{P} \perp l(i)$. Fie $e : P \to T \in \mathcal{P}$ şi

$$v \cdot e = l(i) \cdot u. \tag{8}$$

Construim pătratele carteziene: pe morfismele v şi l^Y

$$v \cdot t' = l^Y \cdot v', \tag{9}$$

pe morfismele e şi t'

$$e \cdot t'' = t' \cdot e', \tag{10}$$

pe morfismele $u \cdot t''$ şi l^X

$$(u \cdot t'') \cdot t''' = l^X \cdot f. \tag{11}$$

Clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este stabilă la stânga (ipoteza 3). Deci $t', t'', t''' \in \varepsilon\mathcal{L}$. În egalitatea (10) $t'' \in \varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$, sau $t' \cdot e' \in \mathcal{P}$, iar $t' \in \mathcal{M}_u$. Clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară, astfel $e' \in \mathcal{P}$ şi $e', t''' \in \mathcal{P}$. Avem

$$l^Y \cdot v' \cdot e' \cdot t''' = (\text{din}(9)) = v \cdot t' \cdot e' \cdot t''' = (\text{din}(10)) =$$

$$v \cdot e \cdot t'' \cdot t''' = (\text{din}(8)) = l(i) \cdot u \cdot t'' \cdot t''' = (\text{din}(11)) = l(i) \cdot i \cdot f,$$

i.e.

$$l^Y \cdot v' \cdot e' \cdot t''' = l^Y \cdot i \cdot f \tag{12}$$

$$\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[r, dashed, "t'''"] \arrow[d, dashed, "f"'] & P_2 \arrow[rr, dashed, "e'"] \arrow[dd, dashed, "t''"'] & & P_1 \arrow[lll, dashed, "h"', shift left=0, to path={(\tikztostart) -- (\tikztotarget)}] \arrow[dd, dashed, "t'"] \arrow[dr, dashed, "v'"] & \\
X \arrow[rrrr, "i \in \mathcal{I}"] \arrow[ddd, "l^X"'] & & & & Y \arrow[ddd, "l^Y"] \\
& & & & \\
& P \arrow[rr, "e \in \mathcal{P}"] \arrow[dl, "u"'] & & T \arrow[dlll, dashed, "w"] \arrow[dr, "v"] & \\
lX \arrow[rrrr, "l(i)"] & & & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.9

şi simplificând l^Y, rămâne

$$v' \cdot e' \cdot t''' = i \cdot f. \tag{13}$$

În ultima egalitate $i \in \mathcal{I}$, iar $e' \cdot t''' \in \mathcal{P}$, i.e. $e' \cdot t''' \perp i$. Există un morfism h astfel încât

$$f = h \cdot e' \cdot t''', \tag{14}$$

$$i \cdot h = v^{'}. \tag{15}$$

$l^Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, deci $t' \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci

$$l^X \cdot h = w \cdot t' \tag{16}$$

pentru un morfism w. Avem

$$l(i)\cdot w\cdot t' = (\text{din}(16)) = l(i)\cdot l^X\cdot h = (\text{din}(7)) = l^Y\cdot i\cdot h = (\text{din}(15)) = l^Y\cdot v' = (\text{din}(9)) = v\cdot t',$$

i.e.

$$l(i)\cdot w\cdot t' = v\cdot t' \tag{17}$$

sau

$$l(i)\cdot w = v, \tag{18}$$

ultima egalitatea arată că $e\perp l(i)$.

9 $\Rightarrow$ 10. Fie $i : X \to Y \in \mathcal{I}$ şi $b : Y \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. mai departe, fie $l^X : X \to lX$ şi $l^Z : Z \to lZ$ $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci $l^Z\cdot b : Y \to lZ$ este $\mathcal{L}$-replica lui Y şi avem egalitatea

$$l(i)\cdot l^X = l^Z\cdot b, \tag{19}$$

cu $l(i)\in\mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "i"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[dd, "l^X"'] & & Y \arrow[d, "b"] \\
& T \arrow[r, "i'"] \arrow[dl, dashed, "b"'] & Z \arrow[d, "l^Z"] \\
lX \arrow[rr, "l(i)\in\mathcal{I}"] & & lZ=lY
\end{tikzcd}$$

Pe morfismele $l(i)$ şi l^Z construim pătratul cartezian

$$l(i)\cdot b = l^Z\cdot i' \tag{20}$$

cu $b\in\varepsilon\mathcal{L}$ şi $i'\in\mathcal{I}$. Atunci

$$l^X = b\cdot t, \tag{21}$$

$$b\cdot i = i'\cdot t \tag{22}$$

pentru un t, cu $i\in\varepsilon\mathcal{L}$. Astfel egalitatea (22) şi este descompunerea necesară.

10 $\Rightarrow$ 9. Fie $i : X\to Y\in\mathcal{I}$ şi o să demonstrăm că $l(i)\in\mathcal{I}$. În virtutea ipotezei 10 avem descompunerea

$$l^Y\cdot i = i_1\cdot b \tag{23}$$

cu $i_1 \in \mathcal{I}$ şi $\in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece $\mathcal{L}$ este $\mathcal{P}$-reflectivă, deducem că $Z \in |\mathcal{L}|$ şi b este $\mathcal{L}$-replica obiectului X.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i \in \mathcal{I}"] \arrow[d, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"'] & Y \arrow[d, "l^Y"] \\
lX = Z \arrow[r, "i_1 \in \mathcal{I}"] & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.9b

Corolar. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Umrătoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

2. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

3. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

4. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{I}''(\mathcal{L} \subset \mathcal{I}''(\mathcal{L} \circ (\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

9.1.10*. Teorema. *Putem formula doar următoarele afirmaţii:*

1. Condiţiile 1, 2*, 8* şi 11* sunt echivalente.*

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$. Atunci $k(\mathcal{E}'(\mathcal{T})) \subset \mathcal{E}'(\mathcal{T})$ (condiţia 9).*

3. Functorul coreflector $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ posedă proprietatea $m(\mathcal{E}'_p) \subset \mathcal{E}_p$ (condiţia 4).*

4. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$. Atunci k este exact la dreapta (condiţia 6).*

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Atunci $((\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}'(\mathcal{T}), \mu(\mathcal{T}) \cap (\mu\mathcal{K})^{\llcorner}) \in \mathbb{B}$ (condiţia 10).*

9.1.11. Remarcă. *Condiţia $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ în p.10 este necesară, deoarece $\varepsilon\Pi = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$, iar $\mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\Pi) = \mathcal{M}_u$. Însă subcategoria Π nu este c-relfectivă.*

9.1.12. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$, şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci:*

1. $l(\mathcal{J}''(\mathcal{R})) \subset \mathcal{J}''(\mathcal{R})$. $\quad 1^*$. $k(\mathcal{E}'(\mathcal{T})) \subset \mathcal{E}'(\mathcal{T})$.

2. $l(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. $\quad 2^*$. $k(\mathcal{M}'(\mathcal{T})) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{T})$.

3. $l(\mathcal{M}'(\mathcal{T})) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{T})$. $\quad 3^*$. $k(\mathcal{P}''(\mathcal{R})) \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$.

4. Fie $f \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi

$$f = i \cdot p$$

$(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{J}''(\mathcal{R}))$*-factorizarea lui f. Atunci*

$$l(f) = l(i) \cdot l(p)$$

este $(\mathcal{P}''(\mathcal{R})\cap\mathcal{L},\mathcal{J}''(\mathcal{R})\cap\mathcal{L})$*-factorizarea lui* $l(f)$ *iar* $(\mathcal{P}''(\mathcal{R})\cap\mathcal{L},\mathcal{J}''(\mathcal{R})\cap\mathcal{L})$ *este o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{L}$.

4^*. *Fie* $f\in\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi*

$$f=m\cdot e$$

$(\mathcal{E}''(\mathcal{T}),\mathcal{M}'(\mathcal{T}))$*-factorizarea lui* f. *Atunci*

$$k(f)=k(m)\cdot k(e)$$

este $(\mathcal{E}'(\mathcal{T})\cap\mathcal{K},\mathcal{M}'(\mathcal{T})\cap\mathcal{K})$*-factorizarea lui* $k(f)$, *iar* $(\mathcal{E}'(\mathcal{T})\cap\mathcal{K},\mathcal{M}'(\mathcal{T})\cap\mathcal{K})$ *este o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{K}$.

$\downarrow$ 1. În virtutea Teoremei 10.1.10 p.9.

2. Fie $p:X\to Y\in\mathcal{P}''(\mathcal{R})$. Examinăm pătratul

$$l(p)\cdot l^X=l^Y\cdot p. \tag{2}$$

Deoarece $l^Y\in\varepsilon\mathcal{L}\subset\varepsilon\mathcal{R}$, atunci $l(p)\cdot l^X\in\mathcal{P}''(\mathcal{R})$, sau $l(p)\in\mathcal{P}''(\mathcal{R})$.

3. Avem $\mathcal{M}'(\mathcal{T})=\mathcal{M}_p\circ(\mu\mathcal{T})$ şi $l(\mathcal{M}_p)\subset\mathcal{M}_p$ (Teorema 9.1.10). Rămâne de arătat că $l(\mu\mathcal{T})\subset\mu\mathcal{T}$. Fie $b:X\to Y\in\mu\mathcal{T}$. Examinăm pătratul

$$l(b)\cdot l^X=l^Y\cdot b, \tag{3}$$

unde $l^X,l^Y\in\varepsilon\mathcal{L}=\mu\mathcal{K}\subset\mu\mathcal{T}$. Astfel $l(b)\cdot l^X\in\mu\mathcal{T}$ şi $l^X\in\mu\mathcal{T}$. Definitiv $l(b)\in\mu\mathcal{T}$, deoarece clasa $\mu\mathcal{T}$ este a-coereditară.

4. Rezultă din p.1 şi p.2.

9.1.13. Să interpretăm schematic domeniile unde ar fi situate structurile de factorizare de tipul $(\mathcal{E}'(\mathcal{T}),\mathcal{M}'(\mathcal{T})),(\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\mathcal{J}''(\mathcal{R}))$. Menţionăm că pentru perechea de subcategorii conjugate $(\mathcal{C}_2\mathcal{V},\mathcal{C}_2\mathcal{V})$ functorul identic $id:\mathcal{C}_2\mathcal{V}\to\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este atât functor coreflector cât şi functor reflector. Acest functor lasă neschimbate ambele clase ale oricărei structuri de factorizare $(\mathcal{P},\mathcal{J})$ nu numai cele menţionate în Teorema 9.1.12.

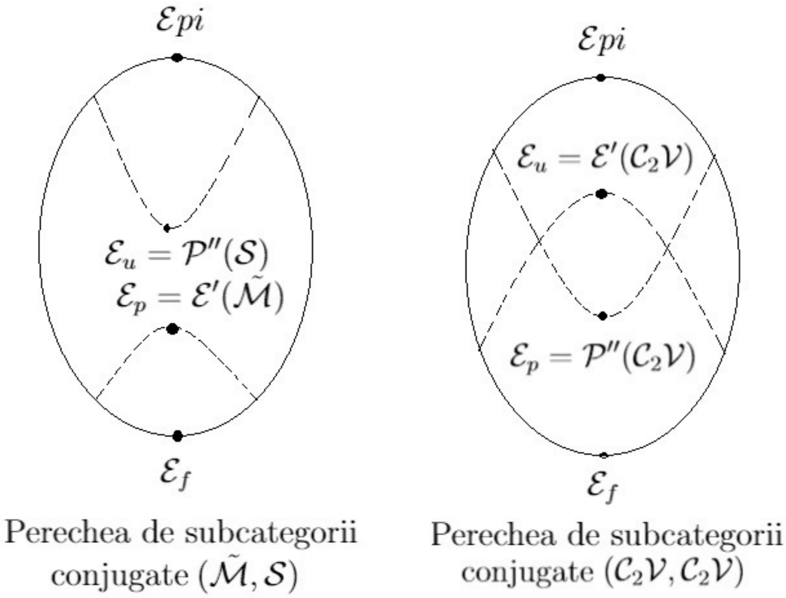


Figura 9.1.10

9.1.14. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$, *şi* $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. *Atunci* $(\mathcal{P}'' \cap (\varepsilon\mathcal{L})^{\top}, \mathcal{I}'' \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$ *este o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *În particular, fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. *Atunci* $(\mathcal{E}_u \cap (\varepsilon\mathcal{L})^{\top}, \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$ *şi* $((\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$ *sunt structuri de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *cu clasele de injecţii complete la dreapta.*

$\downarrow$ În virtutea Teoremei 2.7.3* este suficient de demonstrat că $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{I}'' \subset \mathcal{I}'' \circ (\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $i : X \to Y \in \mathcal{I}'', b : Y \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $l^X : X \to lX$ şi $l^Z : Z \to lZ$ $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci $l^Z \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului Y :

$$l^Y = l^Z \cdot b \tag{1}$$

şi

$$l(i) \cdot l^X = l^Y \cdot i. \tag{2}$$

Pe morfismele $l(i)$ şi l^Z construim pătratul cartezian

$$l(i) \cdot b' = l^Z \cdot i'. \tag{3}$$

Atunci

$$l^X = b' \cdot t, \tag{4}$$

$$b \cdot i = i' \cdot t \tag{5}$$

pentru un t. Avem $b' \in \mathcal{M}_u$. Astfel în egalitatea (4) $t \in \mathcal{E}pi$, adică $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. De asemenea $l(i) \in \mathcal{I}''$ (Teorema 9.1.10 p.9), deci $i' \in \mathcal{I}''$. Mai departe,

$$l^Z \cdot i' \cdot t = l(i) \cdot b' \cdot t = l(i) \cdot l^X = l^Y \cdot i = l^Z \cdot b \cdot i,$$

i.e.

$$l^Z \cdot i' \cdot t = l^Z \cdot b \cdot i, \tag{6}$$

sau

$$b \cdot i = i' \cdot t \tag{7}$$

cu $i \in \mathcal{I}''$ şi $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "i"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[dd, "l^X"'] & & & Y \arrow[dl, "b"'] \arrow[dd, "l^X"] \\
& P \arrow[r, dashed, "i'"] \arrow[dl, dashed, "b'"] & Z \arrow[dr, "l^Z"'] & \\
lX \arrow[rrr, "l(i)"] & & & lZ=lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.1.11

9.1.15. Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Atunci:*

1. Categoriile $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{L}$ *sunt izomorfe.*

2. Laticile $\mathbb{K}(\mathcal{K})$ *şi* $\mathbb{K}(\mathcal{L})$ *sunt izomorfe.*

3. Laticile $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ *şi* $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ *sunt izomorfe.* $\uparrow$

9.1.16. Remarcă. *Referitor la rezultatul precedent vezi 1.7.4 şi 14.7.*

9.1.17. Examinăm următorii functori. Fie (E, u) şi (F, v) obiecte ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $f : (E, u) \to (F, v) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $d_\tau(E, u) = E'_\tau, d_\sigma(E, u) = E_\sigma$ şi $d_\tau(f) = f' : F'_\tau \to E'_\tau$, $d_\sigma(f) = f' : F'_\sigma \to E'_\sigma$,

Teoremă. *Fie* $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}$, $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. *Următorii functori contravarianţi stabilesc un izomorfism dual al următoarelor categorii:*

1. $\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\tau} k(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}}$. 2. $\mathcal{S} \xrightarrow{d_\sigma} k(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S}$.

3. $\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\tau} k(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{l} l(\tilde{\mathcal{M}}),\ l(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{m} k(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}}$.

4. $\mathcal{S} \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S} \xrightarrow{k} k(\mathcal{S}),\ k(\mathcal{S}) \xrightarrow{s} \mathcal{S} \xrightarrow{d_\sigma} k(\mathcal{S})$.

5. $k(\mathcal{S}) \xrightarrow{s} \mathcal{S} \xrightarrow{m} \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{l} l(\tilde{\mathcal{M}}),\ l(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{m} \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{s} \mathcal{S} \xrightarrow{k} k(\mathcal{S})$. $\uparrow$

9.2. Laticea subcategoriilor c-reflective $\mathbb{R}_c$

9.2.1. Teoremă. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci există cea mai mare subcategorie c-reflectivă $\bar{\mathcal{R}}_c$ ce se conţine în subcategoria $\mathcal{R}$.*

1^*. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_u)$. Atunci există cea mai mare subcategorie c-coreflectivă $\bar{\mathcal{K}}_c$ ce se conţine în subcategoria $\mathcal{K}$.*

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \{\mathcal{A} \in \mathbb{B}ic | \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{A}\}$. Această clasă nu este vidă, deoarece $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ şi atunci $\varepsilon\mathcal{R} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Notăm

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \cap\{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})\},$$

iar $\bar{\mathcal{R}}_c = \lambda(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$. Deoarece $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, rezultă că $\lambda(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \subset \mathcal{R}$ şi $\lambda(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \in \mathbb{R}_c$. $\uparrow$

9.2.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ cu functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$, $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(A)$. Atunci lA este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal al subcategoriei $\mathcal{L}$.*

$\downarrow$ Fie $X \in |\mathcal{L}|$. Există un cardinal τ şi un morfism $m : X \to A^\tau \in \mathcal{M}_p$. Deoarece $l(A^\tau) = (lA)^\tau$ şi $l(m) \in \mathcal{M}_p$ obţinem că lA este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $\mathcal{L}$. $\uparrow$

9.2.3. Propoziţie. *1. Orice subcategorie c-reflectivă este închisă în raport cu extensiile $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-factorobiecte.*

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. Atunci subcategoria $\mathcal{K}$ este închisă în raport cu extensiile.

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{L}$ o subcategorie c-reflectivă cu functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}, A \in |\mathcal{L}|$, iar $b : A \to X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Deoarece $l(b) \in \mathcal{M}_p, b \in \mathcal{E}pi$, iar clasa $\mathcal{M}_p$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară din egalitatea

$$l(b) = l^X \cdot b, \tag{1}$$

rezultă că $l^X \in \mathcal{M}_p$. Deci $l^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$, iar $X \in |\mathcal{L}|$.

2. Fie $A \in |\mathcal{K}|, b : A \to X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$, şi $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X. Atunci

$$b = k^X \cdot f \tag{2}$$

pentru un morfism f. Avem $b \in \mathcal{E}pi, k^X \in \mathcal{M}_u$. Deci $f \in \mathcal{E}pi$. Atunci $k^X \in \mathcal{M}_p$, deoarece clasa $\mathcal{M}_p$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară. Definitiv $k^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$. $\uparrow$

9.2.4. Corolar. *Clasa proprie $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \cap \mathbb{R}_{ne}$ (vezi 6.7.10) de subcategorii $\mathcal{E}_u$-reflective, ce nu sunt închise în raport cu extensiile, nu conţine subcategorii c-reflective.*

9.2.5. Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o clasa de obiecte $\mathcal{M}_p$-injective a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci subcategoria*

$$\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(\mathcal{A})$$

este c-reflectivă.

$\downarrow$ Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}_p$ şi o să demonstrăm că $l(m) \in \mathcal{M}_p$, unde $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ este functorul reflector:

$$l(m) \cdot l^X = l^Y \cdot m \tag{1}$$

Pentru obiectul X există o mulţime de obiecte $A_i, i \in \mathcal{I}$ din clasa $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathcal{L}$-replica lX se obţine prin $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea morfismului canonic w^X :

$$w^X = m^X \cdot l^X. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "l^X"] \arrow[dd, "w^X"'] & & Y \arrow[dr, "l^Y"] \arrow[ddll, dashed, "f"'] & \\
& lX \arrow[rr, "l(m)"] \arrow[dl, "m^X"'] & & lY \arrow[dlll, dashed, "g"] \\
Z & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 9.2.1

Notăm $Z = \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i^{\mathcal{H}om(X,A_i)}$. Deoarece Z este de asemenea un obiect $\mathcal{M}_p$-injectiv, avem

$$w^X = f \cdot m \tag{3}$$

pentru un morfism f. Morfismul f se extinde prin l^Y, deoarece $Z \in |\mathcal{L}|$:

$$f = g \cdot l^Y. \tag{4}$$

Deci

$$m^X \cdot l^X = (\text{din}(2)) = w^X = (\text{din}(3)) = f \cdot m = (\text{din}(4)) = g \cdot l^Y \cdot m = g \cdot l(m) \cdot l^X,$$

i.e.

$$m^X \cdot l^X = g \cdot l(m) \cdot l^X, \tag{5}$$

sau

$$m^X = g \cdot l(m). \tag{6}$$

Deoarece $m^X \in \mathcal{M}_p$ din egalitatea (6) deducem că şi $l(m) \in \mathcal{M}_p$. $\uparrow$

Faptul că functorul reflector $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(m(\tau))$ este exact de stânga a fost menţionat în lucrarea [G, G, 1978].

9.2.6. Teoremă. *Fie $\mathcal{A}$ o familie de spaţii $\mathcal{M}_p$-injective a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(\mathcal{A})$, şi $\mathcal{K} =^c \mathcal{L}$. Atunci:*

1. $((\mathcal{A}^{\downarrow})^{\urcorner}, \mathcal{A}^{\downarrow}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K}))$.

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există suficiente obiecte $\mathcal{A}^{\downarrow}$-injective.

$\downarrow$ 1.$(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate, iar $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}),\ \mathcal{M}'(\mathcal{K})) = ((\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))^{\urcorner}$, $\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. În plus $\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}) = \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L})$. O să demonstrăm că $\mathcal{A}^{\downarrow} = \mathcal{M}_p \circ \varepsilon\mathcal{L}$.

$\mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathcal{A}^{\downarrow}$. Această incluziune rezută din faptul că $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{A}$ este o familie de obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.

$\mathcal{A}^{\downarrow} \subset \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $f : X \to Y \in \mathcal{A}^{\downarrow}, l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica lui X. Există atunci un morfism $m : lX \to Z \in \mathcal{M}_p$, unde Z este un produs al unei subfamilii de obiecte din familia $\mathcal{A}$. Deoarece $f \in \mathcal{A}^{\downarrow}$, rezultă că morfismul $m \cdot l^X$ se extinde prin f :

$$m \cdot l^X = g \cdot f \tag{1}$$

pentru un morfism g. Fie

$$f = i \cdot b \tag{2}$$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea lui f. Atunci

$$(g \cdot i) \cdot b = m \cdot l^X \tag{3}$$

cu $b \in \mathcal{E}_u$ şi $m \in \mathcal{M}_p$. Astfel

$$l^X = h \cdot b, \tag{4}$$

$$g \cdot i = m \cdot h \tag{5}$$

pentru un h. Egalitatea (4) demonstrează că $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $f \in \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{L}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}) = \mathcal{M}'(\mathcal{K})$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f \in \mathcal{A}^{\downarrow}"] \arrow[dd, "l^X"'] \arrow[dr, dashed, "b"] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& Y_1 \arrow[ur, dashed, "i"'] \arrow[dl, dashed, "h"] & \\
lX \arrow[rr, "m"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 9.2.2

2. Pentru un obiect arbitrar $Y \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $l^Y : Y \to lY \in \mathcal{A}^{\downarrow}$, şi lY este un $\mathcal{M}_p$-subobiect al unui produs de elemente ale familiei $\mathcal{A}$. $\uparrow$

9.2.7. Fie $\mathcal{A}$ o familie de obiecte $\mathcal{M}_p$-injective nenule. Atunci $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{A}^{\downarrow}$. La rândul său $\mathcal{A}^{\downarrow} \subset \mathcal{M}_u$. Mai departe, $m(\tau)^{\downarrow} = \mathcal{M}_u$ pentru τ cardinal finit şi $\tau > 0$.

Teoremă. $\cap\{m(\tau)^{\downarrow} | \tau \text{ cardinal}\} = \mathcal{M}_p$.

$\downarrow$ Clasa tuturor structurilor de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ nu este o mulţime. Ea este o "latice" (ca clasă) completă. Aşadar $\cap_\tau m(\tau)^{\downarrow}$ este de asemenea o clasă de injecţii a unei structuri de factorizare. Cum s-a menţionat mai sus, pentru orice cardinal τ avem $\mathcal{M}_p \subset m(\tau)^{\downarrow}$.

Să demonstrăm incluziunea inversă. Fie că pentru orice cardinal τ

$$f : X \to Y \in m(\tau)^{\downarrow}.$$

În virtutea Teoremei 5.6.5 exisă o mulţime de cardinali I şi un morfism

$$i : X \to \prod_{i \in I} m(\tau) \in \mathcal{M}_p.$$

Conform ipotezei în raport cu morfismul f avem

$$i = g \cdot f$$

pentru un careva morfism g. Deoarece $i \in \mathcal{M}_p$, din această egalitate rezultă că $f \in \mathcal{M}_p$. $\uparrow$

9.2.8. Definiţie [P, S, 1962]. *Fie E un spaţiu local convex. Familia $\mathcal{A}$ de funcţionale liniare continui pe E se numeşte totală, dacă pentru orice element nenul $x \in E$ există $f \in \mathcal{A}$ astfel încât $f(x) \neq 0$.*

9.2.9. Lemă. *Fie $\beta > \alpha$ şi $\beta \geq \chi_0$. Atunci $m_\alpha^\downarrow \subset m_\beta^\downarrow$, dar $m_\alpha^\downarrow \neq m_\beta^\downarrow$.*

$\downarrow$ În primul rând menţionăm că pentru numărul natural α avem

$$m_\alpha^\downarrow = (K^\alpha)^\downarrow = K^\downarrow = \mathcal{M}_u.$$

Mai departe, pentru $\beta \geq \alpha$ spaţiul $m(\alpha)$ este un sumand direct al spaţiului $m(\beta)$:

$$m(\beta) = m(\alpha) \oplus (E, t).$$

Acum vom demonstra că, dacă $\beta > \alpha$ şi β este infinit, atunci $m(\beta)^\downarrow \neq m(\alpha)^\downarrow$. Avem

$$w = w^{m(\beta)} : m(\beta) \to m(\alpha)^{Hom(m(\beta), m(\alpha))} \in m(\alpha)^\downarrow.$$

Vom arăta că $w \notin m(\beta)^\downarrow$. Fie că $w \in m(\beta)^\downarrow$. Deoarece $m(\beta)$ este $m(\beta)^\downarrow$-injectiv, atunci w este secţionabil. În acest fel $w \in \mathcal{M}_f$. Mai departe, în virtutea Teoremei 3.3.3 există un număr finit k şi un monomorfism strict $t : m(\beta) \to m(\alpha)^k$. Dacă $\beta = \chi_0$ (ceea ce însemnă că β corespunde unei mulţimi numerabile infinite), atunci α este număr finit. Astfel $m(\alpha)$ şi cu el $m(\alpha)^k$ este spaţiu finit dimensional. Am obţinut o contrazicere, deoarece nu putem scufunda un spaţiu infinit dimensional $m(\beta)$ într-un spaţiu finit dimensional $m(\alpha)^k$.

Să presupunem acum că $\beta > \chi_0$. Vom demonstra că pe $m(\alpha)$ există o familie totală de funcţionale liniare de puterea α. Pentru aceasta vom examina $m(\alpha)$ ca un spaţiu de funcţii mărginite pe mulţimea $\mathcal{S}$ de puterea α şi pentru orice $s \in \mathcal{S}$ notăm prin f_s funcţionalul (linar continuu), definit prin formula:

$$f_s(x) = x(s), \forall x \in m(\alpha).$$

Familia $\{f_s | s \in \mathcal{S}\}$ formează o familie de funcţionale de puterea α pe $m(\alpha)$. În acest fel pe $m(\alpha)^k$ există o familie totală de puterea $k\alpha$. β fiind infinit şi $\beta > \alpha$, rezultă $\beta > k\alpha$. Astfel pe $m(\alpha)^k$, şi pe $m(\beta)$ există o familie totală $\mathcal{A}$ cu o putere mai mică ca β.

Fie $m(\beta)$ spaţiul tuturor funcţiilor mărginite pe mulţimea T de puterea β. Pentru orice punct $s \in T$ notăm prin g_s funcţia caracteristică a submulţimii $\{s\}$. Acum vom demonstra că pentru orice $f \in \mathcal{A}$ mulţimea $\{s \in T | f(g_s) \neq 0\}$ nu este mai mult decât numerabilă, dar deoarece $\beta > \chi_0$ şi puterea lui $\mathcal{A}$ este mai mică decât puterea lui β obţinem contrazicere. Pentru aceasta e suficient să demonstrăm că pentru orice număr natural i mulţimea $T_i = \{s \in T | f(g_s) \geq \frac{1}{i}\}$ este finită. Într-adevăr, fie $s_1, s_2, ..., s_r \in T_i$. Notăm:

$$a_i = \frac{\overline{f(g_{s_l})}}{|f(g_{s_l})|} \quad (l = 1, 2, ..., r).$$

Atunci vectorul $x = \sum_{l=1}^{r} a_l g_{s_l}$, care aparţine spaţiului $m(\beta)$, are norma 1. Prin urmare

$$\|f\| \geq |f(x)| = \Big| \sum_{i=1}^{r} a_i f(g_{s_i}) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{f(g_{s_l})} \cdot f(g_{s_l})}{|f(g_{s_l})|} \Big| \geq \frac{r}{i}$$

Astfel r nu poate fi oricât de mare. $\uparrow$

9.2.10. Notaţii. *Fie $\mathbb{B}_i$ clasa structurilor de factorizare $\big((\mathcal{A}^{\downarrow})^{\urcorner}, \mathcal{A}^{\downarrow}\big)$, unde $\mathcal{A}$ este o clasă de obiecte $\mathcal{M}_p$-injective.*

9.2.11. Exerciţiu. *$\mathbb{B}_i$ este o latice completă cu cel mai mic element $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ şi cel mai mare element $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.*

9.2.12. Teoremă. *1. Laticele $\mathbb{R}_c, \mathbb{K}_c, \mathbb{P}_c$ conţin clase proprii de elemente.*

2. Pentru $\beta > \alpha$ şi β cardinal infinit structurile de factorizare $\big((m_\alpha^{\downarrow})^{\urcorner}, m_\alpha^{\downarrow}\big)$ şi $\big((m_\beta^{\downarrow})^{\urcorner}, m_\beta^{\downarrow}\big)$ sunt diferite. $\uparrow$

9.2.13. Propoziţie. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$.*

1. $r(\mathcal{T})$ este o subcategorie slab coreflectivă a categoriei $\mathcal{R}$. Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ sau $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}$, atunci $r(\mathcal{T}) \in \mathbb{K}(\mathcal{R})$.

1^*. *$t(\mathcal{R})$ este o subcategorie slab reflectivă a categoriei $\mathcal{T}$. Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}$ sau $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, atunci $t(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{T})$.*

2. Dacă $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{T}$, atunci subcategoriile $\mathcal{T}$ şi $r(\mathcal{T})$ sunt izomorfe.

2^*. *Dacă $\mu\mathcal{T} \subset \varepsilon\mathcal{R}$, atunci subcategoriile $\mathcal{R}$ şi $t(\mathcal{R})$ sunt izomorfe.*

3. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. Atunci categoriile $\mathcal{K}, \mathcal{L}, r(\mathcal{K})$ şi $t(\mathcal{L})$ sunt izomorfe.

1. Fie $A \in |\mathcal{R}|, t^A : tA \to A$ $\mathcal{T}$-coreplica lui A şi $r^{tA} : tA \to rtA$ $\mathcal{R}$-replica lui tA. Atunci

$$t^A = u^A \cdot r^{tA} \tag{1}$$

pentru un morfism u^A. Să verificăm că u^A este slab $r(\mathcal{T})$-coreplica obiectului A. Fie $B \in |\mathcal{T}|, r^B : B \to rB$ $\mathcal{R}$-replica lui B şi $f : B \to A$. Atunci

$$\begin{tikzcd}
tA \arrow[rr, "r^{tA}"] \arrow[dr, dashed, "t^A"] & & rtA \arrow[dl, dashed, "u^A"'] \\
& A & \\
B \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[rr, "r^B"] & & rB \arrow[uu, dashed, "h"'] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

$$f \cdot r^B = r^{tA} \cdot g \tag{2}$$

pentru un g,

$$r^{tA} \cdot g = h \cdot r^B \tag{3}$$

pentru un h. Din egalităţile (1)-(3) rezultă că

$$f = k^A \cdot h. \tag{4}$$

Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, atunci t^A şi r^{tA} sunt aplicaţii bijective. Deci la fel este şi u^A.

Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}$, atunci $t^A \in \mathcal{M}_u$. Ţinând cont că $r^{tA} \in \mathcal{E}pi$ şi clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, conchidem că $u^A \in \mathcal{M}_u$.

2. Avem $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u$. Astfel $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Fie $f : A \to B \in \mathcal{T}$. Atunci $r(f) \in r(\mathcal{T})$ şi $trA = A, trB = B$ şi $tr(f) = f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f \in \mathcal{T}"] \arrow[d, "r^A = r^{rA}"'] & B \arrow[d, "r^B = t^{rB}"] \\
rA \arrow[r, "r(f)"] & rB
\end{tikzcd}$$

Fie $g : X \to Y \in r(\mathcal{T}$. Atunci $rtX = X, rtY = Y$ şi $rt(f) = f$.

3. Din condiţia $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$, deducem $\varepsilon\mathcal{R} \subset \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$. Astfel pemtru perechea $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{R}$ se îndeplinesc condiţiile p.2. Deci $\mathcal{K}$ şi $r(\mathcal{K})$ sunt izomorfe.

Din condiţia $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ obţinem $\mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel se îndeplinesc condiţiile p.2* pentru perechea $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{L}$.

Subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$ sunt izomorfe, deoarece $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

Indicăm functorii care stabilesc izomorfismele respective

$$\mathcal{K} \xrightarrow{l} \mathcal{L} \xrightarrow{k} \mathcal{K},$$

$$\mathcal{T} \xrightarrow{r} r(\mathcal{T}) \xrightarrow{t} \mathcal{T},$$

$$t(\mathcal{R}) \xrightarrow{r} \mathcal{R} \xrightarrow{t} t(\mathcal{R}). \uparrow$$

9.2.14. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ şi $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Atunci $\mathcal{R} \cap \mu(r(\mathcal{K})) = \mathcal{R} \cap \varepsilon(r(\mathcal{L}))$. În particular $(r(\mathcal{K}), r(\mathcal{L}))$ este o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{R}$.*

$\downarrow$ Menţionăm că $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{R}$. Mai departe, din condiţia $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ rezultă că pentru orice obiect $A \in |\mathcal{R}|$ $l^A : A \to lA$ este şi $(\mathcal{R} \cap \mathcal{L})$-replica lui. Observăm că condiţia $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ are loc în următoarele cazuri:

- $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$;

- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\mathcal{R} \cap \mu(r(\mathcal{K})) \subset \mathcal{R} \cap \varepsilon(r(\mathcal{L}))$. Fie $b : X \to Y \in \mathcal{R} \cap \mu(r(\mathcal{K}))$. Dacă $p^X : rkX \to X$ este $r(\mathcal{K})$-coreplica lui X, atunci $b \cdot p^X : rkX \to Y$ este $r(\mathcal{K})$-coreplica lui Y. Din egalitatea (1) p. precedent rezultă că $b \cdot p^X \in \mu\mathcal{K}$. Odată ce $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ avem $b \cdot p^X \in \mathcal{R} \cap \varepsilon(\mathcal{L}) = \mathcal{R} \cap \varepsilon(r(\mathcal{L}))$.

$\mathcal{R} \cap \mu(r(\mathcal{L})) \subset \mathcal{R} \cap \mu(r(\mathcal{K}))$. Fie $b : A \to B \in \mathcal{R} \cap \varepsilon(r(\mathcal{L}))$. Deci $b \in \mathcal{R} \cap \varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{R} \cap \mu r(\mathcal{K}))$. $\uparrow$

9.2.15. Corolar. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Atunci pentru orice $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ $(r(\mathcal{K}), r(\mathcal{L})) \in \mathbb{P}_c(\mathcal{S})$.*

2. Pentru orice $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ $(r_s(\mathcal{K}), r_s(\mathcal{L})) \in \mathbb{P}_c(s\mathcal{R})$, unde $s\mathcal{R}$ este subcategoria spaţiilor semireflexive, şi $r_s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ functorul reflector.

3. Fie $i\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor inductiv semireflexive şi $r_i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to i\mathcal{R}$ functorul reflector. Pentru $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, dacă $\mathcal{S}h \subset \mathcal{L}$, atunci $(r_i(\mathcal{K}), r_i(\mathcal{L})) \in \mathbb{P}_c(i\mathcal{R})$. $\uparrow$

Lemă. *Fie $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{B}_1 = \varepsilon\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_2 = \varepsilon\mathcal{L}_2$. Atunci:*

1. $\mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp = \mathcal{B}_2^\perp \circ \mathcal{B}_1^\perp$

1. $\mathcal{B}_1^\top \circ \mathcal{B}_2^\top = \mathcal{B}_2^\top \circ \mathcal{B}_1^\top$.*

2. $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp)$ este o structură de factorizare de dreapta.

2. $(\mathcal{B}_1^\top \cap \mathcal{B}_2^\top, \mathcal{B}_1 \circ \mathcal{B}_2)$ este o structură bicategorială de stânga.*

3. $\lambda(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = \mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2$.

4. $\mathcal{P}''(\mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2) = (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \circ \mathcal{E}_p$, $\mathcal{I}''(\mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2) = \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp$.

1. $\downarrow$ Fie $i_1 : X \to Y \in \mathcal{B}_1^\perp$, $i_2 : Y \to Z \in \mathcal{B}_2^\perp$ şi

$$i_2 \cdot i_1 = m_1 \cdot b_1, \tag{1}$$

$$b_1 = m_1 \cdot b_2 \tag{2}$$

$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^\perp)$ şi $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^\perp)$-factorizarea morfismelor respective. Din (2) deducem că $b_2 \in \mathcal{B}_1$ şi deoarece $b_2 \perp i_2$ avem

$$i_1 = t \cdot b_2, \tag{3}$$

$$i_2 \cdot t = m_1 \cdot m_2. \tag{4}$$

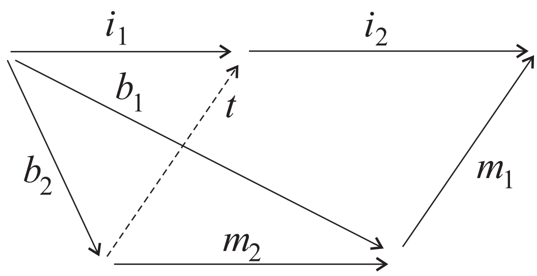


Figura 9.2.4

În egalitatea (3) $b_2 \in \mathcal{B}_1$ şi $i_1 \in \mathcal{B}_1^{\perp}$. Deci $b_2 \perp i_1$.

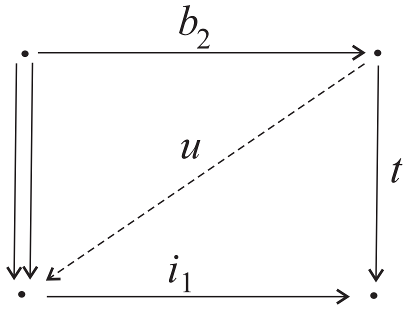


Figura 9.2.5

Astfel

$$u \cdot b_2 = 1, \tag{5}$$

şi

$$i_1 \cdot u = t \tag{6}$$

pentru un u, sau $b_2 \in \mathcal{I}so$. Atunci

$$i_1 \cdot i_2 = m_1 \cdot (m_2 \cdot b_1) \tag{7}$$

cu $m_1 \in \mathcal{B}_1^{\perp}$ şi $m_2 \cdot b_2 \in \mathcal{B}_2^{\perp}$. Deci $\mathcal{B}_2^{\perp} \circ \mathcal{B}_1^{\perp} \subset \mathcal{B}_1^{\perp} \circ \mathcal{B}_2^{\perp}$. Incluziunea inversă se verifică în acelaşi mod.

2. Este suficient să indicăm factorizarea unui morfism arbitrar $f \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie

$$f = i_1 \cdot b_1, \tag{1}$$

$$b_1 = i_2 \cdot b_2 \tag{2}$$

$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^{\perp})$-factorizarea lui f şi $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^{\perp})$-facrorizarea lui b_1. Din (2), deoarece $b_2 \in \mathcal{E}pi$, deducem că $b_2 \in \mathcal{B}_1$. Astfel

$$f = (i_1 \cdot i_2) \cdot b_2 \tag{3}$$

este $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1^{\perp} \circ \mathcal{B}_2^{\perp})$-factorizarea lui f.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "b_2"'] \arrow[drr, "b_1"] & & & \bullet \\
& \bullet \arrow[r, "i_2"] & \bullet \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.2.6

3. Să revenim la 8.3, pornind de la diagrama comutativă 8.3.1, ţinem cont că $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}_2$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "l_1^X"] \arrow[dr, dashed, "u^X"] \arrow[dd, "l_2^X"'] & & l_1X \arrow[dd, "s^{l_1X}"] \\
& uX \arrow[ur, dashed, "w^X"'] \arrow[dl, dashed, "v^X"] & \\
l_2X \arrow[rr, "s^{l_2X}"] & & sX
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.2.7

Este evident că $u^X \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2, s^{l_1X} \in \mathcal{B}_1^\perp, s^{l_2X} \in \mathcal{B}_2^\perp$. Deci $w^X \in \mathcal{B}_2^\perp$ şi $v^X = \mathcal{B}_1^\perp$. Astfel

$$s^X = (s^{l_1X} \cdot w^X) \cdot u^X \tag{1}$$

este $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp)$-factorizarea morfismului s^X.

4. $\varepsilon(\mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2) = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ şi $((\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \circ \mathcal{E}_p)^\perp = \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp$. $\uparrow$

9.2.16. Notaţii. Subcategoriile c-reflective $\mathcal{L}_\tau$. *Fie M o mulţime de puterea τ, $m(\tau)$ spaţiul Banach al funcţiilor definite şi mărginite pe mulţimea M, iar*

$$\mathcal{L}_\tau = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(m(\tau)), \quad \mathcal{K}_\tau =^c \mathcal{L}_\tau.$$

$l_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}_\tau, k_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}_\tau$ functorii respectivi.

Teoremă [Gs, 1975]. *Pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $k_\tau X$ este înzestrat cu topologia convergenţei uniforme pe toate mulţimile compacte din X', pentru care orice submulţime de puterea $\leq \tau$ este echicontinuă pe X.* $\uparrow$

9.2.17. *Subcategoria c-reflectivă $\mathcal{S}$ a spaţiilor cu topologia slabă cu functorul reflector $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ este o varietate (vezi de asemenea 9.4), închisă în raport cu extensiile.*

${}^c S = \tilde{\mathcal{M}}$ subcategoria spaţiilor cu topologia Mackey. Subcategoria $\tilde{\mathcal{M}}$ este închisă în raport cu limite inductive, produse şi extensii.

Fie $(E,t) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, (E, s(t))-$ $\mathcal{S}$*-replica, şi* $(E, m(t)) - \tilde{\mathcal{M}}$*-coreplica. Atunci* $s(t)$ *este topologia convergenţei uniforme pe toate mulţimile finite din spaţiul* E'*, iar* $m(t)$ *este topologia convergenţei uniforme pe toate mulţimile slab compacte din spaţiul* E'*.*

9.2.18. *Subcategoria reflectivă* $\mathcal{N}$ *şi subcategoria c-reflectivă* $u\mathcal{N}$ *cu functorii reflectori* $n : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{N}$ *şi* $u : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to u\mathcal{N}$*. T.Komura şi Y.Komura* [K, K, 1966] *au demonstrat că subcategoria spaţiilor nucleare are ca obiect* $\mathcal{M}_p$*-universal spaţiul* s *a funcţiilor rapid descrescătoare:*

$$\mathcal{N} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(s).$$

Pentru ca un spaţiu local convex să fie nuclear este necesar şi suficient ca fiecare mulţime echicontinuă din X' *să fie nucleară.*

A. Martineanu. Pentru ca un spaţiu local convex să fie ultranuclear este necesar şi suficient ca orice mulţime echicontinuă din X' *să fie ultranucleară.*

Subcategoria spaţiilor nucleare $\mathcal{N}$ *este închisă în raport cu subspaţii, factorspaţii, produse, suma unui număr numerabil de spaţii şi extensii (*$\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$*)-factorobiecte (vezi* [P, 1965], ıcap. 4). În particular, orice completare a unui spaţiu nuclear este un spaţiu nuclear.

Proprietăţile enumerate mai sus sunt adevărate şi pentru subcategoria $u\mathcal{N}$ a spaţiilor ultranucleare (vezi A.Martinean [Ma, 1964], B.Brudovsky [Br, 1968], C.Bessaga şi A.Pelizynsky [B, P, 1960]).

9.2.19. Teoremă. 1. [Br, 1968]. *Fie* (E, t) *un spaţiu local convex, şi* $(E, n(t))$ $\mathcal{N}$*-replica lui. Atunci* $n(t)$ *este topologia convergentei uniforme pe toate mulţimile ultranucleare.*

2. $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(l_2)$*.*

3. Fie nl_2 $\mathcal{N}$*-replica spaţiului Banach* l_2*. Atunci* $u\mathcal{N} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(nl_2)$*.*

4. Functorul reflector $u : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to u\mathcal{N}$ *are un adjunct la stânga.* $\uparrow$

Faptul că functorul $u : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to u\mathcal{N}$ este exact la stânga este demonstrat şi în ([J, 1981] 21 J.Propoziţia 4).

([J, 1981] 21.9 Corolarul 5). *Pentru orice spaţiu Banach infinit dimensional* E *avem* $nE = uE$ *şi acest spaţiu este obiect universal pentru subcategoria* $u\mathcal{N}$*.*

9.2.20. Teoremă. *1.* $u\mathcal{N}$ *este o subcategorie c-reflectivă.*

2. $\mathcal{N}$ *nu este o subcategrie c-reflectivă.*

3. $\tilde{\mathcal{N}} = u\mathcal{N}$*, cea mai mare subcategorie c-reflectivă ce se conţine în subcategoria* $\mathcal{N}$ *este* $u\mathcal{N}$*.*

4. Pentru orice spaţiu Banach B *infinit dimnesional* $u\mathcal{N} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(uB)$*.*

$\downarrow$ 1. Rezultă din faptul că functorul $u : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to u\mathcal{N}$ are un adjunct la stânga.

2. Fie A un spaţiu nuclear care nu este ultranuclear. Există un cardinal τ astfel încât A este un $\mathcal{M}_p$-subobiect al spaţiului $l_2^\tau : m : A \to l_2^\tau \in \mathcal{M}_p$. Examinăm morfismul $n(m)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "n(m)"'] & l_2^\tau \arrow[d] \\ & n(l_2^\tau) = (nl_2)^\tau \end{tikzcd}$$

Figura 9.2.8

Dacă $n(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$, atunci $n(m) \in \mathcal{M}_p$, iar $A \in |u\mathcal{N}|$. Contrazicere.

3. Fie $u\mathcal{N} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{N}$, unde $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Deoarece $\mathcal{L} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(l_2)$ în baza Teoremei 9.2.2 $\mathcal{L}$-replica obiectului l_2 este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru subcategoria $\mathcal{L} : \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(ll_2)$. Avem următoarele relaţii:

$$\begin{tikzcd} l_2 \arrow[r] & nl_2 \arrow[r] & ll_2 \arrow[r] & ul_2 = nl_2 \end{tikzcd}$$

Deci $\mathcal{L} = u\mathcal{N}$.

4. $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}P(B)$, dacă B este un spaţiu Banach infinit dimensional. Rămâne de apelat la Teorema 9.2.2. $\uparrow$

9.2.21. Subcategoria c-reflectivă a spaţiilor Schwartz cu functorul reflector $s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}h$.

D.A.Raicov a introdus următoarele noţiuni (vezi [Ra, 1962]).

Definiţie. *Fie X un spaţiu vectorial, $A, B \subset X$ şi B este absolut convexă. Mulţimea A se numeşte complet mărginită în raport cu mulţimea B şi se notează $A \prec B$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime finită $F \subset A$ astfel încât $A \subset F + \varepsilon B$.*

Spaţiul local convex X se numeşte $(\mathcal{S})$- spaţiu (spaţiu Schwartz) dacă pentru orice vecinătate absolut convexă V există o vecinătate U complet mărginită în raport cu V.

Subcategoria $\mathcal{S}h$ a (S)-spaţiilor este închisă în raport cu subspaţii, factorspaţii, produse, extensii ($(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)-$factorobiecte) şi suma unui număr numerabil de spaţii (vezi [Gr, 1973], Part 4, §4).

Fie $(E, t) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, iar k_0 familia tuturor vecinătăţilor lui zero V al acestui spaţiu pentru care există o vecinătate a lui zero U complet mărginită în raport cu V. Atunci (E, k_0) este $\mathcal{S}h$-replica obiectului (E, t).

Teoremă [G, G, 1978]. *Vom nota* ${}^{c}\mathcal{S}h$ *cu* $\mathcal{C}h$. $\mathcal{C}h$*-coreplica obiectului* (E,t) *este topologia convergenţei uniforme pe mulţimi* A *absolut convexe slab complete din* E' *ce posedă proprietatea: dacă* $\{x_n'\}$ *este un şir convergent la zero în spaţiul Banach* E_A'*, atunci* $\{x_n'\}$ *este o mulţime echicontinuă.*

9.2.22. Exerciţii. 1. $\lambda^*(\mathcal{I}so) = \lambda(\mathcal{I}so) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. $\lambda(\mathcal{I}so) = \lambda(\mu\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \lambda(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $\mathcal{L} \vee \mathcal{R} \in \mathbb{R}_c$ (vezi 8.3.9 p.3).

4. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c, (\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. Atunci $l(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$.

9.2.23. Probleme. *1. Este oare clasa* $\mathbb{R}_c$ *închisă în raport cu intersecţia în laticea* $\mathbb{R}$*?*

2. Dacă problema 1 are un răspuns pozitiv, atunci

$$\bar{\bar{\mathcal{R}}}_c = \cap\{\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c | \mathcal{R} \subset \mathcal{L}\}$$

este cea mai mică subcategorie c-reflectivă ce conţine subcategoria $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

3. Există oare în acest caz vreo metodă de a construi $\bar{\bar{\mathcal{R}}}_c$*-replica unui obiect arbitrar?*

4. De descris subcategoria c-coreflectivă ${}^{c}u\mathcal{N}$.

5. Orice element al clasei $\mathbb{R}_c$ *este o* $\mathcal{E}_f$*-varietate?*

9.3. Structuri de factorizare generate de clase bicomplete

9.3.1. Notaţii. Fie $\mathbb{R}_{nu} = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \notin \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)\}$ şi $\mathbb{K}_{nu} = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K} | \mathcal{K} \notin \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)\}$.

9.3.2. Exerciţii. Din Teorema 2.7.3 şi duala sa rezultă că avem urătoarele clase de structuri de factorizare.

1. $\mathbb{B}_{bf} = \{(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f, \mathcal{B}^{\llcorner}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$.

1*. $\mathbb{B}_{fb} = \{(\mathcal{B}^{\llcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$.

2. $\mathbb{B}_{bp} = \{(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap \mathcal{B}^{\llcorner}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$.

2*. $\mathbb{B}_{pb} = \{(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$.

3. $\mathbb{B}_{\varepsilon f} = \{(\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_f, (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner}) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)\}$.

3*. $\mathbb{B}_{f\mu} = \{(\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K})) | \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)\}$.

4. $\mathbb{B}_{\varepsilon u} = \{(\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner}) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}_{nu}\}$.

4* $\mathbb{B}_{u\mu} = \{(\mathcal{E}_p \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_u \circ (\mu\mathcal{K}) | \mathcal{K} \in \mathbb{K}_{nu}\}$.

5. $\mathbb{B}_{\varepsilon p} = \{((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner}) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}\} = \{(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R})) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}\}$.

5*. $\mathbb{B}_{p\mu} = \{\mathcal{E}_u \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K})) | \mathcal{K} \in \mathbb{K}\} = \{(\mathcal{E}'(\mathcal{K}, \mathcal{M}'(\mathcal{K})) | \mathcal{K} \in \mathbb{K}\}$.

9.3.3. Exerciţii. Există următoarele incluziuni.

1.$\mathbb{B}_{bf} \subset \mathbb{B}_{\varepsilon f}$. 2.$\mathbb{B}_{bp} \subset \mathbb{B}_{\varepsilon p}$.

3.$\mathbb{B}_{fb} \subset \mathbb{B}_{f\mu}$. 4.$\mathbb{B}_{pb} \subset \mathbb{B}_{p\mu}$.

9.3.4. Următorul tabel indică izomofismul (i) sau antiizomorfismul (a) unor latici.

			Izomorfismul direct	Izomorfismul invers
1.	a	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}ic$	$\mathcal{R} \mapsto \varepsilon\mathcal{R}$	$\mathcal{B} \mapsto \lambda(\mathcal{B})$
1*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}ic$	$\mathcal{K} \mapsto \mu\mathcal{K}$	$\mathcal{B} \mapsto \lambda^*(\mathcal{B})$
2.	i	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}_{bf}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{R}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M})$
2*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}_{bf}$	$\mathcal{K} \mapsto ((\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}_f, (\mu\mathcal{K})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}ono)$
3.	i	$\mathbb{R}_c \sim \mathbb{B}_{pb}$	$\mathcal{R} \mapsto (\mathcal{E}_u \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{R}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M})$
3*.	a	$\mathbb{K}_c \sim \mathbb{B}_{bp}$	$\mathcal{K} \mapsto ((\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap (\mu\mathcal{K})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u)$
4.	a	$\mathbb{R}_{nu} \sim \mathbb{B}_{\varepsilon u}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_p)$
4*.	a	$\mathbb{K}_{nu} \sim \mathbb{B}_{u\mu}$	$\mathcal{K} \mapsto (\mathcal{E}_p \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}\mathcal{M}_u \circ (\mu\mathcal{K}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E}_p \cap \mathcal{M})$
5.	a	$\mathbb{R} \sim \mathbb{B}_{\varepsilon p}$	$\mathcal{R} \mapsto ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u)$
5*.	i	$\mathbb{K} \sim \mathbb{B}_{p\mu}$	$\mathcal{K} \mapsto (\mathcal{E}_u \cap (\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))$	$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto \lambda^*(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}$

9.3.5. *1. Clasa $\mathbb{B}_{\varepsilon f}$. Fie $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară şi în virtutea Teoremei 2.7.3 $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_f, (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$ este o structură de factorizare. În plus această structură de factorizare aparţine clasei $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. Este adevărată şi afirmaţia duală.*

1^*. *Clasa $\mathbb{B}_{f\mu}$. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. Atunci $((\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))$ este o structură de factorizare care aparţine clasei $\mathbb{L}_x(\mathcal{K})$.*

2. Clasa $\mathbb{B}_{\varepsilon u}$. Perechea $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$ este o structură de factorizare. Însă $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_u$ pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

2^*. *Clasa $\mathbb{B}_{u\mu}$. Concluzii duale.*

3. Clasa $\mathbb{B}_{\varepsilon f}$. Clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară şi nu este $\mathcal{E}pi$-coereditară. De aceea $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

3^*. *Clasa $\mathbb{B}_{f\mu}$. Concluzii duale.*

9.3.6. Probleme. *1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. În ce condiţii $(\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R})) = ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_f, (\varepsilon\mathcal{R})^{\llcorner})$?*

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. În ce condiţii $(\mathcal{E}''(\mathcal{K}), \mathcal{M}''(\mathcal{K})) = ((\mu\mathcal{K})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))$?

9.3.7. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare ce verifică condiţiile:*

1. $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$.

2. Clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară.

3. Clasa $\mathcal{I}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

Atunci există o subcategorie reflectivă $\mathcal{L}$ astfel încât $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$.

În virtutea Teoremei 2.7.3 pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ perechea $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{P}, \mathcal{I} \cap (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$ este o structură de factorizare în $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Notăm $\alpha_{(\mathcal{P},\mathcal{I})}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\Pi)$.

Exerciţii. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o stuctură de factorizare ce verifică condiţiile 1-3, şi $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$. Atunci*

1. Aplicaţia $\alpha_{(\mathcal{P},\mathcal{I})}$ *este identică pe subclasa* $\mathbb{R}(\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia $\alpha_{(\mathcal{P},\mathcal{I})}$ *ia valori în clasa* $\mathbb{R}(\mathcal{L})$:

$$\alpha_{(\mathcal{P},\mathcal{I})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathcal{L}), \textit{ unde } (\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L})).$$

3. Pentru $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *avem* $\mathcal{L} = \Pi$,

$$\alpha_{(\mathcal{E}pi,\mathcal{M}_f)}(\mathcal{R}) = \Pi \quad \textit{pentru} \quad \forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}.$$

4. Pentru $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *avem* $\mathcal{L} = \mathcal{S}$,

$$\alpha_{(\mathcal{E}_u,\mathcal{M}_p)}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{S}) \quad \textit{pentru} \quad \forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}.$$

5. Pentru $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ *avem* $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$,

$$\alpha_{(\mathcal{E}p,\mathcal{M}_u)}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \quad \textit{pentru} \quad \forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}.$$

9.3.8. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{S})$, *iar* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Atunci* $\mathcal{R}$ *este o subcategorie* $\mathcal{B}^\urcorner$*-reflectivă.*

2. $\mathcal{U}(\Pi) \perp (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u) \Rightarrow \mathcal{P}'(\Pi) \perp (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u) \Rightarrow \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u \subset \mathcal{I}'(\Pi)$.

3. $\mathcal{U}(\Pi) \perp \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$ *pentru orice* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

4. $((\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})^\urcorner, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) \in \mathbb{L}_\rho(\Pi)$ *pentru orice* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

5. $\mathbb{L}_\rho(\Pi)$ *conţine o clasă proprie de elemente.*

6. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. *Atunci* $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}^\urcorner, \mathcal{P}''(\mathcal{R}) \circ \mathcal{B}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$.

6^0. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic,\ \mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{B} \subset \mu\mathcal{K}$. *Atunci* $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}) \circ \mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{M}'(\mathcal{K})) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{K})$.

7. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{L} = \lambda(\mathcal{B})$, *iar* $\mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \Gamma_0$. *Mai departe, fie* $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$*-replica lui* A, *şi* $b : A \to X \in (\varepsilon\Gamma_0) \circ \mathcal{B}$. *Atunci* $r^A = f \cdot b$ *pentru un* f.

8. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ *şi* $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$. *Atunci pentru structurile de factorizare* $((\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})^\urcorner, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$ *şi* $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^\urcorner, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ *avem* $l(\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}) \subset \mathcal{M}_f$ *şi* $l(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) \subset \mathcal{M}_p$.

9.3.9. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *şi* $\mathcal{L} = \lambda(\mathcal{B})$. *Atunci* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0$ *este cel mai mic element al clasei* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$.

$\downarrow$ În primul rând menţionăm, că $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^\llcorner, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ este o structură de factorizare. Mai departe, fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-replica lui X, şi $g_0^{lX} : lX \to g_0lX$ Γ_0-replica lui lX. Atunci $g_0lX \in |\mathcal{L} \cap \Gamma_0|$, iar $g_0^{lX} \cdot l^X$ este $(\mathcal{L} \cap \Gamma_0)$-replica lui X.

Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$, $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X, iar

$$r^X = f \cdot p \tag{1}$$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea lui r^X. Atunci $p \in \mathcal{E}_u \cap (\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Atunci:

$$l^X = f \cdot p \tag{2}$$

pentru un f, iar

$$g_0^{lX} \cdot f = t \cdot i \tag{3}$$

pentru un t. Deci $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "l^X"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "r^X"] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[dl, dashed, "f"] & rX \arrow[dl, dashed, "t"] \\
lX \arrow[r, "g_0^{lX}"] & g_0 lX &
\end{tikzcd}$$

Figura 9.3.1.

9.3.10. Notaţii. *Fie* $\mathbb{R}^u(\Gamma_0) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\Gamma_0) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})\}$, $\mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \subset \Gamma_0$ *şi* $r(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f\}$, *adică* $\mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0)$ *conţine subcategoriile reflective ce se includ în* Γ_0 *şi au functorul reflector exact la stânga.*

9.3.11. Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{R} \longmapsto \varphi_a(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) \ \textit{pentru} \quad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^u(\Gamma_0)$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{L} \longmapsto \psi_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma_0 \ \textit{pentru} \quad \mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^u(\Gamma_0)$.

3. Aplicaţiile φ_a *şi* ψ_a *sunt reciproc inverse*

$$\mathbb{R}^u(\Gamma_0) \xrightarrow{\varphi_a} \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u) \xrightarrow{\psi_a} \mathbb{R}^u(\Gamma_0).$$

$\downarrow$ 1.$\varphi_a(\mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă: dacă $r^X : X \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica lui X, iar

$$r^X = i^X \cdot p^X \tag{1}$$

este $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea lui r^X, atunci p^X este $\varphi_a(\mathcal{R})$-replica lui X, iar $i^X : pX \to rX$ este $\mathcal{R}$- şi Γ_0-replica lui pX.

Să verificăm că $\varphi_a(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$. Fie $A \in |\varphi_a(\mathcal{R})|, b : A \to X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$, iar $r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica lui A. Atunci $r^A = g_0^A$. Deci

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "r^A = g_0^A"] \arrow[dr, "b"'] & & rA = g_0 A \\ & X \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 9.3.2

$$r^A = f \cdot b \tag{2}$$

pentru un f. Deoarece $b \in \mathcal{E}pi$ rezultă că $f \in \mathcal{M}_p$, iar $X \in |\varphi_a(\mathcal{R})|$.

2. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{T})$ (Teorema 12.2.6) şi $\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0 \in \mathbb{R}^{sm}_f(\mathcal{T})$ (Teorema 12.2.9). Deci $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma_0 \in \mathbb{R}^u(\Gamma_0)$.

3. $\varphi_a \circ \psi_a = 1$. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$. Atunci $\varphi_a\psi_a(\mathcal{T}) = \varphi_a(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0)$.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0)$. Fie $A \in |\mathcal{T}|$, iar $g_0^A : A \to g_0A$ Γ_0-replica lui A. Atunci $g_0A \in |\mathcal{T} \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0|$ şi $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0)|$.

$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0) \subset \mathcal{T}$. Fie $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{T} *_{sr} \Gamma_0)|$ şi $g_0^A : A \to g_0A$. Deci $g_0A \in |\mathcal{T}|$, iar cu el şi $A \in |\mathcal{T}|$.

$\psi_a \circ \varphi_a = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^u(\Gamma_0)$. Atunci $\psi_a\varphi_a(\mathcal{R}) = \psi_a(\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R})) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma_0$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma_0$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma_0|$.

$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. Fie $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma_0|$. Examinăm egalitatea (1). Atunci p^X este $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R})$-replica lui X. Deci $pX \in |\Gamma_0|$, şi $i^X \in \mathcal{I}so$. Astfel $pX \in |\mathcal{R}|$ şi, deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^u(\Gamma_0)$, rezultă că $X \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

9.3.12. Corolar. $\mathbb{R}^u(\Gamma_0)$ *conţine o clasă proprie de elemente.*

9.3.13. Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{R} \mapsto \varphi_b(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}) \textit{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0)$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_c$.

2. Aplicaţia
$$\mathcal{L} \mapsto \psi_b(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \cap \Gamma \textit{ pentru } \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0)$.

3. Aplicaţia φ_b şi ψ_b sunt reciproc inverse

$$\mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0) \xrightarrow{\varphi_b} \mathbb{R}_c \xrightarrow{\psi_b} \mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0).$$

$\downarrow$ Vom menţiona doar că pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ functorul reflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L} \cap \Gamma$ verifică egalitatea $t = g \cdot l$. $\uparrow$

9.3.14. Exemple. *Laticea $\mathbb{R}$ conţine următoarele subclase proprii:*

- $\mathbb{R}_c$ *(Teorema 9.2.12)*, $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$;

- $\mathbb{R}_{ex}$ *şi* $\mathbb{R}_{ex} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, *deoarece* $\mathbb{R}_c \subset \mathbb{R}_{ex} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$;

- $\mathbb{R}_{ne}$ *şi* $\mathbb{R}_{ne} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *(Teorema 6.7.10);*

- $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *(Teorema 10.1.8). Deoarece* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\Gamma_0) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$) ([W, 1974], *Corollary 5.10), deducem, că* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este unica* $\mathcal{E}_f$*-varietate în clasa* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$;

- $\mathbb{R}^u(\Gamma_0)$ *şi* $\mathbb{R}(\Gamma_0)$ *(Teorema 9.3.11);*

- $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *care conţine subclasele* $\mathbb{R}(\mathcal{S})$ *şi* $\mathbb{R}(\Gamma_0)$).

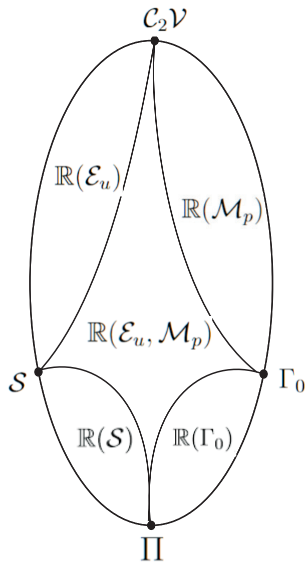


Figura 9.3.3

9.3.15. Problemă. *Este oare* $\mathbb{R}(\mathcal{S})$ *o mulţime?*

9.3.16. *Vom examina un rezultat mai general decât Teoremele 6.6.10 şi 6.6.14.*

Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi posedă următoarele proprietăţi:*

A. $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_u$).

B. Clasa $\mathcal{M}$ *este* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$*-coereditară.*

C. În clasa $\mathbb{R}(\mathcal{M})$ *există cel mai mic element* $\bar{\Gamma_0}$.

Fie $\mathbb{B}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *clasă elementelor* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ *cu proprietăţile* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ *sau* $(\mathcal{I} \subset \mathcal{M})$ *şi clasa* $\mathcal{P}$ *este* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M})$*-coereditară. Astfel* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$(\mathcal{P},\mathcal{I}) \mapsto \varphi_\alpha(\mathcal{P},\mathcal{I}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\bar{\Gamma_0}) \text{ pentru } (\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}(\mathcal{E},\mathcal{M})$$

ia valori în laticea $\mathbb{R}(\mathcal{M})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_\alpha(\mathcal{R}) = ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}, \mathcal{M} \cap (\varepsilon\mathcal{R})^\perp) \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$$

ia valori în laticea $\mathbb{B}(\mathcal{E},\mathcal{M})$.

3. Aplicaţiile φ_α *şi* ψ_α *sunt reciproc inverse şi stabilesc un antiizomorfism al laticelor* $\mathbb{B}(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *şi* $\mathbb{R}(\mathcal{M})$.

$$\mathbb{B}(\mathcal{E},\mathcal{M}) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathbb{R}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\psi_\alpha} \mathbb{B}(\mathcal{E},\mathcal{M}).$$

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$, *iar* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = \beta(\mathcal{R})$. *Morfismul* $f : X \to Y \in \mathcal{I}$ *atunci şi numai atunci, când* $f \in \mathcal{M}$ *şi pătratul*

$$r(f) \cdot r^X = r^Y \cdot f$$

este cartezian. $\uparrow$

Exemple. *1. Elementele clasei* $\mathbb{B}_{pb}$ *verifică condiţiile A-C ale punctului precedent.*

2. Pentru structura de factorizare $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) \in \mathbb{B}_{pb}$ *obţinem rezultatele paragrafului 6.6.*

9.4. Varietăţi şi operaţiile $\mathcal{S}_\mathcal{B}$ şi $\mathcal{Q}_\mathcal{B}$

9.4.1. Noţiunea de varietate o examinăm într-un aspect mai concret.

Definiţie. *Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, *şi* $\mathcal{E}$ *o clasă de epimorfisme. Subcategoriea* $\mathcal{V}$ *se numeşte* $(\mathcal{P},\mathcal{E})$*-varietate, dacă ea este* $\mathcal{P}$*-reflectivă şi este închisă în raport cu* $\mathcal{E}$*-factorobiecte.*

d^* : $(\mathcal{I},\mathcal{M})$*-covarietate.*

9.4.2. Notaţii. *Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, *şi* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$. *Atunci* $\mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E})$ *este clasa* $(\mathcal{P},\mathcal{E})$*-varietăţilor nenule ale categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$\mathbb{V}(\mathcal{E})$ *este clasa subcategoriilor reflective închise în raport cu* $\mathcal{E}$*-factorobiecte.*

d^* : *Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, *şi* $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}ono$. *Atunci* $\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{I},\mathcal{M})$ *este clasa subcategoriilor* $\mathcal{I}$*-coreflective nenule închise în raport cu* $\mathcal{M}$*-subobiecte.*

$\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$ *este clasa subcategoriilor coreflective închise în raport cu* $\mathcal{M}$*-subobiecte.*

Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *două structuri de factorizare şi* $\mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E})$ *clasa subcategoriilor* $\mathcal{P}$*-reflective închise în raport cu* $\mathcal{E}$*-factorobiecte.*

d^* : *clasa* $\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{I},\mathcal{M})$.

9.4.3. Exemple. *1. Pentru orice* $(\mathcal{P},\mathcal{I}),(\mathcal{E},\mathcal{M})\in\mathbb{B}$, $\mathcal{C}_2\mathcal{V}\in\mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E})$ *şi* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}\in\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{I},\mathcal{M})$.

2. $\Sigma\in\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M}ono,\mathcal{E}_f)$.

3. $\mathcal{S},u\mathcal{N},\mathcal{N},\mathcal{S}h\in\mathbb{V}(\mathcal{E}_u,\mathcal{E}_f)$.

4. Fie $(\mathcal{P}_1,\mathcal{I}_1),(\mathcal{P}_2,\mathcal{I}_2)\in\mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2$. *Atunci* $\mathbb{V}(\mathcal{P}_1,\mathcal{E})\subset\mathbb{V}(\mathcal{P}_2,\mathcal{E})\subset\mathbb{V}(\mathcal{E}pi,\mathcal{E})$.

5. Fie $(\mathcal{E}_1,\mathcal{M}_1),(\mathcal{E}_2,\mathcal{M}_2)\in\mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2$. *Atunci* $\mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E}_2)\subset\mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E}_1)\subset\mathbb{V}(\mathcal{E},\mathcal{E}_f)$.

9.4.4. Remarcă. *Unii autori* (vezi [D, M, S, 1972], [W, 1974]) *au examinat varietăţi în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *în sensul* $\mathbb{V}(\mathcal{E}_u,\mathcal{E}_f)$, *adică subcategorii reflective închise în raport cu subspaţii* ($\mathcal{M}_p$*-subobiecte) şi factorspaţii* ($\mathcal{E}_f$*-factorobiecte).*

9.4.5. Varietăţile $\mathcal{V}_m$. *În lucrarea* [D, M, S, 1972] *sunt expuse următoarele momente.*

1. Fie $E\in|\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, *şi* m *un cardinal infinit. Dacă orice vecinătate a lui zero în* E *conţine un subspaţiu de codimensiunea strict mai mică ca* m, *atunci* E *se numeşte* $T(m)$*-spaţiu.*

2. (Teorema 2.2). Fie $\mathcal{C}$ *clasa* $T(m)$*-spaţiilor pentru un cardinal* m *infinit şi fix. Atunci* $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ *conţine numai* $T(m)$*-spaţii.*

3. Varietatea $T(m)$*-spaţiilor se notează* $\mathcal{V}_m$ *şi pentru* m *numerabil* $\mathcal{V}_{\chi_0}=\mathcal{S}$.

4. (Corolar 2.4). Clasa varietăţiilor $\mathbb{V}(\mathcal{E}_u,\mathcal{E}_f)$ *nu este mulţime.*

5. (Teorema 2.7). Variatatea $\mathcal{V}$ *este generată de un singur obiect atunci şi numai atunci, când* $\mathcal{V}\subset\mathcal{V}_m$ *pentru un cardinal infinit* m.

6. (Teorema 2.11). O varietate generată de un singur obiect posedă un obiect $\mathcal{M}_p$*-universal.*

9.4.6. Propoziţie. $\mathcal{V}_m\in\mathbb{V}(\mathcal{E}_u,\mathcal{E}pi)$.

9.4.7. Varietăţile $\mathcal{V}(\varphi_m)$. *Tot în aceeaşi lucrare sunt examinate şi varietăţile* $\mathcal{V}(\varphi_m)$.

1. Fie m *un cardinal infinit, iar* $\varphi_m=K^{(m)}$, *adică* φ_m *este un spaţiu vectorial* m*-dimensional înzestrat cu cea mai fină topologie local convexă. De asemenea* $\varphi_{\chi_0}=\varphi$.

2 (Teorema 2.5). Fie n *un cardinal inifinit, şi* m *cel mai mic cardinal mai mare ca* n.

(i) φ_n *este un obiect* $\mathcal{M}_p$*-universal pentru* $\mathcal{V}(\varphi_n)$.

(ii) $\mathcal{V}(\varphi_m)$ *are o singură subvarietate maximală* $\mathcal{V}(\varphi_n)$.

(iii) $\mathcal{V}(\varphi_m)\cap\mathcal{V}_m=\mathcal{V}(\varphi_n)$.

3 (Teorema 3.6). $\mathcal{V}(\varphi)$ *este varietatea cu proprietatea: orice varietate proprie ce conţine varietatea* $\mathcal{S}$ *conţine şi varietatea* $\mathcal{V}(\varphi)$.

9.4.8. [W, 1974] (Corolary 5.10). *Orice spaţiu local convex este un factorspaţiu a unui spaţiu complet.*

Propoziţie. *1. Pentru orice element* $\Gamma\in\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *avem* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\Gamma)=\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. $\mathbb{V}(\varepsilon\Gamma_0,\mathcal{E}_f)=\{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$. $\uparrow$

9.4.9. Teoremă. *Fie* Π *subcategoria spaţiilor complete cu topologie slabă, şi* $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Pi$ *functorul reflector. Atunci:*

1. $\pi(\mathcal{M}_u) \subset \mathcal{S}ec$.

2. $\pi(\mathcal{E}pi) \subset \mathcal{R}et$.

3. Functorul $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *este exact.*

4. $\mathcal{E}pi\ \Pi = \mathcal{R}et\ \Pi$.

5. $\mathcal{M}ono\ \Pi = \mathcal{S}ec\ \Pi$.

6. $(\mathcal{R}et\ \Pi, \mathcal{S}ec\ \Pi)$ *este unica structură de factorizare în categoria* Π.

7. $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Pi$ *nu este un monofunctor.*

8. Subcategoria Π *este închisă în raport cu* $\mathcal{E}pi$*-factorobiecte:* $\Pi \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi, \mathcal{E}pi)$.

$\downarrow$ 1. Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}_u$. Examinăm pătratul comutativ

$$\pi(m) \cdot m^X = \pi^Y \cdot m. \tag{1}$$

Deoarece πX este un obiect $\mathcal{M}_u$-injectiv, rezultă că

$$\pi^X = f \cdot m \tag{2}$$

pentru un morfism f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi^X"'] & Y \arrow[d, "\pi^Y"] \arrow[dl, dashed, "f"'] \\ \pi X \arrow[r, shift left, "\pi(m)"] & \pi Y \arrow[l, dashed, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Figura 9.4.1

Atunci

$$f = g \cdot \pi^Y \tag{3}$$

pentru un morfism g. Avem

$$g \cdot \pi(m) \cdot \pi^X = (\text{din}(1)) = g \cdot \pi^Y \cdot m = (\text{din}(3)) = f \cdot m = (\text{din}(2)) = \pi^X,$$

i.e.

$$g \cdot \pi(m) \cdot \pi^X = \pi^X, \tag{4}$$

sau

$$g \cdot \pi(m) = 1. \tag{5}$$

Deci $\pi(m) \in \mathcal{S}ec$.

2. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}pi$. Examinăm diagrama comutativă

$$\pi(e) \cdot \pi^X = \pi^Y \cdot e. \tag{1}$$

Atunci $\pi(e) \in \mathcal{E}pi$. Fie

$$\pi(e) = m \cdot p. \tag{2}$$

$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$-factorizarea morfismului respectiv, şi

$$m = i \cdot b \tag{3}$$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea morfismului m. Subcategoria Π este închisă în raport cu $\mathcal{E}_f$-factorobiecte, ([Gr, 1973], part 1, §6, Proposition 13, Corolary), deci $Z \in |\Pi|$. Mai departe, b este o aplicaţie bijectivă, iar topologia spaţiilor din subcategoria Π este cea mai slabă topologie local convexă Hausdorff ([Gr, 1973], part 1, §6, Propozition 11). Deci $b \in \mathcal{I}so$. Obiectele subcategoriei Π sunt $\mathcal{M}_u$-injective, iar $i \in \mathcal{M}_p$. Deci i este secţionabil. Deoarece $i \in \mathcal{E}pi$, deducem că $i \in \mathcal{I}so$. Astfel $\pi(e) \in \mathcal{E}_f$. Atunci $\pi(e)$ admite un invers de stânga ([Gr, 1973], part 1, §6, Propozition 3).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e \in \mathcal{E}pi"] \arrow[d, "\pi^X"'] & Y \arrow[d, "\pi^Y"] \\
\pi X \arrow[r, "\pi(e)"] \arrow[d, "p \in \mathcal{E}_f"'] & \pi Y \\
Z \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "b \in \mathcal{E}_u"] & T \arrow[u, "i \in \mathcal{M}_p"']
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.2

3. Rezultă din p.1 şi p.2.

4. Rezultă din p.2.

5. Rezultă din ([Gr, 1973], part 1, §6, Exercise 1b)).

6. Rezultă din p.4 şi p.5.

7. Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}ono\, \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi fie că $m \notin \mathcal{M}_u$. Dacă $\pi(m) \in \mathcal{M}ono\, \Pi = \Pi \cap \mathcal{M}ono\, \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, atunci $\pi(m) \in \mathcal{S}ec$, şi deci $\pi(m) \cdot \pi^X \in \mathcal{M}_u$, iar din egalitatea

$$\pi(m) \cdot \pi^X = \pi^Y \cdot m \tag{8}$$

rezultă că $m \in \mathcal{M}_u$.

8. Fie $A \in |\Pi|, p : A \to X \in \mathcal{E}pi$, iar $\pi : X \to \pi X$ Π-replica obiectului X. Atunci $\pi^X \cdot p \in \mathcal{E}pi$. Deci $\pi^X \cdot p$ este o retracţie, iar cu el şi π^X este o retracţie. Dar $\pi^X \in \mathcal{E}pi$. Deci $\pi^X \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

9.4.9*. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este adevărată Teorema duală.

Teoremă. *Fie Σ subcategoria spaţiilor cu cea mai fină topologie local convexă, şi $\sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma$ functorul coreflector. Atunci:*

1. $\sigma(\mathcal{E}_u) \subset \mathcal{R}et$.

2. $\sigma(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{S}ec$.

3. Functorul $i \cdot \sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este exact.

4. $\mathcal{E}pi\Sigma = \mathcal{R}et\Sigma$.

5. $\mathcal{M}ono\Sigma = \mathcal{S}ec\Sigma$.

6. $(\mathcal{R}et\Sigma, \mathcal{S}ec\Sigma)$ este unica structură de factorizare în categoria Σ.

7. σ nu este un epifunctor.

8. Subcategoria Σ este închisă în raport cu $\mathcal{M}ono$-subobiecte: $\Sigma \in \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M}ono, \mathcal{M}ono)$.

$\downarrow$ 1. Fie $p : X \to Y \in \mathcal{E}_u$. Atunci $\sigma(p) \in \mathcal{E}_u$ şi orice operator liniar invers la stânga lui p este continuu. Deci $\sigma(p) \in \mathcal{R}et$.

2. Dacă $m : X \to Y \in \mathcal{M}ono$, atunci $\sigma(m) \in \mathcal{M}ono$. Deci $\sigma(m) \in \mathcal{S}ec$ ([Gr, 1973], part 1, §6, Proposition 10).

3-6. Evident.

7. Fie $p : X \to Y \in \mathcal{E}pi$ şi $p \notin \mathcal{E}_u$. Dacă $\sigma(p)$ ar fi un epimorfism, atunci, conform p.4, $\sigma(p) \in \mathcal{R}et\Sigma$, şi $\sigma^Y \cdot \sigma(p) \in \mathcal{E}_u$. Deci $p \in \mathcal{E}_u$ în baza egalităţii

$$\sigma(p) \cdot \sigma^X = \sigma^Y \cdot p. \tag{1}$$

8. În baza p.2.$\uparrow$

9.4.10. Teoremă. *1. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structuă de factorizare cu clasa de injecţii $\mathcal{I}$ stabilă la dreapta. De exemplu, $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ sau $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\llcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ cu $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi) \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi)$.*

1^*. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare cu clasa de proiecţii $\mathcal{P}$ stabilă la stânga. De exemplu, $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{B}^{\llcorner}, \mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f)$ cu $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\Sigma) \in \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M}ono)$.*

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)|$ şi $e : A \to X \in \mathcal{E}pi$. Există un obiect $Z \in |\Pi|$ şi un morfism $i : A \to Z \in \mathcal{I}$. Dacă

$$e' \cdot i = i' \cdot e \tag{1}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele e şi i, atunci $e' \in \mathcal{E}pi$ şi $i' \in \mathcal{I}$. În virtutea Teoremei 9.4.9 p.8 $T \in |\Pi|$ şi $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)|$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e \in \mathcal{E}pi"] \arrow[d, "i \in \mathcal{I}"'] & X \arrow[d, "i' \in \mathcal{I}"] \\ Z \arrow[r, dashed, "e' \in \mathcal{E}pi"] & T \end{tikzcd}$$

Figura 9.4.3

Corolar. *1.* $\mathcal{S} \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi)$.

2. Fie $(A,t) \in |\mathcal{S}|, (A,\sigma(t))$*-*$\Sigma$*-coreplica lui* (A,t) *şi* $(A, s\sigma(t)))$ $\mathcal{S}$*-replica lui* $(A,\sigma(t))$. *Orice topologie local convexă* u *cu* $s(t) \le u \le s\sigma(t)$ *este o topologie slabă.* $\uparrow$

9.4.11. Notaţii. *Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *două structuri de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\mathcal{C}$ *o subcategorie. Stabilim* $\mathcal{V}_{\mathcal{P},\mathcal{E}}(\mathcal{C})$ *cea mai mică subcategorie* $\mathcal{P}$*-reflectivă închisă în raport cu* $\mathcal{E}$*-factorobiecte care conţine subcategoria* $\mathcal{C}$.

9.4.12. Teoremă. *1. Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I})$ *o structură de factorizare cu clasa* $\mathcal{I}$ *stabilă la dreapta,* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *o structură de factorizare cu clasa de proiecţii* $\mathcal{E}$ *completă la stânga şi* $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}P(\mathcal{C}).$$

2. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *o structură de factorizare cu clasa de proiecţii* $\mathcal{E}$ *completă la stânga, şi* $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P},\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}).$$

$\downarrow$ $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{I}}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}P(\mathcal{C})$. Fie $Z \in |\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C})|$. Există atunci un obiect $A \in |P(\mathcal{C})|$ şi morfismele $i : X \to A \in \mathcal{I}, e : X \to Z \in \mathcal{E}$. Fie

$$i' \cdot e = e' \cdot i \tag{1}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele i şi e. Atunci $e' \in \mathcal{E}$ şi $i' \in \mathcal{I}$, iar $Z \in |\mathcal{S}_{\mathcal{I}}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}P(\mathcal{C})|$.

$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}P(\mathcal{C}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C})$. Demonstraţie duală.

2. În primul rând, $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{P},\mathcal{E}}(\mathcal{C})$. Deci şi $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{P},\mathcal{E}}(\mathcal{C})$. În rândul doi, $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C})$ în baza p.1 este o subcategrie $\mathcal{P}$-reflectivă.

Astfel am demonstrat că

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P},\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\mathcal{S}_{\mathcal{I}}P(\mathcal{C}). \uparrow$$

9.4.13. Remarcă. *Teorema 1.1 din lucrarea* [D, M, S, 1971] *este cazul când* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$:

$$v(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}\ \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} P(\mathcal{C}) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f} P(\mathcal{C}).$$

9.4.14. Lemă. *Fie* $(\mathcal{A}^{\top}, \mathcal{A})$ *o structură de factorizare de stânga,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_u$ *şi* $\mathcal{B}$ *o clasă completă la stânga. Atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ *pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

$\downarrow$ $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ (Lema 6.4.7 p.1) şi $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}$ pentru orice $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ (Lema 6.4.7. p.2).

$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$. Fie $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{A}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$. Există atunci obiectul $Z \in |\mathcal{R}|$ şi morfismele $b : Z \to X \in \mathcal{B}$ şi $a : A \to X \in \mathcal{A}$. Construim pătratul cocartezian

$$a \cdot b' = b \cdot a', \tag{1}$$

unde $b' : P \to A$. Atunci $a' \in \mathcal{A}$, $b' \in \mathcal{B}$ şi $\in \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})|$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "a'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & Z \arrow[d, "b"] \\
A \arrow[r, "a \in \mathcal{A}"] & X
\end{tikzcd}$$

Diagrama 9.4.4

9.4.14*.Lemă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{A} = \varepsilon\mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{B}$ *o clasă completă la dreapta. Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ *pentru orice* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. $\uparrow$

9.4.15. Teoremă. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$.

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$.

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ *şi* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

$\downarrow$ 1 şi 2 din Lemma 6.4.7.

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. Avem $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. Deci $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ şi $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset$ (conform Lemei 9.4.14) $\subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$.

În varianta duală $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. Definitiv $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. $\uparrow$

9.4.15*. Teoremă. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *şi* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}^s(\mathcal{B})$.

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}_f(\mathcal{R})$.

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K})$ *şi* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}_f^s(\mathcal{B})$. $\uparrow$

9.4.16. Corolar. *Avem următoarele diagrame comutative pentru* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^s(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"'] & & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \\
 & \mathbb{R}_f(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^s(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] & \\
\mathbb{K} \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"'] & & \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B}) \\
 & \mathbb{K}_f(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

a) b)

Figura 9.4.5

9.4.17. Următoarea Teoremă permite de a construi $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-replica şi $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-replica unui obiect arbitrar $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$.

Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{B} \in \varepsilon\mathcal{L}$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ *(vezi 11.1).*

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ *(vezi 11.3).*

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X, şi

$$r^X = b^X \cdot p^X \tag{1}$$

$(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea lui r^X. Deoarece $r^X \in \mathcal{E}pi$ şi $b^X \in \mathcal{M}_u$ rezultă că $p^X \in \mathcal{E}pi$. Se verifică uşor că p^X este $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-replica lui X.

2. Fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica lui X, $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replica lui kX şi

$$t^X \cdot k^X = p^X \cdot r^{kX} \tag{2}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi r^{kX}. Deoarece $k^X \in \mathcal{B}$, rezultă că $p^X \in \mathcal{B}$. Deci $\mathcal{T} \in |\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$. Să verificăm că t^X este $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-replica lui X. Fie $Z \in |\mathcal{R}|, b : Z \to Y \in \mathcal{B}$ şi $f : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci

$$f \cdot k^X = b \cdot g \tag{3}$$

pentru un g. Deoarece $Z \in |\mathcal{R}|$

$$g = u \cdot r^{kX} \tag{4}$$

pentru un u. Se verifică egalitatea

$$(b \cdot u) \cdot r^{kX} = f \cdot k^X. \tag{5}$$

Deci

$$f = v \cdot t^X, \tag{6}$$

$$b \cdot u = v \cdot p^X \tag{7}$$

pentru un v. Astfel f se extinde prin t^X. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "r^{kX}"] \arrow[d, "k^X"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "g"] & rkX \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "p^X"'] & Z \arrow[d, "b"] \\
X \arrow[r, dashed, "t^X"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & T \arrow[r, dashed, "v"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.6

9.4.17*. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} *_s \mathcal{L}$.

2. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} *_{sc} \mathcal{L}$. $\uparrow$

9.4.18. Examinăm condiţiile:

a. $(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathcal{E} = \mathcal{I}so$.

b. Clasa $\mathcal{E}$ este stabilă la stânga.

c. Clasa $\mathcal{M}$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară.

Lemă. *Examinăm afirmaţiile:*

1. $l(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.

2. Pentru $e : X \to Y \in \mathcal{E}$ *pătratul*

$$l^Y \cdot e = l(e) \cdot l^X \tag{1}$$

este cocartezian.

3. $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E})$.

4. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

5. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

6. $(\mathcal{E} \circ (\varepsilon\mathcal{L}), (\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner} \cap \mathcal{M})$ *este o structură de factorizare în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

7. Clasa $(\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$ *este* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*-coereditară.*

Cu condiţiile a, b, c în cazurile respective sunt adevărate echivalenţele:

$$3 \Longleftrightarrow 2 \;\underset{\Longrightarrow}{\overset{a}{\Longleftarrow}}\; 1 \;\underset{\Longleftarrow}{\overset{b}{\Longrightarrow}}\; 4 \;\underset{\Longleftarrow}{\overset{c}{\Longrightarrow}}\; 5 \Longleftrightarrow 6 \Longleftrightarrow 7$$

În particular, dacă $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$, atunci condiţiile a, b şi c se îndeplinesc şi afirmaţiile 1-7 sunt echivalente, iar condiţia 2 poate fi formulată astfel:

$2'$. *Functorul $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ este exacr la dreapta.*

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}$ şi

$$e' \cdot l^X = b \cdot e \tag{2}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele l^X şi e. Atunci

$$l(e) = t \cdot e' \tag{3}$$

$$l^Y = t \cdot b \tag{4}$$

pentru un t. Avem $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci şi $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. Din egalitatea (3) rezultă că $t \in \mathcal{E}$. Astfel $t \in \mathcal{E} \cap (\varepsilon\mathcal{L}) = \mathcal{I}so$ (conditaia a).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[dd, "l^X"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "b"'] \arrow[dd, "l^Y"] \\
& T \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
lX \arrow[ur, dashed, "e'"] \arrow[rr, "l(e)"] & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.7

$2 \Rightarrow 1$. Deoarece clasa $\mathcal{E}$ e stabilă la dreapta.

$2 \Rightarrow 3$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}$. În pătratul cocartezian (1), dacă $X \in |\mathcal{L}|$, atunci $l^X \in \mathcal{I}so$ şi $l^Y \in \mathcal{I}so$. Deci $Y \in |\mathcal{L}|$.

$3 \Rightarrow 2$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}$. În pătratul cocartezian (2) $e' \in \mathcal{E}$. Deci $T \in |\mathcal{L}|$ şi $t \in \mathcal{I}so$. Astfel (1) este un pătrat cocartezian.

$1 \Rightarrow 4$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}, b : Y \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $l^Z : Z \to lZ$ $\mathcal{L}$-replica lui Z. Atunci $l^Z \cdot b : Y \to lZ$ este $\mathcal{L}$-replica lui Y. Mai departe, fie

$$l(e) \cdot b_1 = l^Z \cdot e' \tag{5}$$

pătratul cartezian contruit pe morfismele $l(e)$ şi l^Z.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, dashed, "p"] \arrow[dd, "l^X"'] & & Y \arrow[d, "b"] \\
& P \arrow[r, dashed, "e'"] \arrow[dl, dashed, "b_1"'] & Z \arrow[d, "l^Z"] \\
lX \arrow[rr, "l(e)"] & & lZ=lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.8

Atunci

$$l^X = b_1 \cdot p, \tag{6}$$

$$b \cdot e = e' \cdot p \tag{7}$$

pentru un morfism p. Atunci $e' \in \mathcal{E}$ (condiţia b) şi $b_1 \in \mathcal{M}_u$. Deoarece clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară din egalitatea (6), rezultă că $p \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi egalitatea (7) este descompunerea necesară.

$4 \Rightarrow 1$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}$. Atunci

$$l^Y \cdot e = q \cdot b \tag{8}$$

cu $q \in \mathcal{E}$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci

$$l^X = u \cdot b \tag{9}$$

pentru un u şi

$$q = l(e) \cdot u. \tag{10}$$

Din egalitatea (7) avem $l(e) \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, dashed, "b"] \arrow[dd, "l^X"'] & & Y \arrow[dd, "l^Y"] \\
& \circ \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
lX \arrow[rr, "l(e)"] & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.9

$4 \Rightarrow 5$. $\mathcal{E} \circ (\varepsilon\mathcal{L}) \subset (\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}$. Fie $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}, e : Y \to Z \in \mathcal{E}$,

$$e \cdot b = m_1 \cdot e_1. \tag{11}$$

$$m_1 = i_1 \cdot b_1 \tag{12}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea şi $(\varepsilon\mathcal{L}, (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$-factorizarea morfismelor respective. Atunci

$$b_1 \cdot e_1 = t \cdot b, \tag{13}$$

$$i_1 \cdot t = e \tag{14}$$

pentru un t. Deoarece clasa $\mathcal{M}$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară (condiţia c) din (12), rezultă că $i_1 \in \mathcal{M}$. Din egalitatea (11) avem $i_1 \in \mathcal{E}$, sau $i_1 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$. Deci

$$e \cdot b = (i_1 \cdot b_1) \cdot e_1 \tag{15}$$

cu $i_1 \cdot b_1 \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $e_1 \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "b"] \arrow[d, dashed, "e_1"'] & & Y \arrow[d, "e"] \arrow[ddl, dashed, "t"'] \\
\bullet \arrow[rr, dashed, "m_1"] \arrow[dr, dashed, "b_1"'] & & Z \\
& \circ \arrow[ur, dashed, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.10

$5 \Rightarrow 4$ şi $6 \Rightarrow 5$. Evident.

$5 \Rightarrow 6$. A se vedea Teorema 2.7.3 implicaţia $3 \Rightarrow 4$.

$5 \Rightarrow 7$. Fie $f : X \to Y \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$,

$$f = m \cdot e \tag{16}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului f şi

$$m = i \cdot b \tag{17}$$

$(\varepsilon\mathcal{L}, (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$-factorizarea lui m. Atunci

$$b \cdot e = e_1 \cdot b_1 \tag{18}$$

cu $e_1 \in \mathcal{E}$ şi $b_1 \in \varepsilon\mathcal{L}$, sau

$$f = i \cdot e_1 \cdot b_1 \tag{19}$$

şi, deoarece clasa $(\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$ este ereditară (Teorema 2.4.3 p.8), avem $b_1 \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$, sau $b_1 \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp} \cap (\varepsilon\mathcal{L}) = \mathcal{I}so$. Din (17) deducem că $b \in \mathcal{M}$ şi din (18), că $b \in \mathcal{E}$. Astfel $b \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$, şi $m \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "b_1"'] & & Y \\
& \circ \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "b"] & \\
{} \arrow[rr, "e_1"] & & {} \arrow[uu, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.4.11

$7 \Rightarrow 4$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}, b : Y \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi

$$b \cdot e = i_1 \cdot b_1, \tag{20}$$

$$i_1 = m_2 \cdot e_2 \tag{21}$$

$(\varepsilon\mathcal{L}, (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$-factorizarea şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismelor respective. Atunci $m_2 \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp}$. Deoarece $e \perp m_2$ avem

$$e_2 \cdot b_1 = t \cdot e, \tag{22}$$

$$b = m_2 \cdot t. \tag{23}$$

Din (22) rezultă că $t \in \mathcal{E}pi$ şi din (23), că $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci şi $m_2 \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $m_2 \in (\varepsilon\mathcal{L}) \cap (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp} = \mathcal{I}so$ şi

$$b \cdot e = (m_2 \cdot e_2) \cdot b_1 \tag{24}$$

cu $m_2 \cdot e_2 \in \mathcal{E}$ şi $b_1 \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "b_1"'] & Y \arrow[r, "b"] \arrow[dr, dashed, "t"] & Z \\
& {} \arrow[r, "e_2"'] & {} \arrow[u, "m_2"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.4.12

$2 \Rightarrow 2'$ (cu condiţia $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$). Fie $e \in \mathcal{E}_f, k = Ker\ e$ şi o să verificăm că $l(e) = cok\ l(e)$. Dacă

$$f \cdot l(k) = 0, \tag{25}$$

atunci

$$f \cdot l^X \cdot k = 0 \tag{26}$$

şi

$$f \cdot l^X = g \cdot e \tag{27}$$

pentru un g, deoarece $e = cok\ k$. Astfel

$$f = t \cdot l(e), \tag{28}$$

$$g = t \cdot l^Y \tag{29}$$

pentru un t.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l^K"'] & X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "l^X"'] & Y \arrow[d, "l^Y"] \arrow[dr, dashed, bend left, "g"] & \\
lK \arrow[r, "l(k)"] & lX \arrow[r, "l(e)"] \arrow[drr, "f"'] & lY \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
 & & & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.13

$2' \Rightarrow 2$. Fie $e : X \to Y \in \mathcal{E}_f$ şi

$$e' \cdot l^X = b \cdot e \tag{30}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele e şi l^X. Atunci

$$l(e) = t \cdot e', \tag{31}$$

$$l^Y = t \cdot b \tag{32}$$

pentru un t. Din (31) rezultă că $t \in \mathcal{E}_f$, iar din (32), că $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $t \in \mathcal{E}_f \cap (\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathcal{E}_f \cap \mathcal{M}ono = \mathcal{I}so$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[dd, "l^X"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "b"'] \arrow[dd, "l^Y"] \\
 & T \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
lX \arrow[ur, dashed, "e'"] \arrow[rr, "l(e)"] & & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.14

9.4.18*. Examinăm condiţiile:

a. $(\mu\mathcal{K}) \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$.

b. Clasa $\mathcal{M}$ este stabilă la dreapta.

c. Clasa $\mathcal{E}$ este $(\mu\mathcal{K})$-ereditară.

Lemă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$. Examinăm afirmaţiile:*

1. $k(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

2. Pentru $m : X \to Y \in \mathcal{M}$ pătratul

$$m \cdot k^X = k^Y \cdot k(m)$$

este cartezian.

3. $\mathcal{K} \overset{c}{\in\mathbb{V}} (\mathcal{M})$.

4. $\mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K}) \subset (\mu\mathcal{K}) \circ \mathcal{M}$.

5. $\mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K}) = \mathcal{M} \circ (\mu\mathcal{K})$.

6. $((\mu\mathcal{K}^{\urcorner} \cap \mathcal{E}, (\mu\mathcal{K} \circ \mathcal{M})$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

În condiţiile a, b şi c sunt adevărate echivalente:

$$3 \Longleftrightarrow 2 \overset{a}{\underset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} 1 \overset{b}{\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}} 4 \overset{c}{\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}} 5 \Longleftrightarrow 6 \Longleftrightarrow 7$$

În particular, dacă $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$, atunci condiţiile a, b şi c sunt adevărate şi afirmaţiile 1-7 sunt echivalente, iar condiţia (2) poate fi formată astfel:

$2'$. *Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ este exact la stânga.* $\uparrow$

9.4.19. Exerciţii. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $(\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}_f = \mathcal{E}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L})$.

3. $((\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}_f, (\varepsilon\mathcal{L})^{\llcorner})$ este o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{L} \in \mathbb{V}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{T} \subset \mathcal{K}$ şi $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci:

a) $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{K}$ (vezi Teorema 9.4.21 p.4).

b) $\mathcal{K}$-coreplica şi $\mathcal{T}$-coreplica oricărui obiect din $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ coincid.

c) $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{K}, \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{L}$ este o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$.

4. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{K} \overset{c}{\in\mathbb{V}}, .\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci:*

a) $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$.

b) $\mathcal{L}$-replica şi $\mathcal{R}$-replica oricărui obiect din $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ coincid.

c) $(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{K}, \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$.

9.4.20. Notaţii. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ şi $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.*

$\mathbb{V}^s(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{R}^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$; $\quad \overset{c}{\mathbb{V}}{}^s(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \mathbb{K}^s(\mathcal{B}) \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$;

$\mathbb{V}_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{R}_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$; $\quad \overset{c}{\mathbb{V}}{}_f(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \mathbb{K}_f(\mathcal{B}) \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$;

$\mathbb{V}^s_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$. $\quad \overset{c}{\mathbb{V}}{}^s_f(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \mathbb{V}^s_f(\mathcal{B}) \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$.

Fie $\mathbb{B}ir$ clasa subcategoriilor bireflective (reflective şi coreflective concomitent): $\mathbb{B}ir = \mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ (vezi [W, 1974]).

Pentru $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ notăm cu $\mathbb{B}ir^s(\mathcal{B})$ (respectiv $\mathbb{B}ir_f(\mathcal{B})$ clasa elementelor din $\mathbb{B}ir$ închise în raport cu $\mathcal{B}$-subobiectele (respectiv: $\mathcal{B}$-factorobiecte) şi $\mathbb{B}ir^s_f(\mathcal{B}) = \mathbb{B}ir^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{B}ir_f(\mathcal{B})$.

Fie $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ şi $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Notăm

$\mathbb{B}ir(\mathcal{E}) = \mathbb{B}ir \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$; $\quad \overset{c}{\mathbb{B}ir}(\mathcal{M}) = \mathbb{B}ir \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$;

$\mathbb{B}ir^s(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{B}ir^s(\mathcal{B}) \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$; $\quad \overset{c}{\mathbb{B}ir}{}^s(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \mathbb{B}ir^s(\mathcal{B}) \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$;

$\mathbb{B}ir_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{B}ir_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{V}(\mathcal{E})$; $\quad \overset{c}{\mathbb{B}ir}{}_f(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \mathbb{B}ir_f(\mathcal{B}) \cap \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$;

$\mathbb{B}ir^s_f(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \mathbb{B}ir^s(\mathcal{B},\mathcal{E}) \cap \mathbb{B}ir_f(\mathcal{B},\mathcal{E})$. $\quad \overset{c}{\mathbb{B}ir}{}^s_f(\mathcal{B},\mathcal{M}) = \overset{c}{\mathbb{B}ir}{}^s(\mathcal{B},\mathcal{M}) \cap \overset{c}{\mathbb{B}}ir_f(\mathcal{B},\mathcal{M})$.

9.4.21. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{E} \cap (\varepsilon\mathcal{L}) = \mathcal{I}so$ şi clasa $\mathcal{E}$ stabila la stânga. Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{Q}_\mathcal{E}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R})$.

2. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, atunci $\mathcal{Q}_\mathcal{E}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R})$.

3. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E})$, atunci $\mathcal{Q}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_\mathcal{E}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

4. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E})$, atunci următoarea diagramă este comutativă.

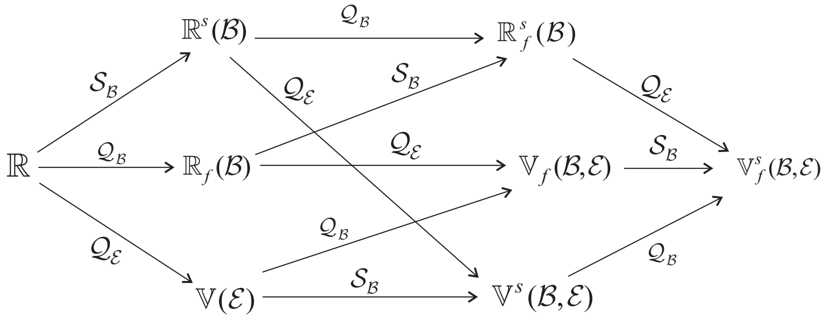


Figura 9.4.15

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{Q}_\mathcal{E}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R})|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi morfismele $b : X \to Z \in \mathcal{B}$ şi $q : X \to A \in \mathcal{E}$. Construim pătratul cocartezian

$$q' \cdot b = b' \cdot q. \tag{1}$$

unde $q' : Z \to T$. Atunci $q' \in \mathcal{E}, b' \in \mathcal{B}$ şi $A \in |\mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R})|$.

2. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ şi o să demonstrăm incluziunea $\mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_\mathcal{E}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$. Fie $A \in |\mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{R})|$. Exisă un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi morfismele $q : Z \to X \in \mathcal{E}$ şi $b : A \to X \in \mathcal{B}$. În pătratul cartezian

$$b \cdot q' = q \cdot b' \tag{2}$$

$b' \in \mathcal{B}$ şi $q' \in \mathcal{E}$. Deci $A \in |\mathcal{Q_E S_B}(\mathcal{R})|$.

3. Conform echivalenţei punctelor 1 şi 4 ale Lemei 9.4.18.

4. Egalitatea $\mathcal{Q_E S_B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S_B Q_E}(\mathcal{R})$ rezultă din p.2. Egalitatea $\mathcal{Q_B Q_E}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q_E Q_B}(\mathcal{R})$ din p.4. Egalitatea $\mathcal{S_B Q_B}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q_B S_B}(\mathcal{R})$ rezultă din p. 3 al Teoremei 9.4.15.

Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, avem $\mathcal{S_B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$ (Teorema 9.4.15 p.1), $\mathcal{Q_B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$ (p.2). Mai departe $\mathcal{Q_E}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$ (Lema 6.4.7 p.2). $\uparrow$

9.4.21*. Teoramă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{M} \cap (\mu\mathcal{K}) = \mathcal{I}so$ şi clasa $\mathcal{M}$ stabilă la dreapta. Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{S_M Q_B}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{Q_B S_M}(\mathcal{T})$.

2. Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$, atunci $\mathcal{S_M Q_B}(\mathcal{T}) = \mathcal{Q_B S_M}(\mathcal{T})$.

3. Dacă $\mathcal{K} \in \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{M})$, atunci $\mathcal{S_M Q_B}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{Q_B S_M}(\mathcal{T})$.

4. Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$, $\mathcal{K} \in \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{M})$, atunci următoarea diagramă este comutativă. $\uparrow$

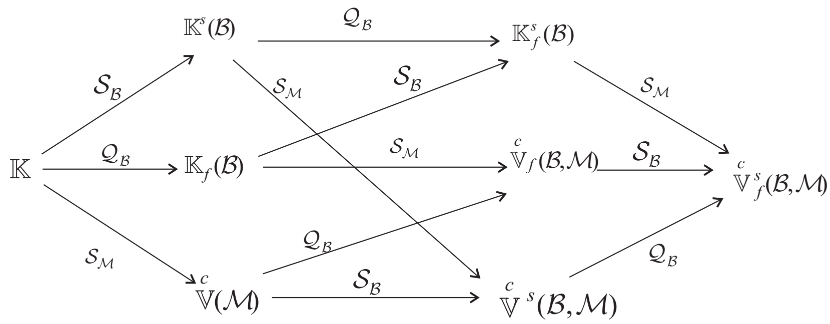


Figura 9.4.16

9.4.22. Teoremă. *Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$.*

1. Dacă $\mathcal{E}$ este o clasă completă la stânga, atunci:

a) clasa $\mathbb{V}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ este un grupoid în raport cu operaţia $\mathcal{R} * \mathcal{T} = \mathcal{Q_E}(\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}))$ pentru $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{V}^s_f(\mathcal{E}, \mathcal{B})$;

b) clasa $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{M})$ este un grupoid în raport cu operaţia $\mathcal{U} * \mathcal{V} = \mathcal{Q_E}(\lambda^*_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}))$ pentru $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{V}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{M})$.

1^*. *Dacă $\mathcal{M}$ este o clasă completă la dreapta, atunci:*

a) clasa $\overset{c}{\mathbb{V}}{}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ este un grupoid în raport cu operaţia $\mathcal{U} * \mathcal{V} = \mathcal{S_M}(\lambda^*_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}))$ pentru $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \overset{c}{\mathbb{V}}{}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$;

b) clasa $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E})$ este un grupoid în raport cu operaţia $\mathcal{R} * \mathcal{T} = \mathcal{S_M}(\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}))$ pentru $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E})$.

$\downarrow$ 1 a). Pentru $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{V}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ avem $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ (Teorema 12.8.1) şi $\mathcal{Q_E}(\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})) \in \overset{c}{\mathbb{V}}{}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ (Teorema 9.4.21). $\uparrow$

9.4.23. Teoremă. *Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ şi $\mathcal{A} \in \mathbb{B}ir$. Atunci:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \in \mathbb{B}ir$.

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \in \mathbb{B}ir$.

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

4. Următoarea diagramă este comutativă. $\uparrow$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}ir^{s}(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] & \\
\mathbb{B}ir \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}=\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"'] & & \mathbb{B}ir^{s}_{f}(\mathcal{B}) \\
 & \mathbb{B}ir_{f}(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.4.17

9.4.24. Teoremă. *1. Fie $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} \cap \varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{I}so$ şi clasa $\mathcal{E}$ este completă la stânga. Atunci următoarea diagramă este comutativă, unde $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}ir^{s}(\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[ddr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{B}ir^{s}_{f}(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}"] & \\
\mathbb{B}ir \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}"'] & \mathbb{B}ir_{f}(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{B}ir_{f}(\mathcal{B},\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{B}ir^{s}_{f}(\mathcal{B},\mathcal{E}) \\
 & \mathbb{B}ir(\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{B}ir^{s}(\mathcal{B},\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.4.18

1. FIe $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$, $\mathcal{K} \in \overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \cap \mu\mathcal{K} = \mathcal{I}so$ şi clasa $\mathcal{M}$ este completă la dreaptă. Atunci următoarea diagramă este comutativă, unde $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$.* $\uparrow$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}ir^{s}(\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[ddr, "\mathcal{S}_{\mathcal{M}}"] & \mathbb{B}ir^{s}_{f}(\mathcal{B}) \arrow[dr, "\mathcal{S}_{\mathcal{M}}"] & \\
\mathbb{B}ir \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\mathcal{S}_{\mathcal{M}}"'] & \mathbb{B}ir_{f}(\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{M}}"] & \overset{c}{\mathbb{B}}ir_{f}(\mathcal{B},\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] & \overset{c}{\mathbb{B}}ir^{s}_{f}(\mathcal{B},\mathcal{M}) \\
 & \overset{c}{\mathbb{B}}ir(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] & \overset{c}{\mathbb{B}}ir^{s}(\mathcal{B},\mathcal{M}) \arrow[ur, "\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 9.4.19

9.4.25. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

1. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$, *atunci* $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}$.

2. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$, *atunci* $\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

3. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$, *atunci* $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$.

4. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *atunci* $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$.

$\downarrow$ 1. Avem $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_\mathcal{B}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

2. Avem $\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_\mathcal{B}\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

3. Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : A \to X \in \mathcal{B}, b_1 : Y \to X \in \varepsilon\mathcal{S}$, şi

$$b \cdot b_1' = b_1 \cdot b' \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele b şi b_1, unde $b' : P \to Y$. Atunci $b_1' \in \varepsilon\mathcal{S}$ şi deci $P \in |\mathcal{R}|$. Astfel $b' \in \mathcal{B}$ şi $Y \in |\mathcal{R}|$.

4. Deoarece $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. $\uparrow$

9.4.26. Exerciţii. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.

1. Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$. *Atunci* $\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R}_1)$.

2. Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$. *Atunci* $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}_1)$.

3. Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})$. *Atunci* $\mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R}_1)$.

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $X \in |\mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{R})|$;

b) $lX \in |\mathcal{R}|$.

5. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $X \in |\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})|$;

b) $kX \in |\mathcal{R}|$.

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $X \in |\mathcal{S}_\mathcal{B}\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{R})|$;

b) există un obiect $A \in |\mathcal{R}|$ *astfel încât* $lX \sim lA$;

c) există un obiect $B \in |\mathcal{R}|$ *astfel încât* $kX \sim kA$.

7. Pentru orice element $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $X \in |\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\Gamma)|$;

b) $kX \in |\Gamma|$.

9.4.27. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

1. Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *atunci* $\mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) = \Gamma$.

2. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$ *pentru orice* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

3. Dacă $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, *atunci pentru orice* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$ şi $\mathcal{B} \in \mathcal{B}ic$. Atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$, şi $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

5. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare de dreapta, $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$. Atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}$-subobiecte. Deci $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$.

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, şi $\mathcal{R}_1 = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. Atunci pentru orice obiect A al subcategoriei $\mathcal{K}$ $\mathcal{R}$-replica şi $\mathcal{R}_1$-replica obiectului A sunt izomorfe. În particular, $r \cdot k \sim r_1 \cdot k$.

7. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$. Atunci:

- $l \cdot r \sim l \cdot r_1$;

- $k \cdot r \sim k \cdot r_1$.

8. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\Pi) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Pi) = \Pi$

9. Fie $\Gamma \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci pentru orice $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$:

- $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\Gamma) = \Gamma$.

- $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

10. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{E}pi)$, iar $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ functorul reflector. Atunci $t = r \cdot l = r \cdot l \cdot r$.

9.4.28. Exerciţii. *1. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există următoarele clase complete la stânga şi la dreapta $(\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic)$:*

a) $\mathcal{E}_f$. b) $\mathcal{M}_f$. c) $\mathcal{E}_u$. d) $\mathcal{M}_u$.

e) $\mathcal{M}_p$. $\mathcal{M}_f$ $\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f$. g) $\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}$. h) $\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}$.

2. Fie $\mathcal{A}$ o clasă completă la stânga. Atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Fie $\mathcal{A}$ o clasă completă la dreapta. Atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

4. Fie $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ două clase de morfisme ale categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$.

a) Dacă $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ sunt clase stabile la stânga, atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$.

Dacă clasa $\mathcal{V}$ este completă la stânga, atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}} : \mathbb{P}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$.

b) Dacă $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ sunt clase stabile la dreapta, atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}}\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C})$.

Dacă clasa $\mathcal{U}$ este completă la dreapta, atunci: $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} : \mathbb{K}(\mathcal{I}) \to \mathbb{V}_c(\mathcal{I}, \mathcal{U})$.

c) Dacă $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ sunt clase stabile la stânga, atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$.

Dacă $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ sunt clase complete la stânga şi la dreapta, atunci: $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\mathcal{Q}_{\mathcal{V}} : \mathbb{R} \to \mathbb{V}(\mathcal{V})$, $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\mathcal{Q}_{\mathcal{V}} : \mathbb{K} \to \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{U})$.

9.4.29. Exerciţii. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. Avem următoaree aplicaţii:*

1. $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_u} : \mathbb{R}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{E}_u)$,

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f} : \mathbb{R}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{E}_f)$,

3. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f} : \mathbb{R}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{B} \circ \mathcal{E}_f), \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

4. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$. Atunci $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}} : \mathbb{R}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P}, \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M})$.

5. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} : \mathbb{K}(\mathcal{I}) \to \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{I}, \mathcal{M}_f)$.

6. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p} : \mathbb{K}(\mathcal{I}) \to \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{I}, \mathcal{M}_p)$.

7. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}} : \mathbb{K}(\mathcal{I}) \to \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{I}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

8. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}} : \mathbb{K}(\mathcal{I}) \to \overset{c}{\mathbb{V}} (\mathcal{I}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

9.4.30. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}, \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *şi* $\mathcal{B} \subset \mu\mathcal{K}$. *Atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}$ *pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. *Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}$ *pentru orice* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

2. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{B} \subset \mu\mathcal{K}$. *Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$. *În particular, dacă* $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ *şi* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.

2.* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. *Atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}$. *În particular, dacă* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *şi* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}$.

3. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{K} \overset{c}{\in \mathbb{V}} (\mathcal{M})$. *Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(\mathcal{K}) \overset{c}{\in \mathbb{V}} (\mathcal{M})$. *În particular, dacă* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Sigma) \overset{c}{\in \mathbb{V}} (\mathcal{M}ono) \cap \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.

3. Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{R} \overset{c}{\in \mathbb{V}} (\mathcal{E})$. *Atunci* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{V}(\mathcal{E}) \cap \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$. *Menţionăm, că pentru* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *are loc* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\Pi) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Pi) = \Pi$ *şi* $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\Sigma) = \Sigma$.

9.4.31. Probleme. *1. Este proprie clasa*

$$\{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Gamma_0) \mid \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}?$$

2. Este proprie clasa

$$\{\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)\}?$$

3. Pentru care elemente $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *clasa*

$$\{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)\}$$

este proprie?

4. Pentru care subcategorii $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *clasa*

$$\{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Gamma) \mid \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$$

este proprie?

În clasa $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *sunt cunoscute două* $\mathcal{E}_f$*-varietăţi: subcategoria* Π *şi însăşi categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *În legătură cu aceasta formulăm urătoarele probleme.*

5. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *şi* $\mathcal{R} \neq \Pi$. *Este adevărat oare că* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$?

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$ *şi* $\mathcal{R} \neq \Pi$. *Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}$?

7. E ştiut, că $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\Gamma_0) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\Gamma_0)$ *şi* $\mathcal{R} \neq \Gamma_0$. *Atunci* $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}_f}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$?

9.4.32. Teoremă. *1. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, iar $\mathcal{E}$ o clasă de epimorfisme închisă în raport cu produsele şi stabilă la stânga. Atunci pentru orice element $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$ subcategoria $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R})$ de asemenea este $\mathcal{P}$-reflectivă: $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. Astfel $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}$ defineşte o aplicaţie*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}(\mathcal{P}) \to \mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E}). \uparrow$$

9.4.33. Definiţie. *1. O subcategorie c-reflectivă ce este $\mathcal{E}_f$-varietate se numeşte c-varietate.*
1^*. *O subcategorie c-coreflectivă ce este o $\mathcal{M}_f$-covarietate se numeşte c-covarietate.*
Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) $\mathcal{L}$ este o c-varietate;
b) functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este exact.
1^* *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) $\mathcal{K}$ este o c-covarietate;
b) functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este exact.
$\downarrow$ $1.a \Rightarrow b$. Fie

$$X \xrightarrow{m} Y \xrightarrow{q} Z$$

un şir exact. Examinăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l^X"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "l^Y"'] & Z \arrow[d, "l^Z"'] \\ lX \arrow[r, "l(m)"] & lY \arrow[r, "l(q)"] & lZ \end{tikzcd}$$

Figura 9.4.20

Atunci $l(q) \in \mathcal{E}_f$ şi, deoarece pătratul din dreapta este cocartezian, rezultă că $l(q) = cok\ l(m)$. Să verificăm că linia de jos este un şir exact la stânga. Fie

$$l(q) \cdot f = 0. \tag{1}$$

Dacă $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ atunci

$$f \cdot k^A = l^Y \cdot g \tag{2}$$

pentru un g. Avem

$$0 = l(q) \cdot f \cdot k^Y = l^Z \cdot q \cdot g \tag{3}$$

sau

$$q \cdot g = 0 \tag{4}$$

şi

$$g = m \cdot t \tag{5}$$

pentru un t. Avem

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[ddr, dashed, "u"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "f"'] & & kA \arrow[ll, "k^A"'] \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[d, dashed, "g"] & \\
& X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l^X"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "l^Y"] & Z \arrow[d, "l^Z"] \\
& lX \arrow[r, "l(m)"] & lY \arrow[r, "l(q)"] & lZ
\end{tikzcd}$$

Figura 9.4.21

$$f \cdot k^A = (\text{din } (2)) = l^Y \cdot g = (\text{din } (7)) = l^Y \cdot m \cdot t = l(m) \cdot l^X \cdot t$$

i.e

$$f \cdot k^A = l(m) \cdot l^X \cdot t \tag{6}$$

cu $k^A \in \mathcal{E}pi$ şi $l(m) \in \mathcal{M}_f$. Astfel $k^A \perp l(m)$ şi

$$f = l(m) \cdot u, \tag{7}$$

$$l^X \cdot t = u \cdot k^A \tag{8}$$

pentru un u. Deci f se factorizează prin $l(m)$.

$b \Rightarrow a$. Evident. $\uparrow$

9.5. Subcategoriile definite de un element al clasei $\mathbb{B}ic$

9.5.1. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. Atunci $\mathcal{B}$ determină următoarele patru structuri de factorizare la care o să apelăm:

$(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^\top, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ structură de factorizare cu clasa de injecţii completă la dreapta;

$(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap \mathcal{B}^\perp)$ structură de factorizare cu clasa de proiecţii $\mathcal{M}_u$-ereditară;

$(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$ structura de factorizare de dreapta cu clasa de proiecţii completă la stânga;

$(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$ structură de factorizare de stânga cu clasa de injecţii completă la dreapta.

Clasa $\mathcal{B}$ determină o pereche de subcategorii conjugate $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, unde $\mathcal{K} = \lambda^*(\mathcal{B})$ şi $\mathcal{L} = \lambda(\mathcal{B})$.

$\mathcal{K}$-coreplica obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ se obţine prin $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^\top, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$-factorizarea, sau $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplicii, sau Σ-coreplicii obiectului X.

$\mathcal{L}$-replica obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ se obţine prin $(\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u \cap \mathcal{B}^\perp)$-factorizarea sau $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$-factorizarea $\mathcal{S}$-replicii sau Π-replicii obiectului X.

Factorizând morfismul m^X după structura de factorizare la dreapta $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$ obţinem o subcategorie coreflectivă $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{M}})$.

Factorizând morfismul s^X după structura de factorizare de stânga $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$ obţinem o subcategorie reflectivă $\mathcal{V} = \mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}}(\Pi)$.

Am obţinut următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[r, "\sigma^X \in \mathcal{E}_p"] & mX \arrow[r, "p^X \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "e^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, "m^X"] & kX \arrow[d, "k^X \in \mathcal{B}"] & & \\
& tX \arrow[r, "t^X \in \mathcal{B}^\perp"] & X \arrow[r, "v^X \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "l^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, "s^X"] & vX \arrow[d, "w^X \in \mathcal{B}"] & \\
& & lX \arrow[r, "i^X \in \mathcal{B}^\perp"] & sX \arrow[r, "g_0^{sX} \in \mathcal{M}_p"] & \pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 9.5.1

Remarcă. *În această diagramă toate morfismele, cu excepţia lui σ^{mX} şi g^{sX}, aparţin clasei $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.*

9.5.2.Teoremă. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii.*

1. $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) = (\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$.

1^0. $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L})) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{E}_p, \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{M}_u)$.

2. $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{K}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{V})$. *În particular,* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}(\mathcal{E}_u, \mathcal{E}pi)$.

2^0. $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L})) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{T}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{L})$.

3. $\mathcal{V} = \mathcal{S}_\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ *şi* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$. *De asemenea* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Gamma_0)$ *şi* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma_0))$. *În particular, dacă* $\mathcal{U} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{U}$, *atunci* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{U})$.

3^0. $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{M}})$. *În particular,* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\mathcal{B})$ *şi* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})$.

4. Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi cel reflector* $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *comută:* $k \cdot v = v \cdot k$. *În particular,* $\mathcal{K} \cap \mathcal{V} \in \mathbb{R}(\mathcal{K}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{V})$.

4^0. *Functorul coreflector* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ *şi cel reflector* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *comută:* $t \cdot l = l \cdot t$. *În particular,* $\mathcal{T} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{T}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{L})$.

5. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci

$$r \cdot v = s. \tag{1}$$

5^0. *Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Atunci*

$$k \cdot h = m. \tag{1^0}$$

6. Pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ pătratul

$$v^X \cdot k^X = k^{vX} \cdot v^{kX}. \tag{2}$$

este cocartezian. În particular

$$\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{V} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{V}.$$

6^0. *Pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ pătratul*

$$l^X \cdot t^X = t^{lX} \cdot l^{tX} \tag{2^0}$$

este cartezian. În particular,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} *_s \mathcal{L} = \mathcal{T} *_{dc} \mathcal{L}.$$

7. $\mathcal{L} \cap \mathcal{V} = \mathcal{S}$. În particular, $(\mathcal{K} \cap \mathcal{V}, \mathcal{S})$ este o pereche de subcategorii conjugate în categoria $\mathcal{V}$.

7^0. *$\mathcal{K} \cap \mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}$. În particular, $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{T} \cap \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate în categoria $\mathcal{T}$.*

8. Laticile $\mathcal{B}ic, \{\mathcal{S}_\mathcal{B}(S) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}, \{\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{M}}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$ sunt izomorfe şi sunt antiizomorfe cu laticile $\mathbb{K}_c$ şi $\mathbb{R}_c$.

$\downarrow$ 1. Deoarece $\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_u$, rezultă că $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{E}_u$. Astfel pentru orice $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $p^X \cdot \sigma^{mX} \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u$, şi $k^X \in \mathcal{B}$. Deci $(\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{K})$. Rămâne de adăugat că clasa $\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară, deoarece fiecare din clasele $\mathcal{M}_p$ şi $\mathcal{B}$ sunt $\mathcal{E}_u$-coereditare. Atunci în virtutea Teoremei 6.6.10* $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) = (\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$.

2. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $v^X \in \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{E}_u$, $w^X \in \mathcal{B}$ şi $g_0^{sX} \in \mathcal{M}_p$, adică $\pi^{vX} = g_0^{sX} \cdot w^X \in \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{B}$, sau $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{V})$ cu clasa de injecţii stabilă la dreapta. În virtutea Teoremei 9.4.10 $\mathcal{V}$ este o $\mathcal{E}pi$-varietate.

3. $\mathcal{V} = \mathcal{S}_\mathcal{B}(\mathcal{S})$. În virtutea definiţiei subcategoriei $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\mathcal{V}|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi $s^A : A \to sA$ $\mathcal{S}$-replica lui A. Atunci

$$s^A = f \cdot b \tag{1}$$

pentru un f. Deoarece $s^A \in \mathcal{B}$, rezultă că $f \in \mathcal{B}$, iar $X \in |\mathcal{V}|$.

$\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Rezultă din demonstraţia precedentă.

$\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$. Menţionăm, în primul rând că $\varepsilon\Gamma_0 = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. $\mathcal{V}$ ca subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă este închisă în raport cu $\mathcal{M}_p$-subobiecte, iar ca $\mathcal{E}pi$-varietate - în raport cu $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-factorobiecte.

Pentru a verifica condiţia $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma_0))$ este suficient de arătat că orice element $f \in \varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma_0)$ poate fi scris $f = u \cdot v$ cu u din $\varepsilon\Gamma_0$ şi v din $\varepsilon\mathcal{L}$.

Într-adevăr, fie $f : X \to Y \in \varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma_0)$. Functorul reflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L} \cap \Gamma_0$ poate fi realizat ca compoziţia $g_0 \cdot l$, unde $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_0$ şi $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ sunt functorii reflectori. Fie $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-replica, iar $g_0^{lX} : lX \to g_0 lX$ Γ_0-replica obiectelor respective. Atunci

$$g_0^{lX} \cdot l^X = h \cdot f \tag{1}$$

pentru un h. Fie

$$f = m \cdot e \tag{2}$$

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-factorizarea lui f. Deoarece pe $e \perp g_0^{lX}$ avem

$$l^X = u \cdot e, \tag{3}$$

$$g_0^{lX} \cdot u = h \cdot m \tag{4}$$

pentru un u. Ţinând cont că $e \in \mathcal{E}pi$, deducem că $u, e \in \varepsilon\mathcal{L}$.

Deoarece $f \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $m \in \mathcal{E}pi$, adică $m \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p = \varepsilon\Gamma_0$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "e"] \arrow[d, "l^X"'] \arrow[drr, "f"] & & P \arrow[dll, dashed, "u"'] \arrow[d, dashed, "m"] \\
lX \arrow[dr, "g_0^{lX}"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& g_0 lX &
\end{tikzcd}$$

Figura 9.5.2

4. Să construim $\mathcal{V}$-replica obiectului kX. Deoarece $v^X \cdot k^X \cdot p^X$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui vX, şi $p^X \in \mathcal{B}^\top$, fie

$$v^X \cdot k^X = h^X \cdot u^X \tag{3}$$

$(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea morfismului $v^X \cdot k^X$. Atunci

$$s^X \cdot k^X = (w^X \cdot h^X) \cdot u^X \tag{4}$$

este $(\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$-factorizarea lui $s^X \cdot k^X$, care este $\mathcal{S}$-replica lui kX. Deci u^X este $\mathcal{V}$-replica lui $k^X : u^X = v^{kX}$. Pe de altă parte, egalitatea

$$h^X \cdot u^X \cdot p^X = h^X \cdot (u^X \cdot p^X) \qquad (4)$$

este $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplicii lui vX. Deci h^X este $\mathcal{K}$-coreplica lui $vX : h^X = k^{vX}$.

$$\begin{tikzcd}
mX \arrow[r, "p^X \in \mathcal{B}^\top"] & kX \arrow[r, "u^X = v^{kX} \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "k^X \in \mathcal{B}"'] & P = vkX = kvX = ksX \arrow[d, "h^X = k^{vX} \in \mathcal{B}"] & \\
& X \arrow[r, "v^X \in \mathcal{B}^\top"] & vX \arrow[r, "w^X \in \mathcal{B}"] & sX
\end{tikzcd}$$

Figura 9.5.3

5. Deoarece $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi $w^X \in \mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $lvX = sX$.

6. Avem $v^X \in \mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u = \mathcal{E}'(\mathcal{K})$, şi $v^{kX} = k(v^X)$. Atunci, în virtutea Teoremei 6.6.10, pătratul (1) este cocartezian.

7. Fie $A \in |\mathcal{V}|$. Atunci $kA \in |\mathcal{V}|$ şi $sA \in |\mathcal{V}|$.

8. Evident.

9.5.3. Rezultatele anterioare le înserăm în următoarea diagramă comutativă.

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[r, "\sigma^{mX} \in \mathcal{E}_p"] & mX \arrow[r, "p^X \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "e^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, "m^X"] & kX \arrow[r, "v^{kX} \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "k^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pătrat cocartezian}"] & vkX = kvX = ksX = vmX \arrow[d, "k^{vX} \in \mathcal{B}"] & \\
& tX \arrow[r, "t^X \in \mathcal{B}^\perp"] \arrow[d, "l^{tX} \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pătrat cartezian}"] & X \arrow[r, "v^X \in \mathcal{B}^\top"] \arrow[d, "l^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, "s^X"] & vX \arrow[d, "w^X \in \mathcal{B}"] & \\
& tsX = lmX = ltX = tlX \arrow[r, "t^{lX} \in \mathcal{B}^\perp"] & lX \arrow[r, "i^X \in \mathcal{B}^\perp"] & sX \arrow[r, "g_0^{sX} \in \mathcal{M}_p"] & \pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 9.5.4

Fie $b_1 : ksX \to Y$ şi $b_2 : Y \to sY$ aparţin clasei $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Atunci $Y \in |\mathcal{V}|$.

9.5.4. Remarcă. *1. Dacă pornim de la o pereche de subcategorii conjugate arbitrară* $(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, *obţinem o clasă de functori mai mică, deci care se include în clasa celor examinaţi. Într-adevăr, fie* $\mathcal{B}_1 = \varepsilon\mathcal{H}$. *Atunci*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}\mathcal{S}_{\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}_1}(\Pi) = \ \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}_1 \circ \mathcal{B}}(\Pi) = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}_2}(\Pi),$$

unde $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \circ \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$.

2. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. *Atunci* $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(S) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Astfel clasa* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *conţine cel puţin două elemente* $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(S)$ *şi* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Dacă* $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}_c$ *şi* $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$, *atunci varietatea generată de* $\mathcal{L}_1$ *aparţine clasei* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. Clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

9.5.5. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{B} = \mathcal{I}so$. *Atunci* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) = (\lambda^*(\mathcal{B}),\ \lambda(\mathcal{B})) = (\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{V} = \mathcal{S},\ \mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}$.

2. Fie $\mathcal{B} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. *Atunci* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) = (\lambda^*((\mathcal{B}), \lambda(\mathcal{B})) = (\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}), \mathcal{V} = \mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. Deoarece $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$, *rezultă că* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_c \Leftrightarrow (\mathcal{B} = \mathcal{I}so$ *sau* $\mathcal{B} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u) \Leftrightarrow (\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *sau* $\mathcal{L} = \mathcal{S})$.

4. Functorii v *şi* t *comută doar în două cazuri:* $\mathcal{B} = \mathcal{I}so$ *sau* $\mathcal{B} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.

5. Fie

$$\mathbb{V}_b(\mathcal{E}_u, \mathcal{E}pi) = \{\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\},$$

şi $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{V}_b(\mathcal{E}_u, \mathcal{E}pi)$. *Atunci functorii reflectori* $r_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}_1$ *şi* $r_2 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}_2$ *comută:* $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$.

6. Fie $\mathcal{L} = \mathcal{S}$. *Atunci* $\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

7. Fie $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci* $\mathcal{V} = \mathcal{S}$.

9.5.6. Exerciţii. *1. În construcţia precedentă, în loc de subcategoria* $\mathcal{S}$, *examinăm o subcategorie reflectivă arbitrară* $\mathcal{R}$. *Pentru* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *putem vorbi doar de două subcategorii:*

$$\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \quad \text{şi} \quad \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}^{\perp}}(\mathcal{R})$$

Care sunt proprietăţile acestor subcategorii?

2. Fie $(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$. *Ca şi în cazul examinat, avem patru subcategorii*

$$\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}),\ \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}^{\perp}}(\mathcal{R}), \quad \mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}),\ \mathcal{K} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}^{\top}}(\mathcal{U}).$$

Care din proprietăţile examinate mai sus sunt adevărate şi pentru aceste subcategorii?

9.5.7. Teoremă. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{L} = \lambda(\mathcal{B})$ *şi* $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(S)$. *Dacă structura de factorizare* $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ *are clasa de proiecţii* $\mathcal{M}_u$*-ereditară, atunci subcategoriile* $\mathcal{V}$ *şi* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0$ *sunt complementare în laticea* $\mathbb{R}$.

$\downarrow \mathcal{V} \wedge (\mathcal{L} \cap \Gamma_0) = \Pi$. Avem $\mathcal{V} \wedge (\mathcal{L} \cap \Gamma_0) = \mathcal{V} \cap \mathcal{L} \cap \Gamma_0 = S \cap \Gamma_0 = \Pi$.

$\mathcal{V} \vee (\mathcal{L} \cap \Gamma_0) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Examinăm următoarea diagramă comutativă construită pentru un obiect X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, unde

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "v^X \in \mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u"] \arrow[dd, "l^X \in \mathcal{B}"'] \arrow[dr, dashed, "t_2 \in \mathcal{B}"] & & vX \arrow[dd, "v^x = s^{vX} \in \mathcal{B}"] \\
& P_2 \arrow[ur, dashed, "v_2 \in \mathcal{B}^\top \cap \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{E}_u"'] \arrow[dl, dashed, "t \in \mathcal{B}"'] & \\
lX \arrow[rr, "i^X = s^{lX} \in \mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u"] \arrow[dd, "g_0^{lX}"'] \arrow[dr, dashed, "t_1 \in \mathcal{I}so"] & & sX \arrow[dd, "g_0^{sX}"] \\
& P_1 \arrow[ur, dashed, "v_1"'] \arrow[dl, dashed, "u_1"'] & \\
g_0 lX \arrow[rr, dashed, "\pi^{g_0 lX}"] & & \pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 9.5.5

$$\pi^{g_0 lX} \cdot u_1 = g_0^{sX} \cdot v_1, \tag{1}$$

$$i^X \cdot t = w^X \cdot v_2 \tag{2}$$

sunt pătrate carteziene, primul construit pe morfismele $\pi^{g_0 lX}$ şi g_0^{sX}, al doilea - pe morfismele i^X şi w^X. Atunci

$$g_0^{lX} = u_1 \cdot t_1, \tag{3}$$

$$i^X = v_1 \cdot t_1 \tag{4}$$

pentru un t_1, şi

$$l^X = t \cdot t_2, \tag{5}$$

$$v^X = v_2 \cdot t_2 \tag{6}$$

pentru un t_2. Din (3) rezultă că $t_1 \in \mathcal{M}_p$, iar din (4) - că $t_1 \in \mathcal{E}_u$. Deci $t_1 \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$. Astfel

$$\pi^{g_0 lX} \cdot g_0^{lX} = g_0^{sX} \cdot i^X \tag{7}$$

este un pătrat cartezian, iar

$$\pi^{g_0 lX} \cdot (g_0^{lX} \cdot t) = (\pi^{sX} \cdot w^X) \cdot v_2 \tag{8}$$

este pătratul cartezian construit pe morfismele $\pi^{g_0 lX}$ şi $\pi^{sX} \cdot w^X$. Trebuie de demonstrat că $t_2 \in \mathcal{I}so$. Din egalitatea (5) rezultă că $t_2 \in \mathcal{B}$. Mai departe, clasa $(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^\top$, egală cu $\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u$, este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Deci $t_2 \in \mathcal{B}^\top$, sau $t_2 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\top = \mathcal{I}so$. Deoarece $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}$ şi $g_0 lX$ este $(\mathcal{L} \cap \Gamma_0)$-replica lui X, rezultă că $\mathcal{V} \vee (\mathcal{L} \cap \Gamma_0) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\uparrow$

9.5.8. Remarcă. *1. Clasa* $(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\llcorner}$ *este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară atunci şi numai atunci, când* $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\llcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{V}), \mathcal{I}''(\mathcal{V}))$.

2. Sunt cunoscute dar două cazuri când clasa $(\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\llcorner}$ *este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară:*

- $\mathcal{B} = \mathcal{I}so$. *Atunci* $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

- $\mathcal{B} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. *Atunci* $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B}) = (\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$.

9.5.9. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{T} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{P}''(\mathcal{R})}(\Sigma)$, *iar* $\mathcal{H} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}'(\mathcal{K})}(\Pi)$. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$. *În particular, dacă* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, *apoi* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, *iar* $t(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

1^*. $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. *În particular, dacă* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$, *apoi* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{U})$, *iar* $t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

2. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, *atunci* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R})$, *iar* $t \cdot r = r \cdot t$.

2^*. *Dacă* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$, *atunci* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, *iar* $k \cdot h = h \cdot k$.

3. Dacă $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, *atunci* $\mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3^*. *Dacă* $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, *atunci* $\mathcal{H} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}''(\mathcal{R})}(\Sigma) = \tilde{\mathcal{M}}$.

4^*. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}'(\mathcal{K})}(\Pi) = \mathcal{S}$.

9.5.10. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Examinăm contiţiile:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{V})$.

2. $\mathbb{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. $v(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Atunci functorii $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $r \cdot v = v \cdot r$.

9.5.11. Notaţii. *Fie* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$, *şi* $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$. *Atunci* $g_0 \cdot v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V} \cap \Gamma_0$ *este functorul reflector. Mai departe, fie* $\mathbb{V}_{pb} = \{\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) | \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic\}$.

Problemă. *Este aplicaţia* $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V} \cap \Gamma_0$, *definită pe clasa* $\mathbb{V}_{pb}$ *cu valori în clasa* $\mathbb{R}(\Gamma_0)$, *injectivă?*

9.5.12. Semigrupul comutativ $\mathbb{V}_{pb}$. *Fie* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathbb{V}_{pb}$ *şi* $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. *Atunci* $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{pb}$ *şi pentru orice obiect* $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *avem* $vX = v_1 v_2 X = v_2 v_1 X$. *Astfel* $v = v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$. *Astfel în clasa functorilor reflectori pentru* $\mathbb{V}_{pb}$ *este definită operaţia de compoziţie cu următoarele proprietăţi:*

- *comutativă;*

- *asociativă;*

- *cu element neutru* $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$;

Capitolul 10. Functori speciali. Operaţiile λ şi ρ. Grupoidul $\mathbb{R}_c$

10.1. Functori de completare

10.1.1. Subcategoriile reflective ale clasei $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ se mai numesc şi completări, iar functorii reflectori în acest caz se mai numesc şi functori de completare.

Exerciţii. *1. Fie Γ_0 subcategoria spaţiilor complete. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente: pentru o subcategorie reflectivă Γ :*

- $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

- $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

2. $\varepsilon\Gamma_0 = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$.

10.1.2. Definiţie. *1. Fie τ un cardinal. Spaţiul local convex (E, t) se numeşte τ^--complet, dacă orice mulţime M cu $\mid M \mid < \tau$ închisă şi mărginită în (E, t) este completă.*

2. Un spaţiu local convex (E, t) se numeşte quasicomplet, dacă orice mulţime închisă şi mărginită în (E, t) este completă.

3. Un spaţiu local convex (E, t) se numeşte secvenţial complet, dacă orice şir Cauchy converge.

10.1.3. Notaţii. Γ_τ^- *subcategoria spaţilor τ^--complete;*

$q\Gamma_0$ *subcategoria spaţiilor cuasicomplete;*

$s\Gamma_0$ *subcategoria spaţiilor secvenţial complete.*

10.1.4. Teoremă. *1. $\Gamma_0 \subset \Gamma_\tau^-$ şi $\Gamma_\tau^- \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.*

2. Fie $\tau \leq w$. Atunci $\Gamma_\tau^- = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. $s\Gamma_0 \subset \Gamma_{w_1}^-$.

4. $\cap\Gamma_\tau^- = q\Gamma_0$.

5. Fie $\alpha < \beta$ şi $w_1 \leq \beta$. Atunci $\Gamma_\alpha^- \subset \Gamma_\beta^-$. $\uparrow$

10.1.5. Fie $g_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_\tau^-$ functorul reflector. Vom construi Γ_τ^--replica unui obiect arbitrar (E, t). Fie $(\hat{E}, \hat{t})$ Γ_0-replica. Avem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
(E,t) \arrow[rr, "g_0^E"] \arrow[dr, "g_\tau^E"'] & & (\hat{E},\hat{t}) = g_0(E,t)) \\
& g_\tau(E,t) \arrow[ur, dashed, "v^E"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 10.1.1

Fie $\mathcal{M}_\tau^-$ clasa tuturor mulţimilor $M \subset E$, unde $\mid M \mid < \tau, M$ este închisă şi mărginită. Examinăm închiderea $\bar{M}$ a mulţimii M în spaţiul $(\hat{E}, \hat{t})$.

Teoremă.

$$g_\tau(E,t) = \cup\{\bar{M} \mid M \in \mathcal{M}_\tau^-\}.$$

$\downarrow$ Notăm cu $F = \cap\{\bar{M} \mid M \in \mathcal{M}_\tau^-\}$ şi o să demonstrăm că F este un subspaţiu vectorial în spaţiul $\hat{E}$. Fie $x_1, x_2 \in F$. Există două dirijări $\{y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, $\{z_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ $y_\alpha, z_\alpha \in E$, astfel încât $y_\alpha \to x_1, z_\alpha \to x_2$ şi $\mid \mathcal{A} \mid < \tau$. Este clar $y_\alpha + z_\alpha \to x_1 + x_2$. De asemenea dirijarea $\{ay_\alpha\}$ converge la punctul ax_1 pentru $a \in K$.

Examinăm pe subspaţiul F topologia indusă din spaţiul $(\hat{E}, \hat{t})$ şi o să arătăm că (F, t) este un spaţiu τ^--complet. Într-adevăr fie $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ o dirijare care converge la punctul $x_0 \in \hat{E}$, unde $\mid \mathcal{A} \mid < \tau$ şi $x_\alpha \in F$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$. Pentru orice indice $\alpha \in \mathcal{A}$ există o dirijare $\{x_{\alpha\beta} \mid \beta \in \mathcal{A}\}$ de elemente ale spaţiului F, astfel încât $x_{\alpha\beta} \to x_\alpha$. Atunci dirijarea $x_{\alpha\alpha} \to x_0$, iar $x_0 \in F$. Astfel am construit functorul g_τ pe obiecte: $g_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_\tau^-$.

Să definim acest functor pe morfisme. Fie $f : (E,t) \to (G,u) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar $\hat{f}$ este extinderea acestui morfism pe completările acestor spaţii.

$$\begin{tikzcd}
(E,t) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (G,u) \arrow[d] \\
g_\tau(E,t) \arrow[r, "\hat{f}_\tau = g_\tau(f)"] \arrow[d] & g_\tau(G,u) \arrow[d] \\
(\hat{E},\hat{t}) \arrow[r, "\hat{f} = g_0(f)"] & (\hat{G},\hat{u})
\end{tikzcd}$$

Figura 10.1.2

Este suficient de demonstrat că $\hat{f}(g_\tau(E,t)) \subset g_\tau(G,u)$. Fie $x_0 \in g_\tau(E,t)$. Există o dirijare $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ cu $\mid \mathcal{A} \mid < \tau$ de elemente ale spaţiului E astfel încât $x_\alpha \to x_0$. Atunci dirijarea $\{\hat{f}(x_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ converge la punctul $\hat{f}(x_0)$. Deci $\hat{f}(x_0) \in g_\tau(G,u)$. $\uparrow$

10.1.6. Teoremă. *1. Functorul $g_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_0$ este exact la stânga.*

2. Pentru orice cardinal τ functorul de completare $g_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_\tau^-$ este exact la stânga.

$\downarrow$ 1. Fie $m : X \to Y \in \mathcal{M}_f$. În egalitatea $g_0^Y \cdot m = g_o(m) \cdot g_0^X$ $g_0^Y \in \mathcal{M}_p$. Deci $g_0^Y \cdot m \in \mathcal{M}_f$, adică $\hat{m} \cdot g_0^X \in \mathcal{M}_p$. Deoarece clasa $\mathcal{M}_p$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, deducem că $g_0(m) \in \mathcal{M}_p$. Aşa cum g_0^X este un spaţiu complet, morfismul $g_0(m)$ are imagine închisă. Deci $g_0(m) \in \mathcal{M}_f$.

2. Să revenim la figura 2 din p. 10.1.5. Dacă $f \in \mathcal{M}_f$, atunci $\hat{f} \in \mathcal{M}_f$. Fie M o mulţime închisă şi mărginită în spaţiul (E, t) cu $| M |< \tau$. Odată ce $(\hat{E}, \hat{t})$ este un subspaţiu închis al spaţiului $(\hat{G}, \hat{u})$, atunci închiderea mulţimii M în spaţiul $(\hat{E}, \hat{t})$ este egală cu închiderea ei în spaţiul $(\hat{G}, \hat{u})$. Dacă $| M |< \tau$, atunci închiderea $\bar{M}$ poate fi luată în spaţiul $g_\tau(G, u)$. $\uparrow$

10.1.7. Fie τ un cardinal, M o mulţime cu $| M |= \tau$, iar m_τ spaţiul Banach al funcţiilor mărginite definite pe mulţimea M.

În spaţiul m_τ examinăm subspaţiul

$$\mathcal{S}_\tau = \{f \in m_\tau \mid\mid Supp(f) \mid< \infty\},$$

unde

$$Supp(f) = \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}.$$

Lemă. *Fie E un subspaţiu complet al spaţiului $\mathcal{S}_\tau$. Atunci $| E |\leq c$.*

$\downarrow$ O să presupunem că $| E |> c$. Fie $E_n = \{f \in E \mid Supp(f) = n\}$. Atunci $E = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. Există un m pentru care $| E_m |=| E |> c$. Deci, există o mulţime $\mathcal{F} \subset E_m$, încât $|\mathcal{F}| =| E |$ şi $Supp(f) \neq Supp(g)$ pentru orice $f, g \in \mathcal{F}$ şi $f \neq g$. Avem $| \cup\{Supp(f) \mid f \in \mathcal{F}\}| = |E|$. Pentru orice $x \in M$ definim $\mathcal{F}(x) = \{f \in \mathcal{F} \mid x \in Supp(f)\}$. Fie $X_0 = \{x \in m_\tau \mid\mid \mathcal{F}(x) \mid\geq w_1\}$. Atunci $| X_0 |< m$. Vom construi după inducţie un şir de puncte $a_n \in M$ şi un şir de funcţii $f_n \in \mathcal{F}$ cu proprietatea

$$a_n \in Supp(f_n) \cup \{Supp(f_i) \mid i < n\}.$$

Fixăm $f_1 \in \mathcal{F}$ şi $a_1 \in Supp(f_1) \setminus X_0$.

Fie că punctele $a_1, a_2, ..., a_n$ şi funcţiile $f_1, f_2, ..., f_n$ cu proprietăţiile indicate au fost construite. Există o funcţie $f_{n+1} \in \mathcal{F}$, astfel încât $a_1, a_2, ..., a_n \notin Supp(f_{n+1})$ şi $Supp(f_{n+1}) \setminus \{Supp(f_i) : i \leq n\} \neq \oslash$. Fie $X_n = \cup\{Supp(f_i) \mid i \leq n\} \setminus X_0$. Atunci $\{f \in \mathcal{F} : Supp(f) \cap X_n \neq \oslash\}$ este finită. Fixăm $a_{n+1} \in Supp(f_{n+1}) \setminus \cup Supp(f_i) : i \leq n\}$. Fie $f_n(a_n) = \lambda_n$, cu $\lambda_n \neq 0$. Construim numerele $\beta_n > 0$, astfel încât $\|\beta_n f_n\| \leq 2^{-n}$. Notăm $g_n = \beta_n f_n, h_n = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$, $h = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i$. Avem $h(a_n) = h_n(a_n) = \beta_n \lambda_n \neq 0$. Aşadar, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset Supp(h)$ şi $h_i \to h$ cu $h_n \in E$. Deci $h \in E$. Contrazicere $\uparrow$

10.1.8. Teoremă. *Fie $c < \alpha < \beta$. Subcategoriile $\Gamma_\alpha = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} P(\mathcal{S}_\alpha \cup \Gamma_0)$ şi $\Gamma_\beta = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f} P(\mathcal{S}_\beta \cup \Gamma_0)$ ce aparţin laticei $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ verifică relaţia $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta$, dar sunt diferite. În particular laticea $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ conţine o clasă proprie de elemente.*

$\downarrow$ Fie că $\mathcal{S}_\beta \subset \Gamma_\alpha$. Există un spaţiu complet F şi o incluziune cu imagine închisă $i : \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\alpha \times F$. Atunci $i(\mathcal{S}_\beta) \cap (0 \times F)$ este un subspaţiu complet în $\mathcal{S}_\beta$. În virtutea Lemei 10.1.7 avem

$|i(\mathcal{S}_\beta) \cap (0 \times F)| \le c$. Atunci $|\mathcal{S}_\beta| \le |\mathcal{S}_\alpha| + |i(\mathcal{S}_\beta) \cap (0 \times F)| \le |\mathcal{S}_\alpha| + c = |\mathcal{S}_\alpha|$, sau $|\mathcal{S}_\beta| \le |\mathcal{S}_\alpha|$. Contrazicere. $\uparrow$

10.1.9. Teoremă. *1. Categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ nu posedă obiectul $\mathcal{M}_p$-universal, nici obiectul $\mathcal{M}_f$-universul.*

2. Nici un element al laticei $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ nu posedă obiect $\mathcal{M}_p$-universal.

3. Nici un element al laticei $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ nu posedă obiect $\mathcal{M}_f$-universal.

$\downarrow$ 1. Fie că A este un obiect $\mathcal{M}_p$-universal pentru categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi B un spaţiu Banach cu o bază Hamel mai mare ca a spaţiului A.

Există un cardinal τ şi un morfism $i : B \to A^\tau \in \mathcal{M}_p$. Deoarece un spaţiu Banach este un obiect dual mic (Teorema 3.3.3), există un număr n astfel încât

$$B \xrightarrow{\quad i \quad} A^\tau \xrightarrow{\quad p \quad} A^n$$

$p \cdot i \in \mathcal{M}_p$, unde p este proiecţia canonică. Astfel dimensiunea spaţiului B nu este mai mare decât dimensiunea spaţiului A. Contrazicere.

2-3. Se repetă demonstraţia p.1. $\uparrow$

10.1.10. Notaţii. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă în categoria spaţiilor Tihonov $\mathcal{T}h, l : \mathcal{T}h \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ functorul liber, $\lambda_v(\mathcal{R})$ subcategorua plină a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ formată din toate obiectele (E,t) cu proprietatea:*

Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{T}h$ şi orice morfism $f : X \to (E,t) \in \mathcal{T}h$ există un morfism $g : rX \to (E,t) \in \mathcal{T}h$ astfel încât

$$f = g \cdot r^X, \tag{1}$$

unde $r^X : X \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului X.

Dacă $(E,t) \in |\lambda_v(\mathcal{R})|$, atunci orice morfism $f : X \to (E,t)$ se extinde prin obiectul liber lrX prin intermediul unui morfism $h : lrX \to (E,t) \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r^X \in \mathcal{T}h"] \arrow[d, "f \in \mathcal{T}h"'] & rX \arrow[dl, dashed, "g \in \mathcal{T}h"] \arrow[d, "l^{rX} \in \mathcal{T}h"] \\
(E,t) & lrX \arrow[l, dashed, "h \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 10.1.3

Este evident că

$$\lambda_v(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{R}.$$

10.1.11. Atât epimorfismele categoriei $\mathcal{T}h$ cât şi epimorfismele categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ au aceeaşi descriere:

- un morfism al categoriei respective este un epimorfism atunci şi numai atunci când imaginea lui este densă;

- un morfism al categoriei respective este un monomorfism forte atunci şi numai atunci, când el este o incluziune topologică cu imaginea închisă:

$$\mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{E}pi(\mathcal{T}h),$$

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_f(\mathcal{T}h).$$

Aceeaşi situaţie o avem şi în cazul categoriei spaţiilor uniforme Hausdorf şi subcategoria ei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$:

$$\mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{E}pi(\mathcal{U}_2),$$

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_f(\mathcal{U}_2).$$

De asemenea

$$\mathcal{E}_u(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_u(\mathcal{T}h),$$

$$\mathcal{M}_p(\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_p(\mathcal{T}h),$$

$$\mathcal{E}_u(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_u(\mathcal{U}_2),$$

$$\mathcal{M}_p(\mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_p(\mathcal{U}_2).$$

10.1.12. Teoremă. *Fie $\mathcal{R}$ o subcategriei epireflectivă a categoriei $\mathcal{T}h$.*

1. $\lambda_v(\mathcal{R})$ este o subcategoriei reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\lambda_v(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}h)$.

2. Fie că $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}omp$. Atunci $\varphi_v(\mathcal{R}) = 0$.

3. Fie că $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$, unde $\mathcal{Q}$ este subcategoria spaţiilor Hewitt. Atunci $\lambda_v(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ (presupunând că nu există cardinali măsurabili).

$\downarrow$ 1. În baza observaţiilor din p.10.1.11.

2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V} \subset \mathcal{C}omp \cap \mathcal{C}_2\mathcal{V} = 0$.

3. Rezultă din faptul că orice spaţiu local comvex complet este un spaţiu Hewitt. $\uparrow$

Exerciţii. *1. Categoria $\mathcal{T}h$ este unica subcategorie $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono)$-reflectivă a categoriei $\mathcal{T}h$.*

2. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categria $\mathcal{T}h$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{C}_2\mathcal{V})$. Atunci $\mathcal{T}h = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$.

3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ clasele $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ conţin câte o clasă proprie de elemente cu functorul reflector exact la stânga:

a) în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ subclasa $\mathbb{R}_c$ (Teorema 9.2.11);

b) în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ subclasa $\{\Gamma_\tau^- | \tau$ cardinal$\}$ (Teorema 10.1.6);

c) în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ subclasa $\{\mathcal{L} \cap \Gamma_\tau^- | \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi τ cardinal$\}$.

10.1.13. Problemă. *Fie $\alpha < \beta$ şi $w_1 \leq \beta$. Este adevărat oare că $\Gamma_\alpha^- \neq \Gamma_\beta^-$? (Vezi Teorema 10.1.4).*

10.1.14. *În categoria $\mathcal{T}h$ sunt cunoscute subcategorii reflective mai mari ca subcategoria $\mathcal{Q}$ a spaţiilor Hewitt* (vezi [Ci, 1980], şi 11.2.4)

Problemă. *Este adevărat oare că $\mathcal{Q}_\tau^- \cap \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \Gamma_\tau^-$?*

10.1.15. *Fie $\mathcal{R}$ o completare în categoria $\mathcal{U}_2$. Atunci subcategoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{R}$ este de asemenea o completare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

Problemă. *Fie $(E, t) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, şi $g^E : (E, t) \to g(E, t)$ $(\mathcal{C}_2\mathcal{V} \cap \mathcal{R})$-replica acestui spaţiu local convex. Pentru care subcategorii reflective $\mathcal{R}$ morfismul g^E este şi $\mathcal{R}$-repleca obiectului (E, t) în categoria $\mathcal{U}_2$?*

10.2. Functori comutativi

10.2.1. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{R}, \mathcal{H} \in \mathbb{R}$ sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \Leftrightarrow k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

2. $(r(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ şi $h(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}) \Leftrightarrow r \cdot h = h \cdot r$.

Dacă, în plus, $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, atunci:

3. $(r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ şi $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}) \Rightarrow k \cdot r = r \cdot k$.

4. $(k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}) \Rightarrow k \cdot r = r \cdot k$.

$\downarrow$ 1. $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \Rightarrow k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica lui kA. Atunci

$$k^A = f \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pentru un f. Deoarece $rkA \in |\mathcal{K}|$, rezultă că

$$f = k^A \cdot g \tag{2}$$

pentru un g. Se verifică că $r^{kA} = g^{-1}$.

$(k\mathcal{R}) \subset \mathcal{R} \Rightarrow r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. Demonstraţie duală.

2. Fie $r^X : X \to rX,\ h^X : X \to hX$ $h^{rX} : rX \to hrX$ şi $r^{hX} : hX \to hrX$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile obiectelor respective.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dd, "h^X"'] & & rX \arrow[dl, "h^{rX}"'] \arrow[dd, dashed, shift right, "v"'] \arrow[dd, dashed, shift left, "r(h^X)"] \\
& hrX \arrow[dr, dashed, shift left, "f"] & \\
hX \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[rr, dashed, "r^{hX}"] & & rhX \arrow[ul, dashed, shift left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Figura 10.2.1

Atunci

$$h^{rX} \cdot r^X = u \cdot h^X, \tag{3}$$

$$r^{hX} \cdot h^X = v \cdot r^X \tag{4}$$

pentru două morfisme u şi v. Deoarece $hrX \in |\mathcal{R}|$, iar $rhX \in |\mathcal{H}|$, aceste morfisme ne conduc la două morfisme f şi g ce verifică egalităţile:

$$v = f \cdot h^{rX}, \tag{5}$$

$$u = g \cdot r^{hX}. \tag{6}$$

Se verifică că $f = g^{-1}$.

3. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica lui, iar $r^{kX} : kX \to rkX$ şi $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$r^X \cdot k^X = u \cdot r^{kX} \tag{7}$$

pentru un morfism u. Mai departe, fie $l^X : X \to lX$ şi $l^{rkX} : rkX \to lrkX$ $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Deoarece $l^X \cdot k^X : kX \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului kX, pentru morfismul $l^{rkX} \cdot r^{kX}$ există un morfism $v : lX \to lrkX$ astfel încât

$$l^{rkX} \cdot r^{kX} = v \cdot l^X \cdot k^X \tag{8}$$

Conform ipotezei, obiectul $lrkX$ aparţine subcategoriei $\mathcal{R}$. Deci pentru morfismul $v \cdot l^X : X \to lrkX$ există un morfism $t : rX \to lrkX$ cu proprietatea

$$v \cdot l^X = t \cdot r^X. \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "r^{kX}"] \arrow[d, "k^X"] & rkX \arrow[r, "l^{rkX}"] \arrow[d, dashed, "u=r(k^X)"] & lrkX \\
X \arrow[r, "r^X"] \arrow[rr, bend right, "l^X"'] & rX \arrow[ur, dashed, "t=r(v\cdot l^X)"] & lX=lkX \arrow[u, dashed, "v=l(r^{kX})"']
\end{tikzcd}$$

Figura 10.2.2

Avem

$$t \cdot u \cdot r^{kX} = (\text{din}(1)) = t \cdot r^X \cdot k^X = (\text{din}(9)) = v \cdot l^X \cdot k^X = (\text{din}(8)) = l^{rkX} \cdot r^{kX},$$

i.e.

$$t \cdot u \cdot r^{kX} = l^{rkX} \cdot r^{kX}. \tag{10}$$

Deoarece r^{kX} este un epi, deducem că

$$t \cdot u = l^{rkX}. \tag{11}$$

Din egalitatea (7) rezultă că u este un epi. Atunci din egalitatea (11) deducem că $u \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$. Pe de altă parte, conform ipotezei $rkX \in\mid \mathcal{K} \mid$. Deci u este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rX. Astfel am demonstrat că $k \cdot r = r \cdot k$.

4. Rezultă din 1 şi 3. $\uparrow$

10.2.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c, \mathcal{L} \subset \mathcal{R}, \mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi cel reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $k \cdot r = r \cdot k$. În particular, fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $k \cdot r = r \cdot k$.*

$\downarrow$ Fie $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, k^A : kA \to A$ şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{K}$-coreplica şi $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective şi

$$p \cdot k^A = b \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^A şi r^{kA}. Deoarece $k^A \in \mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$, $b \in \mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $P \in |\mathcal{R}|$. Mai departe, $r^{kA} \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $p \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $p = r^A$. Dacă $k^{rkA} : krkA \to rkA$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui rkA, atunci $k^{rkA} : krkA \to rkA$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui rkA, atunci $k^{rkA} \in \mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$ şi $krkA \in |\mathcal{R}|$. Astfel

$$r^{kA} = k^{rkA} \cdot u \tag{2}$$

pentru un u şi

$$u = v \cdot r^{kA} \tag{3}$$

pentru un v. Se verifică uşor, că $k^{rkA} = v^{-1}$ şi că $b = k^P$. Deci $krA = rkA$. $\uparrow$

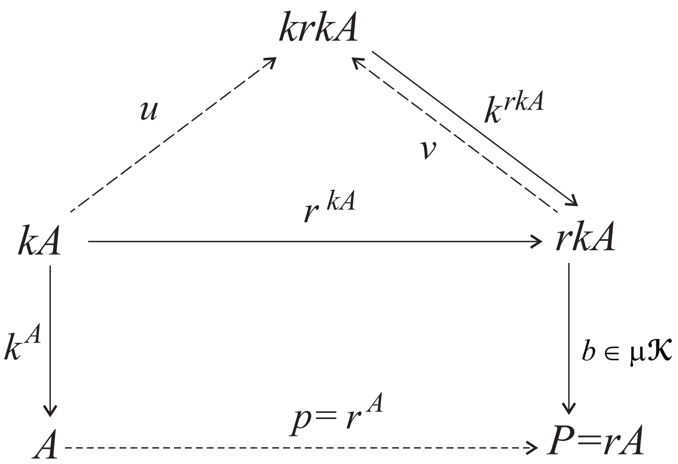


Figura 10.2.3

10.2.3. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Atunci functorii reflectori $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $l \cdot r = r \cdot l$.*

$\downarrow$ Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, l^X : X \to lX$ şi $r^X : X \to rX$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{R}$-replica lui obiectelor respective. Atunci $rlX \in |\mathcal{L}|, lrX \in |\mathcal{R}|$, deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

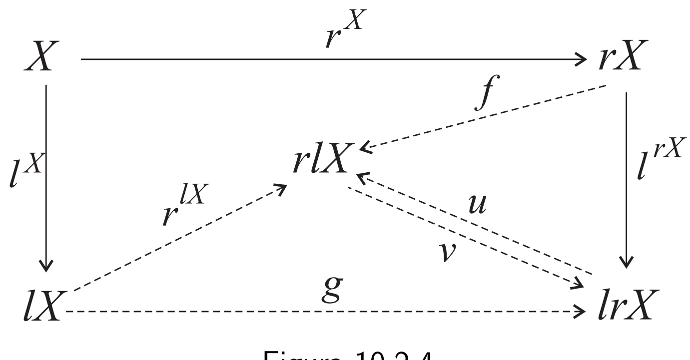


Figura 10.2.4

Astfel

$$r^{lX} \cdot l^X = f \cdot r^X \tag{1}$$

pentru un f,

$$l^{rX} \cdot r^X = g \cdot l^X \tag{2}$$

pentru un g,

$$f = u \cdot v^{rX} \tag{3}$$

pentru un u, şi

$$g = v \cdot r^{vX} \tag{4}$$

pentru un v. Se verifică uşor că $u = v^{-1}$. $\uparrow$

10.2.4. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R}))$ (vezi 6.6). Sunt adevărate următoarele afirmaţii.*

1. Functorul coreflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\Sigma)$ şi cel reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $t \cdot r = r \cdot t$.

2. Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, atunci functorul coreflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K})$ şi cel reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $t \cdot r = r \cdot t$.

$\downarrow$ 1. Rezultă din p.2.

2. Fie $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K})$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ fie

$$k^X = p^X \cdot t^X \tag{1}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea $\mathcal{K}$-coreplicii lui X. Atunci t^X este $\mathcal{T}$-coreplica lui X. Fie $r^X : X \to rX$ şi $r^{tX} : tX \to rtX$ $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Atunci

$$r(t^X) \cdot r^{tX} = r^X \cdot t^X. \tag{2}$$

Deoarece $r^X \in \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, rezultă că $r^X \cdot k^X : kX \to rX$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui rX. Mai departe, $r^{tX} \in \mathcal{P}'(\mathcal{R}) = \mathcal{P}$. Astfel $rtX \in |\mathcal{T}|$. În pătratul (2) $r^X \cdot t^X \in \mathcal{M}ono$ şi $r^{tX} \in \mathcal{E}_u$. Deci $r(t^X) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}ono \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R}) = \mathcal{I}$. Aşadar

$$k^{rX} = r(t^X) \cdot (r^{tX} \cdot t^X) \tag{3}$$

easte $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea lui k^{rX}. Deci rtX este $\mathcal{T}$-coreplica lui rX şi $rtX = trX$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, dashed, "p^X"] & tX \arrow[r, dashed, "t^X"] \arrow[d, "r^{tX}"'] & X \arrow[ll, bend right, "k^X"'] \arrow[d, "r^X"] \\
 & rtX \arrow[r, "r(t^X)"] & rX
\end{tikzcd}$$

Figura 10.2.5

10.2.4*. **Teoremă.** *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{E}''(\mathcal{K}),\mathcal{M}''(\mathcal{K}))$. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi cel reflector* $h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_\mathcal{M}(\Pi)$ *comută:* $k \cdot h = h \cdot k$.

2. Dacă $\mathcal{U} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{U}$, *atunci functorul coreflector* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi cel reflector* $h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_\mathcal{M}(\Pi)$ *comută:* $k \cdot h = h \cdot k$. $\uparrow$

10.2.5. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{L},\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R})$, *iar* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci functorii reflectori* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $l \cdot r = r \cdot l$. $\uparrow$

2. Fie $(\mathcal{P},\mathcal{I}),(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{P},\mathcal{E})$, *iar* $\mathcal{R} \in \mathbb{V}(\mathcal{E},\mathcal{P})$. *Atunci functorii reflectori* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $r \cdot l = l \cdot r$.

3. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci functorii* l *şi* r *comută:* $r \cdot l = l \cdot r$.

4. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi,\mathcal{E}pi),\mathcal{R} \in \mathbb{R},\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, *iar* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}, r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *şi* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ *functorii reflectori. Atunci* $t = r \cdot l = l \cdot r \cdot l$. *În partiular, această afirmaţie este adevărată pentru* $\mathcal{L} = \mathcal{S}$ *şi orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. $\uparrow$

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. *Atunci functorii* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi* $\pi : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Pi$ *comută:* $k \cdot \pi = \pi \cdot k = \pi$.

6. Fie $\mathcal{L},\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. *Atunci* $r \cdot l = l \cdot r$.

7. Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{V} = \mathcal{S}_B(S)$, *iar* $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{V})$. *Atunci functorii reflectori* $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *şi* $g : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma$ *comută:* $v \cdot g = g \cdot v$.

10.2.6. Monoizii comutativi $F_g(\mathcal{T})$ şi $F_d(\mathcal{H})$.

Notaţii. *Pentru* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ *fie*

$$T_g(\mathcal{T}) = \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{T}), T_d(\mathcal{H}) = \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{H}),$$

$$F_g(\mathcal{T}) = \{\mathcal{K} \in T_g(\mathcal{T}) | \mathcal{T} \subset \mathcal{K}\}, F_d(\mathcal{H}) = \{\mathcal{R} \in T_d(\mathcal{H}) | \mathcal{H} \subset \mathcal{R}\}.$$

10.2.7. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}, (\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *sau* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *o structură de factorizare de stânga cu clasa* $\mathcal{M}$ $\mathcal{E}$*pi-coereditară. Atunci* $\mathcal{S}_\mathcal{M}(\mathcal{H}) \in T_d(\mathcal{H})$. *Pentru* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{B}^\top,\mathcal{B})$ *sau* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{B}^\top \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ $\mathcal{S}_\mathcal{M} \in T_d(\mathcal{H})$.

1*. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}, (\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *sau* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *o structură de factorizare de dreapta cu clasa* $\mathcal{E}$ $\mathcal{M}$*ono-ereditară. Atunci* $\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{T}) \in T_g(\mathcal{T})$. *Pentru* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ $\mathcal{Q}_\mathcal{B}(\mathcal{T}) \in T_g(\mathcal{T})$.

2. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Atunci pentru orice* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{K}),\mathcal{M}'(\mathcal{K}))$ $\mathcal{S}_\mathcal{M}(\mathcal{H}) \in T_d(\mathcal{H})$.

2*. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. *Atunci pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\rangle''(\mathcal{R}))$ $\mathcal{Q}_\mathcal{E}(\mathcal{T}) \in T_g(\mathcal{T})$.

3. $\{\mathcal{S}_\mathcal{M}(\mathcal{R}) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L}),\ \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c\} \subset F_d(\mathcal{L})$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{H}$. Dacă $h^A : A \to hA$ este $\mathcal{H}$-replica lui A, atunci $h^A \in \mathcal{M}$ şi

$$h^A = f \cdot b \tag{1}$$

pentru un f. Deoarece $b \in \mathcal{E}pi$ şi clasa $\mathcal{M}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, atunci $f \in \mathcal{M}$ şi $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})|$.

Structurile de factorizare $(\mathcal{B}^{\top}, \mathcal{B})$ şi $(\mathcal{B}^{\top} \cap \mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ au clase de injecţii $\mathcal{E}pi$-coereditare.

2. Clasa de injecţii $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K})$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară (Teorema 6.6.14*). $\uparrow$

10.2.8. Enumerăm următoarele properietăţi ale claselor T_g şi T_d pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$.

1. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in T_g(\mathcal{T})$.

1*. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in T_d(\mathcal{H})$.

2. T_g este o clasă închisă în raport cu intersecţiile.

2*. T_d este o clasă închisă în raport cu intersecţiile.

10.2.9.Exerciţii. *1. Functorul reflector $id : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ aparţine clasei $F_d(\mathcal{H})$.*

2. Functorul reflctor $h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ apaţine clasei $F_d(\mathcal{H})$.

10.2.10. Teoremă. *Fie că $v_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}_1$ şi $v_2 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}_2$ aparţin clasei $F_d(\mathcal{H})$. Atunci:*

1. Functorii v_1 şi v_2 comută: $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$.

2. Functorul $v_1 \cdot v_2 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ aparţine clasei $F_d(\mathcal{H})$.

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, v_1^X : X \to v_1X, v_2^X : X \to v_2X, h^X : X \to hX, \mathcal{V}_1$-, $\mathcal{V}_2$- şi $\mathcal{H}$-replica lui X. Atunci

$$h^X = i_1^X \cdot v_1^X, \tag{1}$$

$$h^X = i_2^X \cdot v_2^X, \tag{2}$$

pentru două morfisme i_1^X şi i_2^X. Mai departe, fie

$$w_1^X \cdot v_2^X = w_2^X \cdot v_1^X \tag{3}$$

pătratul cocartezian construit pe morfisme v_1^X şi v_2^X. Atunci

$$i_1^X = t^X \cdot w_2^X, \tag{4}$$

$$i_2^X = t^X \cdot w_1^X \tag{5}$$

pentru un morfism t^X.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "v_1^X"] \arrow[dd, "v_2^X"'] \arrow[ddrr, bend left, "h^X"] & & v_1X \arrow[dl, dashed, "w_2^X"'] \arrow[dd, dashed, "i_1^X"] \\
& T \arrow[dr, dashed, "t^X"] & \\
v_2X \arrow[ur, dashed, "w_1^X"] \arrow[rr, dashed, "i_2^X"] & & hX
\end{tikzcd}
$$

Figura 10.2.6

În diagrama construită, toate morfismele aparţin clasei $\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Deci şi clasei $\varepsilon\mathcal{H}$. Astfel $v_1X \in |\mathcal{V}_1|, w_2^X \in \varepsilon\mathcal{H}$ şi subcategoria $\mathcal{V}_1$ aparţine clasei $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{H})$. Deci $T \in |\mathcal{V}_1|$. În acelaşi mod se verifică că $T \in |\mathcal{V}_2|$. Mai departe, $v_1^X \in \varepsilon\mathcal{V}_1$. Astfel $w_1^X \in \varepsilon\mathcal{V}_1$ şi $T \in |\mathcal{V}_1|$, adică w_1^X este $\mathcal{V}_1$-replica lui v_2X. Prin analogie se verifică că w_2^X este $\mathcal{V}_2$-replica lui v_1X. Astfel am demonstrat că functorii v_1 şi v_2 comută: $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$.

2. Rezultă din p.1. $\uparrow$

10.2.10*. Teoremă. *Fie că $u_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{U}_1$ şi $u_2 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{U}_2$ aparţin clasei $F_g(\mathcal{T})$. Atunci:*

1. Functorii u_1 şi u_2 comută: $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$.

2. Functorul $u_1 \cdot u_2 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ aparţine clasei $F_g(\mathcal{T})$. $\uparrow$

10.2.11. Corolar. *1. Pentru orice $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ clasa $F_d(\mathcal{H})$ este un monoid (asociativ şi cu unitate) comutativ.*

1*. *Pentru orice $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$ clasa $F_g(\mathcal{T})$ este un monoid comutativ.*

2. Fie $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}, \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1, F_d(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) = \{\mathcal{R} \in U_d(\mathcal{H}), \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{R}\}$ şi $F_d(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ clasa de functori reflectivi ce corespund elementelor din $T_d(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$. Atunci $F_d(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ este un submonoid comutativ al monoizilor $F_d(\mathcal{H})$ şi $F_d(\mathcal{H}_1)$.

2*. *Fie $\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \in \mathbb{K}, \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1, T_g(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1) = \{\mathcal{K} \in T_g(\mathcal{T}) | \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_1\}$, şi $F_g(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ clasa de functori coreflectori ce corespund elementelor din $T_g(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$. Atunci $F_g(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ este un submonoid comutativ al monoizilor $F_g(\mathcal{T})$ şi $F_g(\mathcal{T}_1)$.*

3. Fie $F_{dv}(\mathcal{H})$ clasa functorilor reflectori $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$, unde $\mathcal{R}$ este o $\mathcal{E}pi$-varietate şi $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Atunci $F_{dv}(\mathcal{H})$ este un submonoid comutativ al monoidului $F_d(\mathcal{H})$.

3*. *Fie $F_{gv}(\mathcal{T})$ clasa functorilor coreflectori: $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, unde $\mathcal{K}$ este $\mathcal{M}$ono-covarietate (subcategorie coreflectivă închisă în raport cu $\mathcal{M}$ono-subobibecte, de exemplu $\Sigma, \mathcal{C}_2\mathcal{V}$) şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$. Atunci $F_{gv}(\mathcal{T})$ este un submonoid comutativ al monoidului $F_d(\mathcal{T})$.*

4. Fie $F_{dc}(\mathcal{H})$ clasa functorilor reflectori $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$, unde $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Atunci $F_{dc}(\mathcal{H})$ este submonoid comutativ al monoidului $F_d(\mathcal{H})$.

4*. *Fie* $F_{gc}(\mathcal{T})$ *clasa functorilor coreflectori* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, *unde* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ *şi* $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$. *Atunci* $F_{gc}(\mathcal{T})$ *este un submonoid comutativ al monoidului* $F_g(\mathcal{T})$. $\uparrow$

10.3. Operaţia $\lambda_{\mathcal{R}}$. Grupoidul $\mathbb{R}$

10.3.1. Notaţii. *1. Fie* $\mathcal{R}$ *o subcategorie reflectivă a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\mathcal{A}$ *o subcategorie arbitrară. Notăm cu* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ *subcategoria plină a tuturor obiectelor* $B \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ *cu proprietatea:*

Pentru orice obiect $A \in\mid \mathcal{A} \mid$, *orice morfism* $f : A \to B$ *se extinde prin* $\mathcal{R}$*-replica obiectului* A : *există un morfism* $g : rA \to B$ *astfel încât*

$$f = g \cdot r^A$$

2. Fie $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}pi$, *şi* $\lambda(\mathcal{A})$ *subcategoria tuturor obiectelor* B *cu proprietatea:*

Pentru orice $p : X \to Y \in \mathcal{A}$ *orice* $f : X \to B$ *se extinde prin* p :

$$f = g \cdot p$$

pentru un g.

d^* : *1. Pentru* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{A}$ *o subcategorie definim* $\lambda^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$.

2. Pentru $\mathcal{A} \in \mathcal{M}ono$ *definim* $\lambda^*(\mathcal{A})$.

10.3.2. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R}$ *o subcategorie reflectivă, iar* $\mathcal{A}$ *o subcategorie arbitrară a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ *este o subcategorie* $\mathcal{P}'(\mathcal{R})$*-reflectivă.* $\uparrow$

10.3.3. Exerciţii. Formulăm următoarele proprietăţi simple ale operaţiei $\lambda_{\mathcal{R}}$.

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.
2. $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathcal{R}$
3. $\mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$.
4. Fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Atunci $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_2) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_1)$.
5. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.
6. Fie $\mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$. Atunci $\lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.
7. Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$. Atunci $\lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.
8. $\mathcal{L} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{R}$; $\mathcal{A} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}$; $\mathcal{A} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{R}$.

Grupoidul $\mathbb{R}$. *În clasa* $\mathbb{R}$ *vom defini o operaţie binară* $\mathcal{R} \oplus \mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$.

1. Operaţia nu este comutativă.

$\mathcal{R} \oplus \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$

2. Operaţia nu este asociativă:

Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. *Atunci* $(\mathcal{T} \oplus \mathcal{A}) \oplus \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{T} \oplus (\mathcal{A} \oplus \mathcal{R}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{T}$.

3. $\mathcal{R} \oplus \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{R}$. *$\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este elementul unitate din dreapta în* $\mathbb{R}$.

4. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \oplus \mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Orice element este simetricul din dreapta a lui* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

5. $\mathcal{R} \oplus \Pi$. Π *este simetricul de dreapra pentru orice element din* $\mathbb{R}$.

6. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. *Atunci pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *avem* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}(\mathcal{I}), \mathcal{I} \subset \rho(\mathcal{R}, \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}))$. *Astfel* $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ *este o parte stabilă pentru* $\lambda_{\mathcal{R}}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}(\mathcal{I})$ *este un subgrupoid în* $\mathbb{R}$.

7. Fie $)\mathcal{P}, \mathcal{J} \in \mathbb{B}$ *şi clasa* $\mathcal{P}$ *este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară. Atunci* $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ *este un subgrupoid în* $\mathbb{R}$.

8. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. *Atunci* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *este ub subgrupoid în* $\mathbb{R}$ *(vezi 12.8).*

10.3.4. Notaţii. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *iar* $\mathcal{A}$ *o subcategorie a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Stabilim*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R}) = \{r^X | X \in |\mathcal{A}\},$$

$$\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R}) = \{b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{R} | X \in |\mathcal{A}|\},$$

structura de factorizare $(\mathcal{P}_2, \mathcal{I}_2) = (\mathcal{U}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{U}^{\llcorner})$ *o notăm* $\alpha_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A})$.

Structura de factorizare $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1) = (\bar{U}^{\llcorner\urcorner}, \bar{U}^{\llcorner})$ *o notăm* $\beta_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A})$.

Deoarece $U \subset \bar{U}$, rezultă că $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$.

În genere, structurile de factorizare $(\mathcal{P}_1, \mathcal{I}_1)$ şi $(\mathcal{P}_2, \mathcal{I}_2)$ sunt diferite.

2. Fie $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Structura de factorizare $(\mathcal{B}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{B}^{\llcorner})$ o notăm $\gamma_\lambda(\mathcal{B})$.

10.3.5. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_2$. *Atunci* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$.

$\downarrow \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$. Fie $Z \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})|, r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-replica lui Z şi o să demonstrăm că $r^Z \in \mathcal{I}_1$. Fie $b : X \to Y \in \bar{\mathcal{U}}$ şi o să verificăm că $b \perp r^Z$. Pentru aceasta, fie

$$r^Z \cdot f = g \cdot b. \tag{1}$$

Dacă $r^Y : Y \to rY$ este $\mathcal{R}$-replica lui Y, atunci $r^Y \cdot b : X \to rY$ este $\mathcal{R}$-replica lui X. Mai departe, $X \in |\mathcal{A}|$, şi $Z \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}))|$.

Deci

$$f = h \cdot r^Y \cdot b \tag{2}$$

Astfel am demonstrat că $b \perp r^Z$.

$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$. Fie $B \in |\mathcal{R}|, i : X \to B \in \mathcal{I},\ Y \in |\mathcal{A}|$ şi $t : Y \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Trebuie să demonstrăm că t se extinde prin r^Y.

Avem

$$i \cdot t = v \cdot r^Y \tag{3}$$

pentru un v şi $r^Y \in U$. Astfel $r^Y \perp \mathcal{I}_2$ şi $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_2$. Deci $r^Y \perp i$:

$$t = w \cdot r^Y, \tag{4}$$

$$v = i \cdot w \tag{5}$$

pentru un w. $\uparrow$

10.3.6. Teoremă. *Fie* $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{B}^{\llcorner\urcorner}, \mathcal{B}^{\llcorner})$. *Atunci* $\lambda(\mathcal{B}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$.

$\downarrow$ $\lambda(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$. Fie $Z \in \lambda(\mathcal{B})$, iar $\pi^Z : Z \to \pi Z$ Π-replica lui Z şi o să demonstrăm că $\pi^Z \in \mathcal{I}$, adică $\mathcal{B} \perp \pi Z$. Într-adevăr, fie $b : X \to Y \in \mathcal{B}$ şi

$$\pi^Z \cdot f = g \cdot b. \tag{1}$$

Deoarece $Z \in \lambda(\mathcal{B})$ f se extinde prin b.

$$f = h \cdot b \tag{2}$$

ceea ce demonstrează că $b \perp \pi^Z$.

$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\Pi) \subset \lambda(\mathcal{B})$. Fie $A \in |\Pi|, i : Z \to A \in \mathcal{I}, b : X \to Y \in \mathcal{B}$, iar $t : X \to Z \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi o să demonstrăm că t se extinde prin b.

Odată ce $b \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_u$, şi $A \in |\Pi|$, rezultă că

$$i \cdot t = v \cdot b \tag{3}$$

pentru un v. Dar $b \perp i$, astfel

$$t = w \cdot b, \tag{4}$$

$$v = i \cdot w \tag{5}$$

pentru un w. Astfel t se extinde prin b. $\uparrow$

10.3.7. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica, $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X, iar $k^{rX} : krX \to rX$ $\mathcal{K}$-coreplica lui rX. Atunci

$$r^X \cdot k^X = r^{kX} \cdot k(r^X 0. \tag{1}$$

Lemă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. *Atunci egalitatea (1) este un pătrat cocartezian construit pe morfismele* r^X *şi* $k(r^X)$.

$\downarrow$ Fie

$$v^X \cdot k^X = f^X \cdot k(r^X) \tag{2}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi $k(r^X)$. Atunci

$$r^X = u^X \cdot v^X, \tag{3}$$

$$k^{rX} = u^X \cdot f^X \tag{4}$$

pentru un morfism u^X. $k^X \in \mathcal{E}_u$, deci $f^X \in \mathcal{E}_u$, şi din (4), apoi $f^X \in \mathcal{M}ono$. Deci în egalitatea (4) toate morfismele aparţin clasei $\mu\mathcal{K}$. Atunci $vX \in |\mathcal{R}|$, iar $u^X \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

10.3.8.Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$ şi $\mathcal{A}$ o subcategorie arbitrară a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci:*

1. $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

2. Dacă $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$, atunci $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ este o subcategorie reflectivă. Rămâne de demonstrat că ea este închisă în raport cu ($\mu\mathcal{K}$)-subobiecte. Fie $B \in \left|\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})\right|, b : X \to B \in \mu\mathcal{K}$, şi $f : A \to X$ un morfism arbitrar, unde $A \in \mid \mathcal{A} \mid$. Deoarece $B \in \left|\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})\right|$, apoi

$$b \cdot f = g \cdot r^A \tag{1}$$

pentru un morfism g.

Fie $k^A : kA \to A$ şi $k^{rA} : krA \to rA$ $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$r^A \cdot k^A = k^{rA} \cdot k(rA). \tag{2}$$

Mai departe, $krA \in \mid \mathcal{K} \mid$, iar $b \in \mu\mathcal{K}$. Astfel

$$g \cdot k^{rA} = b \cdot u \tag{3}$$

pentru un morfism u. Avem

$$b \cdot u \cdot k(r^A) = (\text{din } (3)) = g \cdot k^{rA} \cdot k(r^A) = (\text{din } (2)) = g \cdot r^A \cdot k^A = (\text{din } (1)) = b \cdot f \cdot k^A,$$

i.e.

$$b \cdot u \cdot k(rA) = b \cdot f \cdot k^A. \tag{4}$$

Ţinând cont că $b \in \mathcal{M}ono$, deducem că

$$u \cdot k(r^A) = f \cdot k^A. \tag{5}$$

Deoarece pătratul (2) este cocartezian (Teorema 11.1.11), apoi există un morfism $v : rA \to X$ astfel încât

$$f = v \cdot r^A, \tag{6}$$

$$u = v \cdot k^{rA}. \tag{7}$$

Egalitatea (6) arată că morfismul f se extinde prin morfismul r^A.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k(r^A)"] \arrow[d, "k^A"'] & krA \arrow[d, "k^{rA}"] \arrow[ddl, dashed, "u"'] \\
A \arrow[r, "r^A"] \arrow[d, "f"'] & rA \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dl, dashed, "v"'] \\
X \arrow[r, "b\in\mu\mathcal{K}"] & B
\end{tikzcd}$$

Figura 10.3.1

2. Fie $B \in \left|\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})\right|$, iar $b : B \to X \in \mu\mathcal{K}$. Trebuie de demonstrat că orice morfism $f : A \to X$ se extinde prin $\mathcal{R}$-replica obiectului A, dacă $A \in\mid \mathcal{A} \mid$. Deoarece $b \in \mu\mathcal{K}$ şi $A \in\mid \mathcal{K} \mid$.

$$f = b \cdot g \tag{8}$$

pentru un morfism g. Morfismul g se extinde prin morfismul r^A :

$$g = h \cdot r^A, \tag{9}$$

pentru un morfism h. Avem

$$f = (\text{din}(8)) = b \cdot g = (\text{din}(9)) = h \cdot r^A$$

i.e.

$$f = h \cdot r^A. \tag{10}$$

Astfel am demonstrat că morfismul f se extinde prin morfismul r^A. $\uparrow$

10.3.9. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. $\mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Evident.

$\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$, $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, iar $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica lui kA. Atunci

$$k^A = f \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pentru un f. Din egalitatea scrisă rezultă că $f \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ şi deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ deducem că $A \in |\mathcal{R}|$.

$\downarrow 2 \Rightarrow 1$. Fie $A \in \mathcal{R}, b : A \to X \in \mu\mathcal{K}$. O să demonstrăm, că $X \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$. Fie $Z \in |\mathcal{K}|, r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-replica lui Z, iar $f : Z \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci

$$f = g \cdot b \tag{2}$$

pentru un g, iar

$$g = h \cdot r^Z \tag{3}$$

pentru un h. Astfel

$$f = b \cdot h \cdot r^Z. \uparrow \tag{4}$$

10.3.10. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci:*

1. $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\lambda_{\Pi}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

10.3.11. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, iar $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci:*

1. $\lambda_{\Gamma}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\lambda_{\Pi}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

10.3.12. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ şi $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{R} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ şi $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. $\uparrow$

10.3.13. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}$. Examinăm următoarele condiţii:*

1. $g(\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

2. $k(\Gamma) \subset \Gamma$.

3. $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi $\mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\Gamma = \mathcal{I}so$.

4. $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

Atunci fiecare din condiţiile enumerate implică egalităţile:

$$\lambda_{\Gamma}(\mathcal{K}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma).$$

$\downarrow 1$. Deoarece $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$, vom demonstra că $\lambda_{\Gamma}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma)$. Astfel vom avea $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma) \subset \lambda_{\Gamma}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$.

$\lambda_{\Gamma}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma)$. Fie $Z \in |\lambda_{\Gamma}(\mathcal{K})|$, $k^Z : kZ \to Z$ $\mathcal{K}$-coreplica lui Z, iar $g^{kX} : kZ \to gkZ$ Γ-replica lui kZ. Atunci $gkZ \in |\mathcal{K}|$, iar

$$k^Z = f \cdot g^{kZ} \tag{1}$$

pentru un f. La rândul său

$$f = h \cdot k^Z \tag{2}$$

pentru un h. Atunci $g^{kZ} = h^{-1}$. Astfel am demonstrat că $kZ \in |\mathcal{K} \cap \Gamma|$, şi $Z \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma)|$.

2. Rezultă din p.1, deoarece condiţiile 1 şi 2 sunt echivalente.

3. $\lambda_\Gamma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma)$. Fie $Z \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{K})|, k^Z : kZ \to Z$ $\mathcal{K}$-coreplica lui $Z, g^{kZ} : kZ \to gkZ$ Γ-replica lui kZ. Atunci

$$k^Z = f \cdot g^{kZ} \tag{9}$$

pentru un f. Avem $k^Z \in \mathcal{M}_u$ şi $g^{kZ} \in \mathcal{E}pi$. Deoarece clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară deducem că $f \in \mathcal{M}_u$. Atunci $f \in \mu\mathcal{K}$. Deci şi $g^{kZ} \in \mu\mathcal{K}$, sau $g^{kZ} \in \mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\Gamma = \mathcal{I}so$. Astfel $kZ \in |\mathcal{K} \cap \Gamma|$, iar $k^Z \in \mu\mathcal{K}$.

4. Rezultă din p.3. $\uparrow$

10.3.14. Fie $\mathbb{F}$ clasa tuturor perechilor $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}$, care verifică una din condiţiile Teoremei precedente.

Teoremă. *1.* $\mathbb{K}(\mathcal{M}_u) \times \mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{F}$.

2. Corespondenţa $(\mathcal{K}, \mathcal{R}) \mapsto \Sigma(\mathcal{K}, \mathcal{R}) = \lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K})$ *este o aplicaţie antimonotonă pe prima componentă şi monotonă pe a doua componentă.* $\uparrow$

10.3.15. Exemplu. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Dacă* $\mathcal{R} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *atunci* $\mathcal{R} \notin \mathbb{R}(\mathcal{P}''(\mathcal{L}))$.

Teorema precedentă afirmă că pentru orice subcategoria $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ subcategoria $\lambda_\mathcal{R}(\mathcal{A})$ aparţine clasei $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{R} \subset \lambda_\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Aşadar subcategoria $\lambda_\mathcal{R}(\mathcal{A})$ aparţine domeniului (I) haşurat.

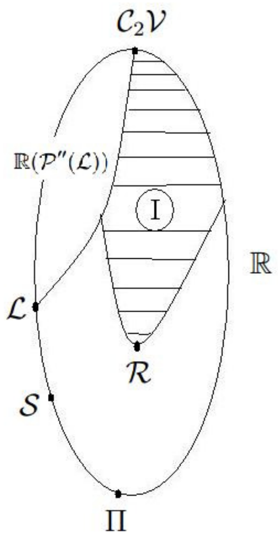


Figura 10.3.2

10.4. Operaţia ρ. Grupoidul $\mathbb{R}_c$

10.4.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{R}$ *două subcategorii reflective ale categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Notăm cu* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ *subcategoria plină a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *a tuturor obiectelor* X *pentru care* $\mathcal{L}$*-replica şi* $\mathcal{R}$*-replica coincid:*

$$l^X = r^X : X \to lX = rX.$$

10.4.2. Teoremă. *Subcategoria* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ *posedă următoarele proprietăţi:*

1. $\mathcal{L}\cap\mathcal{R}\subset\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$. *În particular,* $\Pi\subset\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$.

2. $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ *este închisă în raport cu produsele, dacă* $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$ *sau* $\mathcal{S}\subset\mathcal{R}$ *(vezi Teorema 6.1.6).*

3. $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ *este închisă în raport cu* $((\varepsilon\mathcal{L})\cap(\varepsilon\mathcal{R}))$*-subobiecte şi* $((\varepsilon\mathcal{L})\cap(\varepsilon\mathcal{R}))$*-factorobiecte:* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})\in\mathbb{A}^s_f((\varepsilon\mathcal{L})\cap(\varepsilon\mathcal{R}))$. $\uparrow$

10.4.3. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$, *şi* $\Gamma_0\subset\mathcal{R}$. *Atunci* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})=\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$.

2. $\rho(\mathcal{S},\Gamma_0)=\Pi$.

3. $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})=\rho(\mathcal{R},\mathcal{L})$, *pe când* $\mathcal{L}*_{sr}\mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{R}*_{sr}\mathcal{L}$ *sunt subcategorii difertie, în genere.*

4. $\rho(\mathcal{L},\mathcal{L})=\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

5. $\rho(\mathcal{L},\mathcal{C}_2\mathcal{V})=\mathcal{L}$.

6. $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}\Rightarrow\mathcal{R}\subset\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$.

10.4.4. Să examinăm unele condiţii suficiente ca subcategoria $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ să fie reflectivă.

Teoremă. *Fie* $\mathcal{L},\mathcal{R}\in\mathbb{R},\mathcal{R}\subset\mathcal{L},\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$ *şi* $l(\mathcal{M}_f)\subset\mathcal{I}'(\mathcal{R})$. *Atunci* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ *este o subcategorie* $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$*-reflectivă şi* $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})\in\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\downarrow$ Menţionăm, odată ce $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$, rezultă că $\mathcal{R}\subset\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$. Mai departe, odată ce $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$, deducem că $\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})$ este închisă în raport cu produsele (Teorema 10.4.2 p.2). Fie $A\in\left|\rho(\mathcal{L},\mathcal{R})\right|, m: X\to A\in\mathcal{M}_f$, iar $r^X: X\to rX$, $l^X: X\to lX$ şi $r^{lX}: lX\to rlX$ sunt replicile obiectelor respective. Deoarece $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ rezultă că

$$r^X = r^{lX}\cdot l^X. \tag{1}$$

Avem următoarele egalităţi:

$$l^A\cdot m = l(m)\cdot l^X, \tag{2}$$

$$r^A\cdot m = r(m)\cdot r^X. \tag{3}$$

Aşadar

$$l(m)\cdot l^X = (\text{din}(2)) = l^A\cdot m = r^A\cdot m = (\text{din}(3)) = r(m)\cdot r^X = (\text{din}(1)) = r(m)\cdot r^{lX}\cdot l^X,$$

i.e.

$$l(m)\cdot l^X = r(m)\cdot r^{lX}\cdot l^X. \tag{4}$$

Ţinând cont că $l^X \in \mathcal{E}pi$, deducem că

$$l(m) = r(m) \cdot r^{lX}. \tag{5}$$

În baza ipotezei $m \in \mathcal{M}_f$. Deci $l(m) \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Astfel din (5) rezultă că $r^{lX} \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Definitiv $r^{lX} \in \mathcal{P}'(\mathcal{R}) \cap \mathcal{I}'(\mathcal{R}) = \mathcal{I}so$, iar $l^X \sim r^X$.

Am demonstrat că $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă şi $\mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. Deci $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$-reflectivă.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dr, "r^X"] \arrow[dd, "m"'] & & lX \arrow[dl, "r^{lX}"'] \arrow[dd, dashed, "l(m)"] \\
& rX=rlX \arrow[dr, dashed, "r(m)"] & \\
A \arrow[rr, "l^A = r^A"] & & lA=rA
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.1

Conform Teoremei 10.4.2 subcategoria $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este închisă în raport cu $((\varepsilon\mathcal{L}) \cap (\varepsilon\mathcal{R}))$-subobiecte. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, apoi $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Astfel $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte (Teorema 10.4.2 p.4).$\uparrow$

10.4.5. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este o subcategorie $\mathcal{P}''(\mathcal{R})$-reflectivă, $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.* $\uparrow$

10.4.6. Interpretăm schematic acest caz.

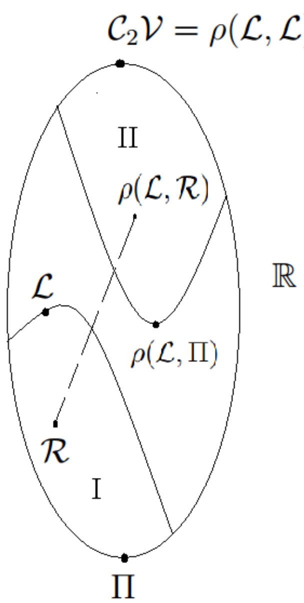


Figura 10.4.2

Fie că $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{R}$ aparţine domeniului I. Atunci $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ aparţine domeniului II.

10.4.7. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ exact la stânga. Atunci:*

1. $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă.

2. $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{U})$, unde $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in \Big|\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})\Big|$, şi $m : X \to A \in \mathcal{M}_f$. Examinăm $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$-replicile obiectelor X şi A. Avem următoarele egalităţi:

$$l^A \cdot m = l(m) \cdot l^X, \tag{1}$$

$$r^A \cdot m = r(m) \cdot r^X. \tag{2}$$

Deoarece $l^A = r^A$, din aceste egalităţi rezultă egalitatea

$$l(m) \cdot l^X = r(m) \cdot r^X. \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, "l^X"] \arrow[dd, "m"'] & & rX \arrow[dd, dashed, "r(m)"] \\
& lX \arrow[ur, dashed, "t^X"] \arrow[dr, dashed, "l(m)"] & \\
A \arrow[rr, "l^A = r^A"] & & lA = rA
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.3

În egalitatea (3) figurează $l^X, r^X \in \mathcal{E}pi$, şi $l(m), r(m) \in \mathcal{M}_f$. Deci există un izomorfism $t^X : lX \to rX$ astfel încât

$$r^X = t^X \cdot l^X, \tag{4}$$

$$l(m) = r(m) \cdot t^X. \tag{5}$$

Am demonstrat că $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă.

2. Deoarece $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, rezultă că $\varepsilon\mathcal{T} \subset (\varepsilon\mathcal{L}) \cap (\varepsilon\mathcal{R})$. Rămâne de apelat la Teorema 10.4.2. p. 3-4.$\uparrow$

10.4.8. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{V} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$. Atunci:*

1. $\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{V})$.

2. Orice $(\varepsilon\mathcal{V})$-factorobiect al obiectelor din $\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V})$ este şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiect.

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, v^X : X \to vX$ $\mathcal{V}$-replica lui X şi $r^{vX} : vX \to rvX$ $\mathcal{R}$-replica lui vX. Mai departe, fie

$$r^{vX} \cdot v^X = b^X \cdot t^X \tag{1}$$

$((\varepsilon\mathcal{L})^{\top}, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizarea morfismului $r^{vX} \cdot v^X$. Să probăm că t^X este $\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V})$-replica lui X. Fie $A \in |\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V})|, f : X \to A$ şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Atunci $l^A = v^A$ şi deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, rezultă că $lA \in |\mathcal{R}|$. Astfel morfismul $l^A \cdot f$ se extinde prin v^X, care la rândul său se extinde prin r^{vX} :

$$l^A \cdot f = g \cdot r^{vX} \cdot v^X. \tag{1}$$

Avem

$$(g \cdot b^X) \cdot t^X = l^A \cdot f. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v^X"] \arrow[dr, "t^X"'] \arrow[dd, "f"'] & vX \arrow[r, "r^{vX}"] & rvX \arrow[dd, dashed, "g"] \\
 & tX \arrow[ur, "b^X"'] \arrow[dl, dashed, "h"] & \\
A \arrow[rr, "l^A = v^A"] & & lA = vA
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.4

cu $t^X \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\top}$ şi $l^A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $t^X \perp l^A$ şi

$$f = h \cdot t^A, \tag{3}$$

$$g \cdot b^X = l^A \cdot h \tag{4}$$

pentru un h. Astfel f se extinde prin t^X, care este un $\mathcal{E}pi$.

$\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (Teorema 10.4.8).

$\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{V})$. Fie $A \in |\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V})|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{V}$ şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Atunci $l^A = v^A$ şi

$$l^A = f \cdot b \tag{5}$$

pentru un f, unde $f \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece $lA \in |\mathcal{R}|$, rezultă că $X \in |\mathcal{R}|$ şi f este $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{V}$-replica lui X. Deci $X \in |\mathcal{R} \cap \rho(\mathcal{L}, \mathcal{V})|$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "b \in \varepsilon \mathrm{V}"] \arrow[dr, "l^A = v^A"'] & & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\
 & lA = vA &
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.5

2. Din egalitatea (2) rezultă că $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. $\uparrow$

10.4.9. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $\rho(\mathcal{L}, \Pi) = \Pi$.*

2. $\rho(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

10.4.10. Grupoidul $\mathbb{R}_c$. Fie $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1),\ (\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2) \in \mathbb{P}_c,\ \mathcal{B}_1 = \varepsilon\mathcal{L}_1,\ \mathcal{B}_2 = \varepsilon\mathcal{L}_2,\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2,\ \mathcal{T} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2,\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2,\ \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$ şi $\mathcal{P} = \rho(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$.

Teoremă. *1. $\mathcal{P}$ este o subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă.*

2. Fie $t^X = b^X \cdot p^X$ $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea $\mathcal{T}$-replicii $t^X : X \to tX$ obiectului X. Atunci p^X este $\mathcal{P}$-replica obiectului X.

3. $\mathcal{P} = \mathcal{K} *_d \mathcal{T}$. În particular, $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}, (\mathcal{K}, \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi $\mathcal{P} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$.

4. $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ şi $\mathcal{P} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{T})$.

5. $k(\mathcal{P}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{P}$. În particular, $k(\mathcal{P})$ este o subcategorie corecflectivă a categoriei $\mathcal{P}$.

6. $(k(\mathcal{P}), \mathcal{T})$ este o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{P}$.

7. Functorii k şi p comută: $k \cdot p = p \cdot k$. $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ este o teorie de torsiune relativă de dreapta (TTRD) şi $(\mathcal{K} *_s \mathcal{P}, \mathcal{P})$ este o teorie de torsiune relativă (TTR).

$\downarrow$ 1. Deoarece subcategoriile $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ sunt $\mathcal{E}_u$-reflective, functorii reflectori comută cu produsele (Teorema 6.1.6). Astfel subcategoria $\mathcal{P}$ este închisă în raport cu produsele. Să verificăm, că $\mathcal{P}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_p$-subobiecte.

Fie $A \in |\mathcal{P}|, m : X \to A \in \mathcal{M}_p$ şi examinăm $\mathcal{L}_1$- şi $\mathcal{L}_2$-replicile obiectelor X şi A. Avem

$$t^X = b^X \cdot p^X \tag{1}$$

$$l_1^A \cdot m = l_1(m) \cdot l_1^X, \tag{2}$$

$$l_2^A \cdot m = l_2(m) \cdot l_2^X, \tag{3}$$

Deoarece $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}_c$, apoi $l_1(m), l_2(m) \in \mathcal{M}_p$ şi $l_1^X, l_2^X \in \mathcal{E}_u$. Ţinând cont că

$$l_1(m) \cdot l_1^X = l_2(m) \cdot l_2^X, \tag{4}$$

deducem, că $l_1X \sim l_2X$. Astfel $X \in |\mathcal{P}|$ şi $\mathcal{P}$ este $\mathcal{E}_u$-reflectivă.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "l_1^X"] \arrow[dd, "l_2^X"'] & & A \arrow[dd, "l_1^A = l_2^A"] \\
& l_1X \arrow[dr, "l_1(m)"] & \\
l_2X \arrow[rr, "l_2(m)"] & & l_1A = l_2A
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.6

2. Fie $p^X : X \to pX$. Atunci $pX \in |\rho(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|$, deoarece $tX \in |\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2|$ şi $b^X \in \mathcal{B}$. Să vedem cum un morfism $f : X \to A$, cu $A \in |\mathcal{P}|$ se extinde prin p^X. Morfismul $t^A \cdot f$ se extinde prin t^X :

$$t^A \cdot f = g \cdot t^X, \tag{5}$$

sau

$$b^A \cdot f = g \cdot b^X \cdot p^X \tag{6}$$

pentru un g, unde $p^X = \mathcal{B}^\top$ şi $b^A \in \mathcal{B}$. Deoarece $p^X \perp b^A$ avem

$$f = h \cdot p^X, \tag{7}$$

$$g \cdot b^X = b^A \cdot h \tag{8}$$

pentru un h. Unicitatea extinderii rezultă din faptul că p^X este un *epi* ($t^X \in \mathcal{E}pi, b^X \in \mathcal{M}_u$ şi clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p^X"] \arrow[rr, bend left, "t^X"] \arrow[dr, "f"'] & pX \arrow[r, "b^X"] \arrow[d, dashed, "h"'] & tX \arrow[d, dashed, "g"] \\
 & A \arrow[r, "b^A = t^A"] & tA
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.7

3. Pentru obiectul $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm $\mathcal{K}_1$,- $\mathcal{K}_2$- şi $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplicile lui. Deoarece $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ avem următoarele egalităţi:

$$k_1^X \cdot m^{k_1X} = k_2^X \cdot m^{k_2X} = m^X. \tag{9}$$

Fie

$$f_1^X \cdot m^{k_1X} = f_2^X \cdot m^{k_2X} \tag{10}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele m^{k_1X} şi m^{k_2X}. Acest morfism din egalitatea (10) îl vom nota d^X. Atunci

$$k_1^X = u^X \cdot f_1^X, \tag{11}$$

$$k_2^X = u^X \cdot f_2^X \qquad (11)$$

pentru un morfism u^X.

$$
\begin{tikzcd}
 & mX \arrow[dl, "m^{k_1X}"'] \arrow[dr, "m^{k_2X}"] \arrow[d, dashed, "d^X"] \arrow[dd, bend right, "m^X"'] & \\
k_1X \arrow[r, dashed, "f_1^X"] \arrow[dr, "k_1^X"'] & uX \arrow[d, dashed, "u^X"] & k_2X \arrow[l, dashed, "f_2^X"'] \arrow[dl, "k_2^X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
$$

Figura 10.4.8

Egalitatea

$$m^X = u^X \cdot d^X \tag{13}$$

este $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea morfismului m^X. Din egalităţile (4) şi (5) rezultă că $u^X \in \mathcal{B}$. Să verificăm că $d^X \perp \mathcal{B}$. Fie $b : A \to B \in \mathcal{B}$ şi

$$b \cdot v = w \cdot d^X. \tag{14}$$

Deoarece $b \in \mathcal{B} = (\varepsilon\mathcal{L}_2) \cap (\varepsilon\mathcal{L}_2) = (\mu\mathcal{K}_1) \cap (\mu\mathcal{K}_2)$, apoi

$$w \cdot f_1^X = b \cdot h_1 \tag{15}$$

pentru un h_1. Din aceleaşi considerente

$$w \cdot f_2^X = b \cdot h_2 \tag{16}$$

pentru un h_2. Avem

$$b \cdot h_1 \cdot m^{k_1X} = (\text{din } (15)) = w \cdot f_1^X \cdot m^{k_1X} = (\text{din } (10)) = w \cdot f_2^X \cdot m^{k_2X} = (\text{din } (16)) = b \cdot h_2 \cdot m^{k_2X}$$

i.e.

$$b \cdot h_1 \cdot m^{k_1X} = b \cdot h_2 \cdot m^{k_2X}, \tag{17}$$

sau

$$h_1 \cdot m^{k_1X} = h_2 \cdot m^{k_2X}. \tag{18}$$

Deoarece (1) este un pătrat cocartezian conchidem:

$$h_1 = h \cdot f_1^X, \tag{19}$$

$$h_2 = h \cdot f_2^X \tag{20}$$

pentru un h. Atunci

$$b \cdot h \cdot f_1^X \cdot m^{k_1 X} = (\text{din } (19)) = b \cdot h_1 \cdot m^{k_1 X} = (\text{din } (15)) = w \cdot f_1^X \cdot m^{k_1 X},$$

$$b \cdot h \cdot f_1^X \cdot m^{k_1 X} = w \cdot f_1^X \cdot m^{k_1 X} \tag{21}$$

şi deoarece $f_1^X \cdot m^{k_1 X} \in \mathcal{E}pi$, deducem că

$$b \cdot h = w. \tag{22}$$

Aceasta demonstrează că $d^X \perp b$.

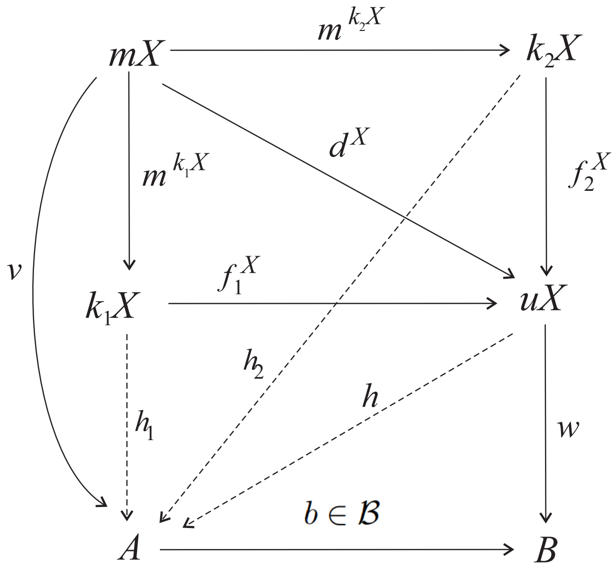


Figura 10.4.9

Astfel factorizarea functorului reflector $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ după o structură de factorizare de stânga $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$ ne conduce la o subcategorie coreflectivă $\mathcal{U} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}^\top}(\tilde{\mathcal{M}})$. Se verifică uşor că $u^X : uX \to X$ este $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}^\top}(\tilde{\mathcal{M}})$-coreplica obiectului X şi faptul că $\mathcal{U} = \sup(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ în clasa subcategoriilor coreflective. Astfel $\mathcal{U} = \mathcal{K}$.

Să verificăm egalitatea $\mathcal{P} = \mathcal{U} *_d \mathcal{T}$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ fie $u^X : uX \to X$ şi $u^{tX} : utX \to tX$ $\mathcal{U}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$t^X \cdot u^X = u^{tX} \cdot u(t^X), \tag{23}$$

sau

$$b^X \cdot p^X \cdot u^X = u^{tX} \cdot u(t^X). \tag{24}$$

Fie

$$u^X \cdot v^X = f^X \cdot u(t^X) \tag{25}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele u^X şi $u(t^X)$, unde $v^X : X \to vX$. Atunci

$$t^X = h^X \cdot v^X, \tag{26}$$

$$u^{tX} = h^X \cdot f^X. \tag{27}$$

Deoarece $u^{tX} \in \mathcal{B}$ şi $h^X \in \mathcal{E}pi$, deducem că $h^X \in \mathcal{B}$. Mai departe, din egalitatea (23) deducem că $u(t^X) \in \mathcal{E}pi$. Luând în consideraţie că $\mathcal{U} = \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$ şi faptul că $u(t^X) \in \mathcal{E}pi$, se verifică uşor că $u(t^X) \in \mathcal{B}^{\llcorner}$. Astfel egalitatea (1) şi egalitatea (26) sunt două $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizări ale morfismului t^X şi factor obiectele p^X şi v^X sunt izomorfe.

$$\begin{tikzcd}
uX \arrow[rr, "u(t^X)"] \arrow[dd, "u^X"'] & & utX \arrow[dl, "f^X"'] \arrow[dd, "u^{tX}"] \\
& vX \arrow[dr, "h^X"] & \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[r, "p^X"] \arrow[rr, bend right, "t^X"'] & pX \arrow[r, "b^X"] & tX
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.10

Să verificăm egalitatea $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$.

$\mathcal{B} \subset \mu\mathcal{K}$. Fie $b : A \to B \in \mathcal{B}$ şi $m^A : mA \to A$ $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui A. Atunci $b \cdot m^A$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui B.

Dacă

$$m^A = b^X \cdot d^X \tag{28}$$

este $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea lui m^A, atunci

$$m^B = (b \cdot b^X) \cdot d^X \tag{29}$$

este factorizarea lui m^B. Astfel

$$k^B = b \cdot b^X \tag{30}$$

şi $b \in \mu\mathcal{K}$.

$\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$. Evident.

$\varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{B}$. Menţionăm că $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \mathcal{B}_1^\perp \circ \mathcal{B}_2^\perp) = (\mathcal{B}, \mathcal{B}_2^\perp \circ \mathcal{B}_1^\perp)$ şi $\mathcal{L}$-replica obiectului X se obţine prin $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp)$-factorizarea $\mathcal{S}$-replicii $s^X : X \to sX$ sau a Π-replicii $\pi^X : X \to \pi X$ a obiectului X.

$(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. Deoarece $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$.

$\mathcal{P} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. Deoarece $\mathcal{P}$-replica obiectului X se obţine prin $(\mathcal{B}^{\perp}, \mathcal{B})$-factorizarea $\mathcal{T}$-replicii obiectului X.

4. $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi $b : X \to A \in \mathcal{B}$.

Atunci

$$t^A \cdot b = t(b) \cdot t^X. \tag{31}$$

Deoarece $t^A, b \in \mathcal{B}$ din (31) rezultă că $t^X \in \mathcal{B}$. Deci $X \in |\mathcal{P}|$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b \in \mathcal{B}"] \arrow[d, "t^X"'] & A \arrow[d, "t^A"] \\
tX \arrow[r, "t(b)"] & tA
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.11

$\mathcal{P} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi $b : A \to X \in \mathcal{P}$. Dacă $l_1^X : A \to l_1 A$ este $\mathcal{L}_1$-replica lui A, atunci

$$l_1^A = u \cdot b, \tag{32}$$

$$t^A = v \cdot l_1^A. \tag{33}$$

Din (33) rezultă că $v, l_1^A \in \mathcal{B}$ şi din (32), că $u \in \mathcal{B}$. Atunci $v \cdot u$ este $\mathcal{T}$-replica lui X şi $v \cdot u \in \mathcal{B}$. Deci $X \in |\mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "b \in \mathcal{B}"] \arrow[dr, "l_1^A"] \arrow[dd, "\mathcal{B} \ni t^A"'] & & X \arrow[dl, "u"'] \\
& l_1 A \arrow[dl, "v"] & \\
tX & &
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.12

$\mathcal{P} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi $u : A \to X \in \varepsilon\mathcal{T}$. Atunci

$$t^A = v \cdot u \tag{34}$$

pentru un v. Deoarece $t^A \in \mathcal{B}$ şi $u \in \mathcal{E}pi$, deducem că $u \in \mathcal{B}$. Deci $v \in \mathcal{B}$ şi v este $\mathcal{T}$-replica lui X şi $X \in |\mathcal{P}|$.

5. $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{P}$. Fie $A \in |k(\mathcal{P})|$. Atunci există un obiect $X \in |\mathcal{P}|$ astfel încât $A = kX$ şi $k^A \in \mathcal{B}$. Deoarece $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$, deducem că $A \in |\mathcal{P}|$. Astfel $A \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{P}|$.

$\mathcal{K} \cap \mathcal{P} \subset k(\mathcal{P})$. Evident.

6. Să verificăm egalitatea $\mu k(\mathcal{P}) = \varepsilon\mathcal{T}$, unde ambele clase se construiesc în categoria $\mathcal{P}$. Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi

$$k^A = b \cdot f \tag{35}$$

cu $b \in \mathcal{M}ono$. Atunci $b \in \mu\mathcal{K} = \mathcal{B}$ şi de asemenea $f \in \mathcal{B}$. Astfel $X \in |\mathcal{P}|$.

$$\begin{tikzcd} kA \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "k^A"] & X \arrow[r, "b"] & A \end{tikzcd}$$

Figura 10.4.13

Fie acum $A \in |\mathcal{P}|$ şi

$$t^A = f \cdot b \tag{36}$$

cu $b \in \mathcal{E}pi$. Deoarece $t^A \in \mathcal{B}$, rezultă că $b \in \mathcal{B}$ şi atunci $X \in |\mathcal{P}|$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend left, "t^A"] & X \arrow[r, "f"] & tA \end{tikzcd}$$

Figura 10.4.14

$\mu k(\mathcal{P}) \subset \varepsilon\mathcal{T}$ (în categoria $\mathcal{P}$). Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi

$$k^A = b \cdot f \tag{37}$$

cu $b : X \to A \in \mathcal{M}ono\ \mathcal{P}$. Deoarece $\mathcal{M}ono\ \mathcal{P} \subset \mathcal{M}ono\ \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ rezultă că $b, f \in \mathcal{B}$ şi $X \in |\mathcal{P}|$ (conform p.4) şi $t^A \cdot b$ este $\mathcal{T}$-replica lui X :

$$\begin{tikzcd} kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[r, "t^A"] & tA \\ & X \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "t^X"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 10.4.15

$$t^X = t^A \cdot b \tag{38}$$

cu $b \in \mathcal{E}pi$. Deci $b \in \varepsilon\mathcal{T}$.

$\varepsilon\mathcal{T} \subset \mu k(\mathcal{P})$ (în categoria $\mathcal{P}$). Fie $A \in |\mathcal{P}|$ şi $b \in \mathcal{E}pi\ \mathcal{P}$. Deoarece $\mathcal{E}pi\ \mathcal{P} \subset \mathcal{E}pi\ \mathcal{C}_2\mathcal{V}$,

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[drr, "k^X"'] & A \arrow[r, "t^A"] \arrow[dr, "b"] & tA \\
 & & X \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.16

rezultă că $b, f \in \mathcal{B}$ şi $X \in |\mathcal{P}|$. Astfel

$$k^X = b \cdot k^A \tag{39}$$

cu $b \in \mathcal{M}ono\ \mathcal{P}$. Deci $b \in \mu k(\mathcal{P})$.

7. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Avem următoarea diagramă comutativă.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(t^X)"] \arrow[d, "k^X"'] & & ktX \arrow[dl, "f^X = k^{pX}"'] \arrow[d, "k^{tX}"] \\
X \arrow[r, "p^X"] & pX \arrow[r, "b^X"] & tX
\end{tikzcd}$$

Figura 10.4.17

Deoarece $b^X \in \mathcal{B}$, rezultă că f^X este $\mathcal{K}$-coreplica lui pX. Deci $kpX = ktX$. Mai departe, $k^X \in \mathcal{B}$, deci $tkX = tX$. $k(t^X) \in \mathcal{E}pi$ şi orice epi al subcategoriei $\mathcal{K}$ este ortogonal de sus cu $\mathcal{B}$. Astfel

$$k^{tX} \cdot k(t^X) = t^{kX} \tag{40}$$

este $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorizarea lui t^{kX}, sau $ktX = pkX$. Am demonstrat că $k \cdot p = p \cdot k$.

Egalitatea

$$p^X \cdot k^X = k^{pX} \cdot p^{kX} \tag{41}$$

este un pătrat cocartezian. Asta şi indică că $(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ este o TTRD (vezi 11.4).

Functorul coreflector $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_s \mathcal{P}$ şi cel reflector $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{P}$ comută şi $(\mathcal{K} *_s \mathcal{P}, \mathcal{P})$ este o TTR (vezi 11.4.4).$\uparrow$

10.4.11. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă. Notăm $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \{\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic | \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\}$. Clasa $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ conţine elementul $\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{S}$. Fie $\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) = \cap\{\mathcal{B} | \mathcal{B} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})\}$.

Atunci $\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{B}ic$ şi $(\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}), \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})^{\perp})$-factorizarea morfismului $s^X : X \to sX$, unde $\mathcal{S}$ este subcategoria spaţiilor cu topologie slabă, ne conduce la subcategoria c-reflectivă $\bar{\mathcal{R}}_c$, cea mai mare subcategoria c-reflectivă, ce se conţine în subcategoria $\mathcal{R}$ (vezi 9.2.1).

Să revenim la subcategoria $\mathcal{P} = \rho(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ cu $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}_c$. Atunci $\bar{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}_c$ vom defini următoarea operaţie binară în clasa $\mathbb{R}_c$:

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \bar{\mathcal{P}}_c.$$

Astfel $\mathbb{R}_c$ este un grupoid. Să examinăm proprietăţile lui.

10.4.12. Propoziţie. 1. Operaţia $\oplus$ este comutativă: $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_1$.

2. $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este elementul neutru în grupoidul $\mathbb{R}_c$.

$$\rho(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{L}) = \mathcal{L},\ \mathcal{C}_2\mathcal{V} \oplus \mathcal{L} = \mathcal{L}.$$

3. Orice element $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ coincide cu simetricul său:

$$\rho(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{L} \oplus \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}. \uparrow$$

Capitolul 11. Produse de subcategorii

11.1. Produsul de dreapta a două subcategorii

11.1.1. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă, iar $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica, $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X, iar $k^{rX} : krX \to rX$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rX. Atunci

$$r^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot k(r^X). \tag{1}$$

Pe morfismele k^X şi $k(r^X)$ construim pătratul cocartezian

$$v^X \cdot k^X = g^X \cdot k(r^X) \tag{2}$$

Atunci

$$r^X = u^X \cdot v^X, \tag{3}$$

$$k^{rX} = u^X \cdot g^X \tag{4}$$

pentru un morfism $u^X : vX \to rX$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, dashed, "k(r^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & krX \arrow[dl, dashed, "g^X"'] \arrow[dd, "k^{rX}"] \\
& vX \arrow[dr, dashed, "u^X"] & \\
X \arrow[ur, dashed, "v^X"] \arrow[rr, "r^X"] & & rX
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.1.

11.1.2. Stabilim notaţiile construcţiei duale. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru un obiect arbitrar X a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica, iar $r^X : X \to rX$ şi $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Atunci

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX} \tag{1}$$

Pe morfismele r^X şi $r(k^X)$ construim pătratul cartezian

$$r^X \cdot w^X = r(k^X) \cdot f^X. \tag{2}$$

Atunci

$$k^X = w^X \cdot t^X, \tag{3}$$

$$r^{kX} = f^X \cdot t^X \tag{4}$$

pentru un morfism $t^X : kX \to wX$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "r^{kX}"] \arrow[dd, "k^X"'] \arrow[dr, dashed, "t^X"] & & rkX \arrow[dd, dashed, "r(k^X)"] \\
& wX \arrow[ur, dashed, "f^X"] \arrow[dl, dashed, "w^X"] & \\
X \arrow[rr, "r^X"] & & rX
\end{tikzcd}$$

Diagrama 11.1.2

11.1.3. Lemă. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. g^X *şi* u^X *aparţin clasei* $\mu\mathcal{K}$.

2. g^X *este* $\mathcal{K}$*-coreplica obiectului* $vX : g^X = k^{vX}$.

3. $r^X = u^X \cdot v^X$ *este* $((\mu\mathcal{K})^{\perp}, \mu\mathcal{K})$*-factorizarea morfismului respectiv.*

$\downarrow$ 1. În pătratul cocartezian

$$v^X \cdot k^X = g^X \cdot k(r^X) \tag{1}$$

$k^X \in \mathcal{E}_u$. Deci şi $g^X \in \mathcal{E}_u$, şi din egalitatea

$$u^X \cdot g^X = k^{rX}, \tag{2}$$

deoarece $k^{rX} \in \mathcal{M}ono$, rezultă că $g^X \in \mathcal{M}ono$.

Mai departe, $k^{rX} \in \mathcal{E}_u$. Din egalitatea (2) rezultă că $u^X \in \mathcal{E}_u$. Deoarece clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară, din egalitatea (2) rezultă că $u^X \in \mathcal{M}ono$. Deci $u^X \in \mu\mathcal{K}$.

2. Rezultă din faptul că k^{rX} este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rX, iar în egalitatea (2) u^X este un mono.

3. Rămâne de arătat că $v^X \perp \mu\mathcal{K}$. Fie $b : A \to B \in \mu\mathcal{K}$ şi

$$b \cdot f = g \cdot v^X. \tag{3}$$

Deoarece $b \in \mu\mathcal{K}$ şi $krX \in |\mathcal{K}|$ avem

$$g \cdot g^X = b \cdot f_1 \tag{4}$$

pentru un f_1. Astfel

$$b \cdot f_1 \cdot k(r^X) = (\text{din}(4)) = g \cdot g^X \cdot k(r^X) = (\text{din}(1)) = g \cdot v^X \cdot k^X = (\text{din}(3)) = b \cdot f \cdot k^X,$$

i.e.

$$b \cdot f_1 \cdot k(r^X) = b \cdot f \cdot k^X, \tag{5}$$

sau

$$f_1 \cdot k(r^X) = f \cdot k^X \tag{6}$$

şi deoarece (1) este un pătrat cocartezian

$$f = f_2 \cdot v^X, \tag{7}$$

$$f_1 = f_2 \cdot g^X. \tag{8}$$

pentru un f_2. Mai departe,

$$b \cdot f_2 \cdot g^X = (\text{din}(8)) = b \cdot f_1 = (\text{din}(4)) = g \cdot g^X,$$

i.e.

$$b \cdot f_2 \cdot g^X = g \cdot g^X, \tag{9}$$

sau

$$b \cdot f_2 = g. \tag{10}$$

Egalităţile (7) şi (10) demonstrează că $v^X \perp \mu\mathcal{K}$. $\uparrow$

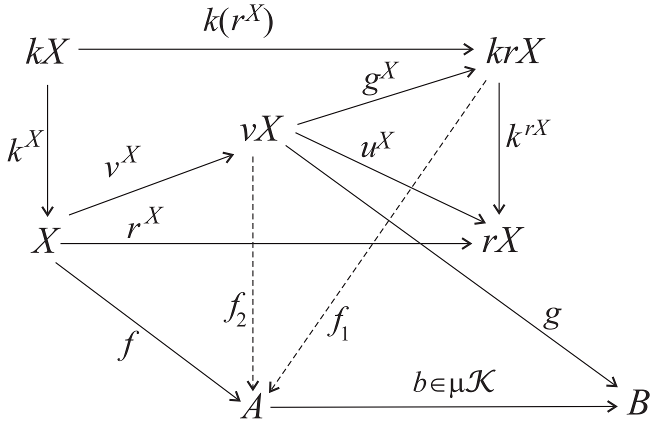


Diagrama 11.1.3

11.1.3*. Lemă. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $f^X, t^X \in \varepsilon\mathcal{R}$.

2. f^X *este* $\mathcal{R}$*-replica obiectului* $wX : f^X = r^{kX}$.

3. $k^X = w^X \cdot t^X$ *este* $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^\perp)$*-factorizarea morfismului respectiv.* $\uparrow$

11.1.4. Definiţie. *1. Subcategoria* $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$ *se numeşte produsul de dreapta al subcategoriilor* $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{R}$ *şi se notează* $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

Diagrama 11.1.1 se numeşte diagrama produsului de dreapta (diagrama (PD)) construită pentru obiectul X.

1. Subcategoria* $\mathcal{W} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ *se numeşte produsul de stânga al subcategoriilor* $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{R}$ *şi se notează* $\mathcal{W} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$.

Diagrama 11.1.2 se numeşte diagrama produsului de stânga (diagrama (PS)) construită pentru obiectul X.

11.1.5. Lemă. *1.* $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

2. Fie $krA = kA$. *Atunci* $A \in |\mathcal{K} *_d \mathcal{R}|$. *În particular, dacă* $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, *atunci* $krA = kA$ *pentru orice* $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $r^A = 1$. Deci $k(r^A) = 1$ şi $v^A = 1$.

2. Dacă $krA = kA$, atunci $k(r^A) = 1$. Deci şi $v^A = 1$. $\uparrow$

11.1.5*. Lemă. *1.* $\mathcal{K} \subset \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$.

2. Fie $rkA = rA$. *Atunci* $A \in |\mathcal{K} *_s \mathcal{R}|$. *În particular, dacă* $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{R}$, *atunci* $rkA = rA$ *pentru orice* $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. $\uparrow$

11.1.6. Teoremă. $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ *este o subcategorie slab reflectivă şi* $v^X : X \to vX$ *este slab* $(\mathcal{K} *_d \mathcal{R})$*-replica lui* X. v^X *este* $(\mathcal{K} *_d \mathcal{R})$*-replica în următoarele cazuri:* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *sau* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

$\downarrow$ Fie $A \in \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$ şi $f : X \to A$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b : A \to Z \in \mu\mathcal{K}$. Atunci

$$r^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot k(r^X), \tag{1}$$

$$v^X \cdot k^X = g^X \cdot k(r^X). \tag{2}$$

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & krX \arrow[dd, "k^{rX}"] \arrow[dddl, dashed, "h"] \\
& vX \arrow[ur, "g^X"] \arrow[dr, "u^X"] \arrow[dd, dashed, "l"'] & \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, "f"'] & & rX \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "b\in\mu\mathcal{K}"] & Z
\end{tikzcd}
$$

Figura 11.1.4

Mai departe,

$$b \cdot f = g \cdot r^X \tag{3}$$

pentru un g. Deoarece $b \in \mu\mathcal{K}$ şi $krX \in |\mathcal{K}|$

$$g \cdot k^{rX} = b \cdot h \tag{4}$$

pentru un h. Avem

$$b \cdot f \cdot k^X = (\text{din}(3)) = g \cdot r^X \cdot k^X = g \cdot k^{rX} \cdot k(r^X) = (\text{din}(4)) = b \cdot h \cdot k(r^X),$$

i.e.

$$b \cdot f \cdot k^X = b \cdot h \cdot k(r^X), \tag{5}$$

$$f \cdot k^X = h \cdot k(r^X). \tag{6}$$

Deoarece (2) este pătrat cocartezian

$$f = l \cdot v^X \tag{7}$$

$$h = l \cdot g^X \tag{8}$$

pentru un l. Astfel am demonstrat că l exinde f prin v^X.

Fie $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Atunci în egalitatea

$$r^X = u^X \cdot v^X \tag{9}$$

$u^X, r^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci şi $v^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$.

Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. În egalitatea

$$k^{rX} = u^X \cdot f^X \tag{10}$$

$u^X \in \mathcal{M}_u$. Atunci din egalitatea (9) $v^X \in \mathcal{E}pi$. $\uparrow$

11.1.6*. Teoremă. *$\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ este o subcategorie slab coreflective şi $w^X : wX \to X$ este $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R})$-coreplica lui X. w^X este $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$-coreplica în următoarele cazuri: $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ sau $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.* $\uparrow$

11.1.7. Exemple. *Examinăm în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ subcategoria coreflectivă Σ a spaţiilor cu cea mai fină topologie local convexă şi subcategoria reflectivă Π a spaţiilor complete cu topologie slabă.*

1. Functorul $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma *_s \Pi$ nu este un functor coreflector.

2. Functorul $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma *_d \Pi$ nu este un functor reflector.

$\downarrow$ 1. Construim diagrama (PS) pentru un obiect arbitrar X ce nu aparţine subcategoriei Π.

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[rr, "\pi^{\sigma X}"] \arrow[dd, "\sigma^X"'] \arrow[dr, dashed, "t^X"] & & \pi\sigma X \arrow[dd, "\pi(\sigma^X)"] \\
& wX \arrow[ur, "f^X = \pi^{wX}"] \arrow[dl, dashed, "w^X"] & \\
X \arrow[rr, "\pi^X"] & & \pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.5

În egalitatea

$$\pi^X \cdot \sigma^X = \pi(\sigma^X) \cdot \pi^{\sigma X} \tag{1}$$

$\pi^X, \sigma^X \in \mathcal{E}pi$. Deci $\pi(\sigma^X) \cdot \pi^{\sigma X} \in \mathcal{E}pi$ şi $\pi(\sigma^X) \in \mathcal{E}pi$. Deoarece un epi al unui spaţiu din subcategoria Π în alt spaţiu al acestei subcategorii este retractibil, deducem că $\pi(\sigma^X)$, iar cu el şi w^X este o retracţie. Dacă w^X este un mono, el este un iso. Astfel obiectul X este izomorf cu $\pi\sigma X$, deoarece f^X este un bimorfism.

2. Construim diagrama (PD) pentru un obiect X ce nu aparţine subcategoriei Σ.

$$\begin{tikzcd}
\sigma X \arrow[rr, "\sigma(\pi^X)"] \arrow[dd, "\sigma^X"'] & & \sigma\pi X \arrow[dd, "\sigma^{\pi X}"] \arrow[dl, "g^X = \sigma^{vX}"'] \\
& vX \arrow[dr, dashed, "u^X"] & \\
X \arrow[rr, "\pi^X"] \arrow[ur, "v^X"] & & \pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.6

Deoarece π^X este un mono, rezultă că şi $\sigma(\pi^X)$ este la fel. Deci $\sigma(\pi^X)$ este secţionabil, iar cu el şi v^X este secţionabil. Fie v^X un epi. Atunci el este un iso. Astfel X este izomorf cu πX.

11.1.8. Să revenim la diagrama 11.1.1. Fie $r^{vX} : X \to rvX$ $\mathcal{R}$-replica lui X. Atunci:

$$u^X = p^X \cdot r^{vX}, \tag{1}$$

$$r^{vX} \cdot v^X = i^X \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un p^X şi un i^X.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & krX \arrow[dl, "k^{vX}"'] \arrow[dd, "k^{rX}"] & \\
& vX \arrow[rr, "r^{vX}"] \arrow[dr, dashed, "u^X"] & & rvX \arrow[dl, dashed, shift right, "p^X"'] \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "r^X"'] & & {} \arrow[ur, dashed, shift right, "i^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.7

Teorema. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă, $\mathcal{R}$ o subcategrie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. v^X este $\mathcal{V}$-replica obiectului X.

2. $k(r^X) \in \mathcal{E}pi$.

3. $v^X \in \mathcal{E}pi$.

4. $v^X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

5. u^X este $\mathcal{R}$-replica obiectului vX.

6. $u^X \in \mathcal{M}_u$.

7. $v^X, u^X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

8. $r^{vX} \in \mathcal{E}_u$.

9. $r^{vX} \in \mu\mathcal{K}$.

10. $p^X \in \mathcal{M}ono$.

11. $i^X \in \mathcal{E}pi$.

12. $X \in \mid \mathcal{V} \mid \Leftrightarrow r^X \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rX.

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. Fie

$$k(r^X) = i \cdot p \tag{3}$$

$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$-factorizarea morfismului respectiv, iar

$$p_1 \cdot k^X = k_1 \cdot p \tag{4}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele p şi k^X. Atunci

$$v^X = i_1 \cdot p_1, \tag{5}$$

$$k^{vX} \cdot i = i_1 \cdot k_1 \tag{6}$$

pentru un morfism $i_1 : P \to vX$, iar pătratul (6) este pătratul cocartezian construit pe morfismele k_1 şi i. Deoarece clasa $\mathcal{M}_f$ este stabilă la dreapta, rezultă că $i_1 \in \mathcal{M}_f$, iar din egalitatea (5) că $i_1 \in \mathcal{E}pi$. Deci $i_1 \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_f = \mathcal{I}so$. De asemenea $k^{vX} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ (Lema 11.1.5 p.1). Astfel k^{vX} şi i_1 sunt aplicaţii bijective şi putem scrie următoarea egalitate vectorială:

$$i = (k^{vX})^{-1} \cdot i_1 \cdot k_1. \tag{7}$$

Deci i este o aplicaţie surjectivă: $i : \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_f = \mathcal{I}so$, iar $k(r^X) \sim p \in \mathcal{E}pi$.

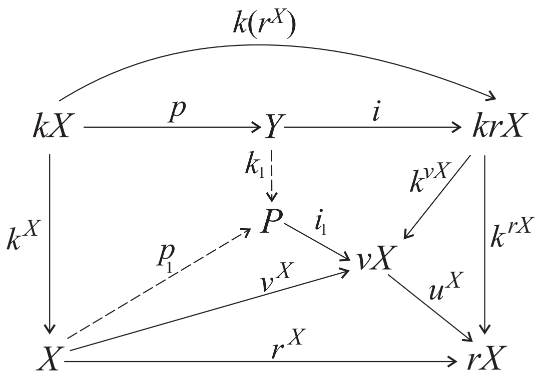


Figura 11.1.8

$2 \Rightarrow 3$. Rezultă din faptul că clasa $\mathcal{E}pi$ este stabilă la dreapta.

$3 \Rightarrow 4$. În egalitatea

$$r^X = u^X \cdot v^X \tag{8}$$

$r^X \in \mathcal{M}_u$. Deci şi $v^X \in \mathcal{M}_u$.

$4 \Rightarrow 5$. Evident.

$5 \Rightarrow 6$. În agalitatea (8) $r^X \in \mathcal{M}_u$ şi $v^X \in \mathcal{E}pi$, iar clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară.

$6 \Rightarrow 7$. În egalitatea (8) $u^X \in \mathcal{M}_u$ şi $r^X \in \mathcal{E}pi$. Deoarece clasa $\mathcal{E}pi$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară deducem că $v^X \in \mathcal{E}pi$.

$7 \Rightarrow 1$. Să demonstrăm în primul rând următoarea afirmaţie.

Fie $A \in\mid \mathcal{V} \mid$. Atunci $v^A \in \mathcal{I}so$.

Într-adevăr, fie $A = vX$. Atunci $u^X = r^A$, iar $k(r^A) \in \mathcal{I}so$. Deci şi $v^A \in \mathcal{I}so$.

Fie acum $A \in\mid \mathcal{V} \mid$, iar $f : X \to A$. În baza Teoremei 11.1.6 avem egalitatea

$$v^A \cdot f = v(f) \cdot v^X, \tag{9}$$

sau

$$f = (v^A)^{-1} \cdot v(f) \cdot v^X. \tag{10}$$

Unicitatea acestei extinderi rezultă din faptul că $v^X \in \mathcal{E}pi$.

7 $\Rightarrow$ 8. Odată ce $v^X \in \mathcal{E}pi$, rezultă că u^X este $\mathcal{R}$-replica obiectului vX : $r^{vX} = u^X$, şi $u^X \in \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u$.

8 $\Rightarrow$ 9. Din egalitatea (7) putem scrie următoarea egalitate de aplicaţii a spaţiilor vectoriale:

$$p^X = u^X \cdot (r^{vX})^{-1}. \tag{11}$$

Avem

$$p^X \cdot i^X \cdot r^X = (\mathrm{din}(2)) = p^X \cdot r^{vX} \cdot v^X = (\mathrm{din}(1)) = u^X \cdot v^X = (\mathrm{din}(8)) = r^X,$$

i.e.

$$p^X \cdot i^X \cdot r^X = r^X, \tag{12}$$

sau

$$p^X \cdot i^X = 1. \tag{13}$$

Deci $p^X \in \mathcal{R}et$, şi $p^X \in \mathcal{I}so$.

Atunci

$$k^{rX} = p^X \cdot r^{vX} \cdot k^{vX}. \tag{14}$$

Astfel $r^{vX} \in \mu\mathcal{K}$.

9 $\Rightarrow$ 10. Rezultă din cele expuse în demonstraţia 8 $\Rightarrow$ 9.

10 $\Rightarrow$ 11. Evident.

11 $\Rightarrow$ 12. Din ipoteză rezultă că $p^X, i^X \in \mathcal{I}so$. Astfel $r^{vX} \in \mu\mathcal{K}$, şi $r^{vX} \cdot k^{vX}$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rvX.

Reciproc. Fie $r^X \cdot k^X$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rX. Atunci $k(r^X) \in \mathcal{I}so$. Astfel $v^X \in \mathcal{I}so$. Adică $X \in\mid \mathcal{V} \mid$.

12 $\Rightarrow$ 1. Examinăm diagrama (PD). Deoarece $vX \in\mid \mathcal{V} \mid$, rezultă că $r^{vX} \cdot k^{vX}$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului rvX. Deci $r^{vX} \in \mu\mathcal{K}$, şi $p^X, i^X \in \mathcal{I}so$. Astfel $u^X \in \mathcal{M}_u$, şi $v^X \in \mathcal{E}pi$. Deci v^X este $\mathcal{V}$-replica obiectului X. $\uparrow$

11.1.9. Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Nu se ştie dacă în acest caz anume $v^X : X \to vX$ este $\mathcal{V}$-replica obiectului X (vezi Problema 11.1.23).

Definiţie. *Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi fie că pentru orice obiect $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ morfismul $v^X : X \to vX$ este $\mathcal{V}$-replica obiectului X. Atunci vom spune că functorul $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ este un functor reflector.*

11.1.10. Teoremă. *Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$, şi $\mathcal{M} = \mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ este un functor reflector.

2. $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$.

3. $\mid \mathcal{V} \mid = \{A \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid \mid kA = krA\}$.

4. $\mid \mathcal{V} \mid = \{A \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid \mid r^A \in \mu\mathcal{K}\}$.

$\downarrow$ $1 \Rightarrow 2$. Dacă v este un functor reflector, atunci pentru orice obiect $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ $u^X \in \mathcal{M}_u$ (Teorema 11.1.8 p.6). Însă $u^X \in \mu\mathcal{K}$ (Lema 11.1.5 p.1). Astfel $u^X : vX \to rX \in \mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R}$.

$2 \Rightarrow 3$. Fie $A \in \mid \mathcal{V} \mid$. Atunci $kA = krA$ în baza Lemei 11.1.5 p.2.

Reciproc. Fie $kA = krA$. Atunci $k(r^A) = 1$ şi $A \in \mid \mathcal{V} \mid$.

$3 \Rightarrow 4$. Fie $A \in \mid \mathcal{R} \mid$. Atunci $r^A = u^A \in \mu\mathcal{K}$ (Lema 11.1.5 p.2).

Reciproc. Fie $r^A \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $kA = krA$ şi $rA = 1$, deci şi $v^A = 1$.

$4 \Rightarrow 1$. Examinăm diagrama (PD) construită pentru un obiect arbitrar X şi fie $vX = A$, iar $r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica obiectului X.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & krX \arrow[dl, "k^{vX}"'] \arrow[dd, "k^{rX}"] & \\
& vX = A \arrow[rr, "r^A"] \arrow[dr, "u^X"] & & rA \arrow[dl, dashed, "p^X"'] \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "r^X"] & & rX \arrow[ur, dashed, bend right, "i^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.9

Există un morfism p^X astfel încât

$$u^X = p^X \cdot r^A. \tag{1}$$

De asemenea

$$r^A \cdot v^X = i^X \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un morfism i^X. Avem

$$p^X \cdot i^X \cdot r^X = (\text{din}(2)) = p^X \cdot r^A \cdot v^X = (\text{din}(1)) = u^X \cdot v^X = r^X,$$

sau

$$p^X \cdot i^X \cdot r^X = r^X, \tag{3}$$

Deci

$$p^X \cdot i^X = 1. \tag{4}$$

În egalitatea (1) u^X şi r^A sunt aplicaţii bijective, la fel este şi p^X. Atunci din (4) rezultă că $p^X, i^X \in \mathcal{I}so$ şi deci u^X este $\mathcal{R}$-replica obiectului vX. ↑

11.1.10*. Teoremă. *Fie $W = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi $\mathcal{M} = \mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ este un functor coreflector.

2. $\mathcal{W} = \mathcal{Q}_\mu(\mathcal{K})$.

3. $|\mathcal{V}| = \{A = |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|\ |rA = rkA\}$.

4. $|\mathcal{V}| = \{A = |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|\ |k^A \in \varepsilon\mathcal{R}.\}$.

11.1.11. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$. Atunci:*

1. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} \in \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{U})$.*

11.1.12. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_d \mathcal{R}$ pentru orice subcategorie coreflectivă $\mathcal{T}$ cu proprietatea $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$.

↓ 1 ⇒ 2. Examinăm diagrama (PD) construită pentru un obiect arbitrar X. Deoarece $u^X \in \mu\mathcal{K}$ (Lema 11.1.5 p.1), în baza ipotezei, deducem că $vX \in \mid \mathcal{R} \mid$. Deci u^X este un izomorfismm şi $\mathcal{V} = \mathcal{R}$.

2 ⇒ 1. Fie $A \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. Atunci

$$k^A = b \cdot k^X, \tag{1}$$

şi

$$b = f \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un morfism f. În baza ipotezei

$$r^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot k(r^X) \tag{3}$$

este un pătrat cocartezian, şi

$$k^A \cdot k(f) = f \cdot k^{rX}. \tag{4}$$

Avem

$$k^A \cdot k(f) \cdot k(r^X) = (\text{din}(4)) = f \cdot k^{rX} \cdot k(r^X) = (\text{din}(3)) = f \cdot r^X \cdot k^X =$$

$$= (\text{din}(2)) = b \cdot k^X = (\text{din}(1)) = k^A,$$

i.e.

$$k^A \cdot k(f) \cdot k(r^X) = k^A, \tag{5}$$

sau

$$k(f) \cdot k(r^X) = 1. \tag{6}$$

În plus $k(r^X)$ este un epi (Teorema 11.1.8 p.2). Deci $k(r^X) \in \mathcal{I}so$, iar cu el şi $r^X \in \mathcal{I}so$. Astfel am demonstrat că $X \in\mid \mathcal{R} \mid$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, shift left, "k(r^X)"] \arrow[d, "k^X"] \arrow[dd, bend right=40, "k^A"'] & krX \arrow[l, dashed, shift left, "k(f)"] \arrow[d, "k^{rX}"] \\
X \arrow[r, "r^X"] \arrow[d, "b"] & rX \arrow[dl, dashed, "f"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.10

1 $\Rightarrow$ 3. Dacă $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, atunci $\mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K}$. Din ipoteza 1 deducem că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{T})$. Deci $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_d \mathcal{R}$.

3 $\Rightarrow$ 1. Evident. $\uparrow$

11.1.13. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathbb{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_d \mathcal{R}$ *pentru orice subcategorie coreflectivă* $\mathcal{T}$ *cu proprietatea* $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$. $\uparrow$

11.1.14. Propoziţie. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

2. $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

3. $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Atunci $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$.

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. Fie $A \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica acestui obiect. Atunci $k^A \in \mu\mathcal{K}$. Deci $kA \in \mid \mathcal{R} \mid$.

$2 \Rightarrow 3$. Fie $A \in \mid \mathcal{K} \mid, r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica lui A, şi $k^{rA} : krA \to rA$ $\mathcal{K}$-coreplica lui rA. Deoarece $A \in \mid \mathcal{K} \mid$, există un morfism $f : A \to krA$ astfel încât

$$r^A = k^{rA} \cdot f. \tag{1}$$

În baza ipotezei $krA \in \mid \mathcal{R} \mid$. Astfel pentru morfismul f există un morfism $g : rA \to krA$ cu proprietatea

$$f = g \cdot r^A \tag{2}$$

Avem

$$k^{rA} \cdot g \cdot r^A = (\text{din}(2)) = k^{rA} \cdot f = (\text{din}(1)) = r^A$$

i.e.

$$k^{rA} \cdot g \cdot r^A = r^A, \tag{3}$$

sau

$$k^{rA} \cdot g = 1. \tag{4}$$

Deci

$$k^{rA} = g^{-1}. \tag{5}$$

şi $rA \in \mid \mathcal{K} \mid$.

$3 \Rightarrow 2$. Demonstraţie duală. $\uparrow$

11.1.15. Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ este un functor reflector. Pentru orice obiect $(E, t) \in \mid \mathcal{V} \mid$ $\mathcal{R}$-replica lui este o bijecţie (Teorema 11.1.7 p.8). Astfel $r(E, t) = (E, r(t))$. Cu alte cuvinte $\mathcal{R}$-replica modifică doar topologia pe spaţiul E.

Teoremă. *Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi functorul $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ este un functor reflector. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Subcategoria $\mathcal{V}$ este închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte: $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. În particular, $k(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

2. Subcategoria $\mathcal{V}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{R})$-factorobiecte: $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

3. Fie $(E, t) \in \mid \mathcal{V} \mid, (E, k(t))$ $\mathcal{K}$-coreplica, $(E, r(t))$ $\mathcal{R}$-replica lui, iar u o topologie local convexă pe spaţiul E cu proprietatea

$$r(t) \leq u \leq k(t).$$

Atunci $(E, u) \in \mid \mathcal{V} \mid$.

4. $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(k(\mathcal{R}))$.

5. $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R}) \Leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

6. Egalitatea $r^X = u^X \cdot v^X$ *este* $((\mu\mathcal{K})^\top, \mu\mathcal{K})$*-factorizarea lui* v^X.

$\downarrow$ 1. Fie $vX \in\mid \mathcal{V} \mid$, iar $b : Y \to vX \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $\mathcal{K}$-coreplicile obiectelor vX şi Y verifică egalitatea

$$k^{vX} = b \cdot k^Y. \tag{1}$$

Există un morfism $t : rY \to rX$ astfel încât

$$u^X \cdot b = t \cdot r^Y. \tag{2}$$

Mai avem egalităţile

$$t \cdot k^{rY} = k^{rX} \cdot k(t), \tag{3}$$

$$r^Y \cdot k^Y = k^{rY} \cdot k(r^Y), \tag{4}$$

$$u^Y \cdot k^{vX} = k^{rX}. \tag{5}$$

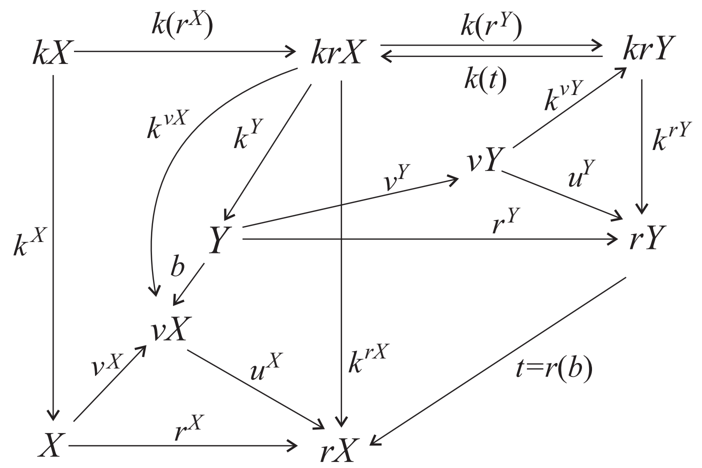


Figura 11.1.11

Avem

$$k^{rX} \cdot k(t) \cdot k(r^Y) = ((\text{din}(3))) = t \cdot k^{rY} \cdot k(r^Y) = (\text{din}(4)) = t \cdot r^Y \cdot k^Y = (\text{din}(2)) =$$

$$= u^X \cdot b \cdot k^Y = (\text{din}(1)) = u^X \cdot k^{vX} = (\text{din}(5)) = k^{rX},$$

i.e.

$$k^{rX} \cdot k(t) \cdot k(r^Y) = k^{rX}. \tag{6}$$

Deoarece $k^{rX} = \mathcal{E}pi$ obţinem

$$k(t) \cdot k(r^Y) = 1. \tag{7}$$

Astfel $k(r^Y) \in \mathcal{E}pi$, (Teorema 11.1.7) şi $k(r^Y) \in \mathcal{S}ec$, deci $k(r^Y) \in \mathcal{I}so$, iar cu el şi $v^Y \in \mathcal{I}so$.

2. Fie $vX \in |\mathcal{V}|$ şi $b : vX \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci

$$u^X = p \cdot b \tag{8}$$

pentru un p, deoarece u^X este $\mathcal{R}$-replica lui vX. În acest caz p este $\mathcal{R}$-replica lui Y. Mai departe,

$$u^X \cdot k^{vX} = k^{rX}, \tag{9}$$

$$p \cdot k^Y = k^{rX} \cdot k(b), \tag{10}$$

$$b \cdot k^{vX} = k^Y \cdot k(b). \tag{11}$$

Se verifică că $k(r^Y)$ şi $k(b)$ sunt reciproc inverse. Atunci $k(r^Y), v^Y \in \mathcal{I}so$.

3. Rezultă din p.1 şi 2.

4. Pentru orice obiect X $u^X \in \mu\mathcal{K}$. Astfel $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(k(\mathcal{R}))$.

5. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$. Pentru orice $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, v^X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $X \in |\mathcal{V}|$. Dacă $\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, atunci $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$.

6. Deoarece $u^X \in \mu\mathcal{K}$, rămâne de demonstrat că $v^X \in (\mu\mathcal{K})^\top$, adică $v^X \perp \mu\mathcal{K}$. Fie $b : A \to B \in \mu\mathcal{K}$ şi

$$b \cdot f = g \cdot v^X. \tag{12}$$

$k^A : kA \to A$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului A. Deci $b \cdot k^A : kA \to B$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului B. Astfel pentru morfismul $g \cdot k^{vX} : krX \to B$ există un morfism h cu proprietatea:

$$g \cdot k^{vX} = b \cdot k^A \cdot h. \tag{13}$$

Avem

$$b \cdot k^A \cdot h \cdot k(r^X) = (\text{din}(4)) = g \cdot k^{vX} \cdot k(r^X) = (\text{din}(2)\text{ p.1.1})$$
$$= g \cdot v^X \cdot k^X = (\text{din}(3)) = b \cdot f \cdot k^X,$$

i.e.

$$b \cdot k^A \cdot h \cdot k(r^X) = b \cdot f \cdot k^X \tag{14}$$

şi deoarece $b \in \mathcal{M}ono$, rezultă că

$$k^A \cdot h \cdot k(r^X) = f \cdot k^X. \tag{15}$$

Odată ce (2) este cocartezian deducem că

$$f = w \cdot v^X, \tag{16}$$

$$k^A \cdot h = w \cdot k^{vX} \tag{17}$$

pentru un morfism $w : vX \to A$. Egalitatea

$$g = b \cdot w \tag{18}$$

şi unicitatea diagonalei w rezultă din egalităţile (12) şi (16) şi faptul că $v^X \in \mathcal{E}pi$. $\uparrow$

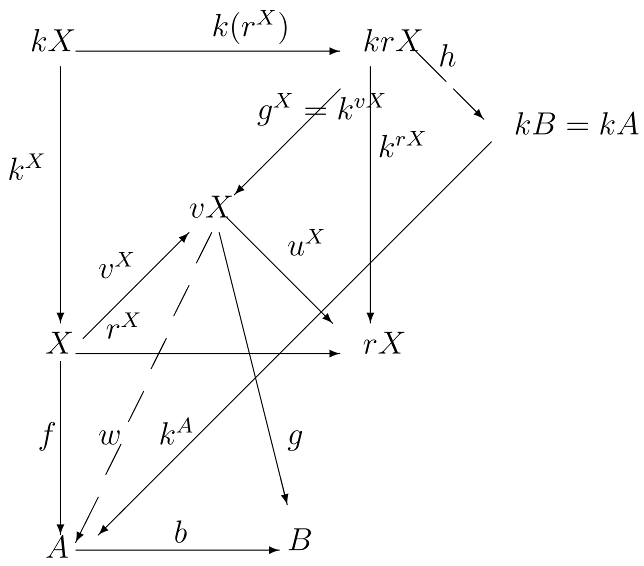


Figura 11.1.12

11.1.16. Teoremă. *Fie* $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$.

1. Dacă $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, *atunci* $\mathcal{T} *_s \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Fie că $\mathcal{T} \subsetneqq \mathcal{K}$, *iar* $\mathcal{W} = \mathcal{T} *_s \mathcal{L}$. *Atunci:*

a) Subcategoriile $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{L}$ *nu se conţin în subcategoria* $\mathcal{W}$;

b) $l \cdot w = w \cdot l = l \cdot t$;

c) $l(\mathcal{T}) \subset \mathcal{W}$.

$\downarrow$ Vom verifica doar p. 2 b). În primul rând menţionăm că $l \cdot w = l \cdot t$. Mai departe, deoarece $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$ deducem că $tlX = tX$. Deci $wlX = ltX$, sau $w \cdot l = l \cdot t$. $\uparrow$

11.1.17. Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *iar* $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$. *Atunci:*

1. $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

2. $l \cdot v = l \cdot r$.

3. Dacă $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, atunci $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1. Construim diagrama (PD) pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ şi subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{R}$.

$$r^X \cdot k^X = r^{kX} \cdot k(r^X). \tag{1}$$

Dacă $X \in \left|\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})\right|$, atunci $l^X = r^X$. Deci $k(r^X) = k(l^X)$ este un izomorfism, iar cu el este un izomorfism şi v^X. Astfel $X \in |\mathcal{V}|$.

2. Pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ din diagrama (PD) examinăm egalităţile:

$$k^{rX} = u^X \cdot k^{vX} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & krX = kvX \arrow[d, "f^X = k^{vX}"'] \arrow[dr, "k^{rX}"] & \\
X \arrow[r, "v^X"] & vX \arrow[r, "u^X"] \arrow[d, "l^{vX}"'] & rX \arrow[dl, dashed, "g^X = l^{rX}"] \\
 & lvX = lrX &
\end{tikzcd}$$

Figura 11.1.13

Din egalitatea (2) rezulă că $u^X \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel

$$l^{vX} = g^X \cdot u^X \tag{3}$$

pentru un morfism g^X, unde l^{vX} este $\mathcal{L}$-replica obiectului vX. Deoarece $u^X \in \mathcal{E}pi$ din egalitatea (3), deducem că $g^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Aceasta înseamnă că g^X este $\mathcal{L}$-replica obiectului rX. Astfel am demonstrat că $l \cdot r = l \cdot v$.

3. Fie că $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. Pentru diagrama (PD) construită pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ examinăm egalitatea

$$k^{rX} = u^X \cdot f^X. \tag{4}$$

Deoarece $f^X \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $u^X \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Pe de altă parte $rX \in\mid \mathcal{R} \mid\subset\mid \mathcal{L} \mid$. Astfel u^X este atât $\mathcal{R}$-replica cât şi $\mathcal{L}$-replica obiectului vX. Aceasta înseamnă că $vX \in\mid \rho(\mathcal{L},\mathcal{R}) \mid$. $\uparrow$

11.1.18. Exemple. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

1. $\mathcal{K} *_s \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{K}$.

2. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} *_s \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

3. $\mathcal{K} *_d \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} *_d \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

5. Fie $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. *Atunci* $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *În particular,* $\Sigma *_d \mathcal{S} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

11.1.19. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ *şi* $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *un functor reflector.*

1. Pe obiectele subcategoriei $\mathcal{V}$ *avem egalitatea* $k = k \cdot r$.

2. $k \cdot r \cdot k \cdot r = k \cdot r$.

3. $r \cdot k \cdot r \cdot k = r \cdot k$.

4. Fie $A \in\mid k(\mathcal{R}) \mid$. *Atunci* $r^A = k^{rA}$.

5. Fie $\mathcal{L}_1 = k(\mathcal{R})$. *Dacă* $A \in\mid \mathcal{L}_1 \mid$. *Atunci* $krA = A$. *Adică pe subcategoria* $\mathcal{L}_1$ *avem egalitatea* $k \cdot r = 1$.

6. Fie $\mathcal{L}_2 = r(\mathcal{K})$. *Dacă* $A \in\mid \mathcal{L}_2 \mid$. *Atunci* $rkA = A$. *Adică pe subcategoria* $\mathcal{L}_2$ *avem egalitatea* $r \cdot k = 1$.

7. Fie $(\mathcal{K},\mathcal{L})$ *o pereche de subcategorii conjugate.*

a) $\mathcal{K} *_d \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

b) Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. *Atunci* $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$.

8. $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

9. Fie $\mathcal{K},\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2 \in \mathbb{K}$, *şi* $\mathcal{R},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, *atunci* $\mathcal{K}_1 *_s \mathcal{R} \subset \mathcal{K}_2 *_s \mathcal{R}$, $\mathcal{K}_1 *_d \mathcal{R} \subset \mathcal{K}_2 *_d \mathcal{R}$.

b) Dacă $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$, *atunci* $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{K} *_s \mathcal{R}_2$, $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{K} *_d \mathcal{R}_2$.

11.1.20. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{P}'',\mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\mathcal{I}''(\mathcal{R}))$, *iar* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

1. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'') \Leftrightarrow \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$.

2. $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} = \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{I}'')$.

3. Fie $\mathcal{K} *_s \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$, *şi* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'')$. *Atunci* $\mathcal{K} *_s \mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R}$.

11.1.21. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{T},\mathcal{K} \in \mathbb{R},\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\mathcal{T} *_d (\mathcal{K} *_d \mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

2. Fie că functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *este un monofunctor. Atunci pentru orice* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ *este un functor coreflector.*

3. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. *Atunci* $\mathcal{K} *_s \Pi = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\mathcal{K} *_d \Pi = \Pi$.

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. *Atunci* $\Sigma *_s \mathcal{S} = \Sigma$, *şi* $\Sigma *_d \mathcal{S} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{R}$;

b) Subcategoria $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $(\mu\mathcal{K})$*-subobiecte.*

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$*. Atunci* $\tilde{\mathcal{M}} *_s \mathcal{R} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

7. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$*. Atunci* $\mathcal{K} *_d \mathcal{S} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

11.1.22. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$*, iar* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. 1^*. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $k \cdot l = k$;

b) $\mathcal{K} *_d \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

1^0. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $l \cdot k = l$;

b) $\mathcal{K} *_s \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$;

b) $\mathcal{K} *_d \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *şi* $\mathcal{K} *_s \mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

11.1.23. Probleme. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$*, şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

1. Fie că $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ *este un functor reflector. Este adevărat atunci când* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *sau* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$?

1^*. *Fie că* $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_s \mathcal{R}$ *este un functor coreflector. Este adevărat atunci când* $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *sau* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$?

11.2. Factorizarea produsului la dreapta

11.2.1. Fixăm o structură de factorizare $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Pentru o subcategorie coreflectivă $\mathcal{K}$ şi o subcategorie reflectivă $\mathcal{R}$ examinăm functorul

$$v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

unde $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ (vezi Teorema 11.1.6). Fie

$$v^X = i^X \cdot p^X \tag{1}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului $v^X : X \to vX$, şi $\mathcal{P} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.

Teoremă. *1. Pentru orice obiect* X *al categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $vpX = vX$.

2. Corespondenţa $X \mapsto (p^X, p^X)$ *defineşte subcategoria* $\mathcal{P}$ *ca o subcategorie* $\mathcal{E}$*-reflectivă.*

$\downarrow$ 1. Examinăm diagrama (PD) construită pentru un obiect X.

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^X)"] \arrow[dr, "k(p^X)"] \arrow[dddd, "k^X"'] & & krX \arrow[dddl, "k^{vX}"'] \arrow[dddd, "k^{rX}"] \\
& kpX \arrow[ur, "k(r^{pX}) = k(i^X)"] \arrow[d, "k^{pX}"'] & \\
& pX \arrow[d, "i^X"] & \\
& vX \arrow[dr, "u^X"] & \\
X \arrow[uur, "p^X"] \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "r^X"] & & rX = rpX
\end{tikzcd}
$$

Figura 11.2.1

Orice morfism din obiectul pX într-un obiect al subcategoriei $\mathcal{R}$ se extinde prin morfismul $u^X \cdot i^X$. Această extindere este unică deoarece $p^X \in \mathcal{E}pi$. Deci

$$u^X \cdot i^X = r^{pX}. \tag{2}$$

Astfel pătratul

$$(u^X \cdot i^X) \cdot k^{pX} = k^{rX} \cdot k(r^{pX}) \tag{3}$$

este diagrama (PD) construită pentru obiectul pX.

Avem

$$u^X \cdot i^X \cdot k^{pX} = k^{rX} \cdot k(r^{pX}) = u^X \cdot k^{vX} \cdot k(r^{pX})$$

i.e.

$$u^X \cdot i^X \cdot k^{pX} = u^X \cdot k^{vX} \cdot k(r^{pX}) \tag{4}$$

şi deoarece $u^X \in \mathcal{M}ono$, deducem că

$$i^X \cdot k^{pX} = k^{vX} \cdot k(r^{pX}). \tag{5}$$

Deci

$$k(r^{pX}) = k(i^X). \tag{6}$$

Deoarece

$$v^X \cdot k^X = k^{vX} \cdot k(r^X) \tag{7}$$

este un pătrat cocartezian, şi $k^{vX} \in \mathcal{E}pi$, se verifică uşor că (5) este un pătrat cocartezian. Astfel am demonstrat că $vpX = vX$.

2. Din demonstraţia p.1 precedent deducem că $ppX = pX$. Rămâne de apelat la Teorema 11.1.8 p.7.

11.2.2. În categoria spaţiilor topologice complet regulate (spaţii Tihonov) $\mathcal{T}h$ produsul de dreapta, în genere, nu este o subcategorie reflectivă.

Definiţie. *Fie τ un cardinal. Examinăm categoria $\mathcal{T}h$.*

1. Într-un spaţiu topologic intersecţia a τ mulţimi deschise se numeşte G_τ-mulţime.

2. P_τ^--modificaţie a spaţiului (X, t) se numeşte spaţiul (X, t_τ^-), unde baza topologiei t_τ^- este formată din G_α-mulţimi, $\alpha < \tau$.

3. $\mathcal{K}^-(\tau)$ este subcategoria plină a categoriei $\mathcal{T}h$ formată din toate spaţiile (X, t) pentru care $t = t_\tau^-$.

4. Spaţiul X se numeşte $Q^-(\tau)$-spaţiu, dacă X este închis în $\mathcal{K}^-(\tau)$-coreplica spaţiului βX, unde βX este $\mathcal{C}omp$-replica spaţiului X.

11.2.3. Remarcă. *1. $Q^-(w_1) = Q$ subcategoria spaţiilor Hewitt.*

2. Referitor la spaţiile $\mathcal{K}^-(\tau)$ vezi D.Botnaru, R.Robu, [B, R, 2000].

3. Referitor la spaţiile $Q^-(\tau)$ vezi A.Cigoghidze [Ci, 1980].

11.2.4. Teorema (Botnaru D., Turcanu A.[B, T, 2011]). *Subcategoria reflectivă $Q^-(\tau)$ este $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$-factorizarea produslui de dreapta $\mathcal{K}^-(\tau) *_d \mathcal{C}omp$:*

$$Q_\tau^- = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_f}(\mathcal{K}^-(\tau) *_d \mathcal{C}omp). \uparrow$$

11.3. Produsul de dreapta cocartezian a două subcategorii

11.3.1. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, sau $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{K}$. Pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ efectuăm următoarea construcţie. Fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica, şi $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Pe morfismele k^X şi r^{kX} construim pătratul cocartezian

$$\bar{v}^X \cdot k^X = u^X \cdot r^{kX}. \tag{1}$$

Definiţie. *1. Subcategoria plină a tuturor obiectelor izomorfe cu obiecte de tipul $\bar{v}X$ se numeşte produsul de dreapta cocartezian al subcategoriilor $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{R}$ şi se notează*

$$\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}.$$

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "r^{kX}"] \arrow[d, "k^X"'] & rkX \arrow[d, dashed, "u^X"] \\
X \arrow[r, dashed, "\bar{v}^X"] & \bar{v}X
\end{tikzcd}$$

Figura 11.3.1

2. Diagrama pătratului cocartezian (1) se numeşte diagrama produsului de dreapta cocartezian al perechii de subcategorii $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ (diagrama (PDC)).

11.3.2. Construcţia duală. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, iar $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ sau a categoriei $\mathcal{R}$. $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica, şi $k^{rX} : krX \to rX$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectelor respective. Pe morfismele r^X şi k^{rX} construim pătratul cartezian

$$r^X \cdot \bar{\sqsupseteq}^X = k^{rX} \cdot t^X. \tag{1}$$

Definiţie. *1. Subcategoria plină a tuturor obiectelor izomorfe cu obiecte de tipul $\bar{w}X$ se numeşte produsul de stânga cartezian al perechii de subcategorii $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ şi se notează*

$$\bar{\mathcal{W}} = \mathcal{K} *_{sc} \mathcal{R}.$$

2. Diagrama pătratului cartezian (1) se numeşte diagrama produsului de stânga cartezian al perechii de subcategorii $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ (diagrama (PSC)).

$$\begin{tikzcd}
\overline{w}X \arrow[r, dashed, "t^X"] \arrow[d, dashed, "\overline{w}^X"'] & krX \arrow[d, "k^{rX}"] \\
X \arrow[r, "r^X"] & rX
\end{tikzcd}$$

Figura 11.3.2

11.3.3. Lemă. *1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$.*

2. Fie $A \in |\mathcal{K}|$. Atunci $\bar{v}A = rA$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in\mid \mathcal{R} \mid, k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica, şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Atunci

$$r^A = f \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pentru un morfism f. Este evident atunci că

$$f \cdot r^{kA} = 1 \cdot k^A \tag{2}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele k^A şi r^{kA}. Deci $\bar{v}^A = 1$.

2. Evident. $\uparrow$

11.3.4. Teoremă. *1. Corespondenţa $X \mapsto \bar{v}X$ defineşte un functor, $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \bar{\mathcal{V}}$*

2. Functorii k, r şi $\bar{v}$ verifică egalitatea $r \cdot k = \bar{v} \cdot k$. $\uparrow$

11.3.5. Remarcă. *Menţionăm, că $\bar{v}^X \in \varepsilon\mathcal{R}$, şi $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{E})^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta. Astfel factorizarea morfismului $\bar{v}^X$ nu ne conduce, în genere, la o subcategorie reflectivă, deoarece obiectele $\bar{v}^X$ şi $\bar{v}\bar{v}X$ nu sunt izomorfe.*

11.3.6. Apare următoarea întrebare:

Când functorul $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ este un functor reflector?

Examinăm următoarea condiţie:

(PDC) Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ în diagrama (PDC) morfismul u^X aparţine clasei $\mu\mathcal{K}$.

11.3.7. Teoremă. *Fie că perechea de subcategori $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ verifică condiţia (PDC). Atunci:*
1. $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ este un functor reflector.
2. $\bar{\mathcal{V}} = Q_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$.
3. $\bar{\mathcal{V}} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. Fie $A = \bar{v}X$ şi o să demonstrăm că $\bar{v}^A \in \mathcal{I}so$. Examinăm diagrama (PDC) construită pentru obiectul A.

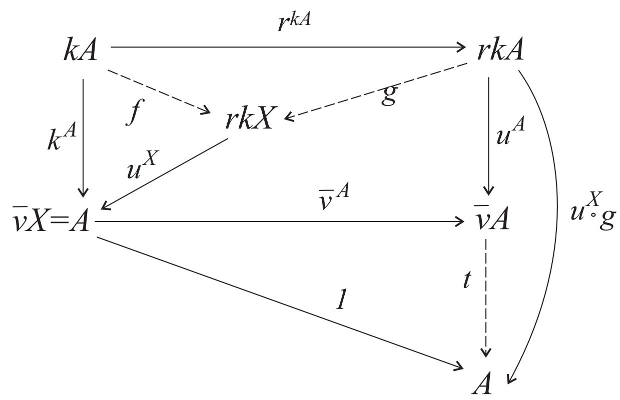


Figura 11.3.3

Deoarece $A = \bar{v}X$, există morfismul $u^X : rkX \to A$. Conform ipotezei (PDC) $u^X \in \mu\mathcal{K}$. Deci

$$k^A = u^X \cdot f \tag{1}$$

pentru un morfism f. Atunci
$$f = g \cdot r^{kA} \tag{2}$$
pentru un morfism g. Avem
$$u^X \cdot g \cdot r^{kA} = (\text{din}(2)) = u^X \cdot f = (\text{din}(1)) = k^A,$$
sau
$$(u^X \cdot g) \cdot r^{kA} = 1 \cdot k^A. \tag{3}$$
Deoarece
$$\bar{v}^A \cdot k^A = u^A \cdot r^{kA} \tag{4}$$
este un pătrat cocartezian există un morfism $t : \bar{v}A \to A$ astfel încât
$$1 = t \cdot \bar{v}^A, \tag{5}$$
$$u^X \cdot g = t \cdot u^A. \tag{6}$$
Din egalitatea (5), ţinând cont că $\bar{v}^A \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $\bar{v}^A \in \mathcal{I}so$.

Pentru a demonstra că $\bar{v}^A$ este $\bar{\mathcal{V}}$-replica obiectului X rămâne de apelat la Teorema 11.3.4.

2. $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$. În virtutea faptului că $rkA \in\mid \mathcal{R} \mid$, şi $u^A \in \mu\mathcal{K}$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) \subset \bar{\mathcal{V}}$. Fie $A \in\mid \mathcal{R} \mid$, şi $m : A \to X \in \mu\mathcal{K}$. Să construim obiectul vX. Fie $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica lui kA. Atunci $m \cdot k^A : kA \to X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X, şi
$$k^A = f \cdot r^{kA} \tag{7}$$
pentru un f. Această egalitate ne confirmă că $\bar{v}^X \in \mathcal{I}so$.

3. $\bar{\mathcal{V}} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Fie $A \in\mid \bar{\mathcal{V}} \mid$. Există un obiect $Z \in\mid \mathcal{R} \mid$ şi un morfism $u : Z \to A \in \mu\mathcal{K}$. Mai departe, fie $B \in\mid \mathcal{K} \mid, r^B : B \to rB$ $\mathcal{R}$-replica lui B, şi $f : B \to A \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Să verificăm că f se extinde prin r^B. Deoarece $B \in\mid \mathcal{K} \mid$ şi $u \in \mu\mathcal{K}$, atunci
$$f = u \cdot g \tag{8}$$
pentru un g. La rândul său $Z \in\mid \mathcal{R} \mid$, deci
$$g = h \cdot r^B \tag{9}$$
pentru un h. Atunci
$$f = (u \cdot h) \cdot r^A. \tag{10}$$

$\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \bar{\mathcal{V}}$. Fie $A \in \mid \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \mid$ şi construim pentru A diagrama (PDC) în raport cu subcategoriile $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$.

Atunci k^A se extinde prin r^{kA}

$$k^A = f \cdot r^{kA}, \tag{11}$$

de unde rezultă că $\bar{v}^A \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

11.3.8. Lemă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Examinăm functorul $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \bar{\mathcal{V}}$ este un functor reflector.

2. $\bar{v}^{\bar{v}X} \in \mathcal{I}so$ pentru orice $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$.

3. $\bar{\mathcal{V}} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

4. Pentru orice $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ morfismul $r^{kX} : kX \to rkX$ este $\bar{\mathcal{V}}$-replica lui kX.

$\downarrow$ $1 \Rightarrow 2$. Evident.

$1 \Rightarrow 3$. Pentru $X \in \mid \bar{\mathcal{V}} \mid$ avem $r^{kX} \in \mathcal{I}so$. Deci $\bar{\mathcal{V}} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Dacă $A \in \mid \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \mid$, atunci $v^A \in \mathcal{I}so$, şi $A \in \mid \bar{\mathcal{V}} \mid$.

$3 \Rightarrow 1$. În virtutea Teoremei 11.3.7.

$1 \Rightarrow 4$. Evident

$4 \Rightarrow 1$. Fie $f : X \to \bar{v}Y$. Atunci $f \cdot k^X$ se extinde prin k^{rX} :

$$f \cdot k^X = g \cdot r^{kX} \tag{1}$$

pentru un g. Deoarece

$$\bar{v}^X \cdot k^X = u^X \cdot r^{kX} \tag{2}$$

este cocartezian, deducem că

$$f = h \cdot \bar{v}^X, \tag{3}$$

$$g = h \cdot u^X. \tag{4}$$

Unicitatea lui h care verifică egalitatea (3) rezultă din faptul că $\bar{v}^X$ este un epi.$\uparrow$

11.3.9. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ şi clasa $\mathcal{M}$ este stabilă la dreapta. Atunci pentru orice subcategorie coreflectivă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ avem*

$$\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{R}.$$

$\downarrow$ Deoarece $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$, rezultă că $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\Pi)$. Fie $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica obiectului X, şi $r^{kX} : kX \to rkX$ şi $v^{kX} : rkX \to \pi kX$ $\mathcal{R}$-replica şi Π-replica obiectelor respective. Conform ipotezei $r^{kX} \in \mathcal{E}$, iar $v^{kX} \in \mathcal{M}$. Mai departe, fie

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "r^{kX}"] \arrow[d, "k^X"'] & rkX \arrow[r, "\pi^{rkX}"] \arrow[d, "u^X"] & \pi rkX \arrow[d, "u_1^X"] \\
X \arrow[r, "\bar{v}^X = r^X"] & \bar{v}X \arrow[r, dashed, "v_1^X"] & T
\end{tikzcd}
$$

Figura 11.3.4

$$\bar{v}^X \cdot k^X = u^X \cdot r^{kX} \tag{1}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi r^{kX}. Atunci $\bar{v}^X \in \mathcal{E}$, iar $u^X \in \mathcal{E}_u$. De asemenea, fie

$$v_1^X \cdot u^X = u_1^X \cdot \pi^{rkX} \tag{2}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele u^X şi π^{rkX}. Atunci $u_1^X \in \mathcal{E}_u$, şi $v_1^X \in \mathcal{M}$. Deoarece $u_1^X \in \mathcal{E}_u$ în baza Teoremei 9.4.9 conchidem că T este un obiect al subcategriei Π. Mai departe, $v_1^X \in \mathcal{M}$. Deci $\bar{v}X \in \mid \mathcal{R} \mid$. Se verifică simplu că $\bar{v}^X$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului X. $\uparrow$

11.3.10. Teoremă. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *iar* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $k \cdot r = r \cdot k$. *Atunci*

$$\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$$

şi această subcategorie este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

$\downarrow$ Examinăm diagrama (PD) pentru un obect arbitrar $X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{R}$.

În baza Propoziţiei 6.7.18 morfismul $k(r^X) = r^{kX}$. Produsul de dreapta se obţine construind pătratul cocartezian pe morfismele k^X şi $k(r^X)$, şi produsul de dreapta cocartezian se obţine construind pătratul cocartezian pe morfismele k^X şi r^{kX}. Deci aceste produse coincid. $\uparrow$

11.3.11. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Incluziunea $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$ se verifică, dacă $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ este, de exemplu, o pereche de subcategorii conjugate. Atunci $\varepsilon\mathcal{R} = \mu\mathcal{K}$.

Fie că $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \subset \mathcal{L}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K} \subset \mu\mathcal{T}$, adică $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{T}$. Astfel relaţia $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$ se îndeplineşte pentru o clasă proprie de perechi de subcategorii. Mai departe, $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci din relaţia $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, rezultă că $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dar condiţia $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ nu-i suficientă ca $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$. De exemplu, fie $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, iar $\mathcal{K} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, şi $\mu\mathcal{K} = \mathcal{I}so$. Astfel $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, iar $\varepsilon\mathcal{R}$ nu se conţine în $\mu\mathcal{K}$.

11.3.12. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ şi $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$, şi $\varepsilon\bar{\mathcal{V}} \subset \varepsilon\mathcal{R}$.

2. Dacă $r(\bar{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}$, atunci $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. O să arătăm că pentru perechea de subcategorii $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ se îndeplineşte condiţia (PDC). Examinăm diagrama (PDC) construită pentru un obiect arbitrar $X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$. În egalitatea

$$\bar{v}^X \cdot k^X = u^X \cdot r^{kX} \tag{1}$$

$r^{kX} \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci şi $\bar{v}^X \in \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$, iar $\bar{v}^X \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui $\bar{v}X$. Din egalitatea (1), rezultă că şi $u^X \cdot k^{rX} \in \mu\mathcal{K}$. Mai departe, $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_u$. Avem $u^X \cdot r^{kX} \in \mathcal{M}ono$ şi $r^{kX} \in \mathcal{E}_u$. Deoarece clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară (Teorema 2.6.2), deducem că $u^X \in \mathcal{M}ono$. Aşadar $u^X \cdot r^{kX} \in \mu\mathcal{K}$ şi $u^X \in \mathcal{M}ono$. Deci $u^X \in \mu\mathcal{K}$.

$\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$. Fie $b : \bar{v}X \to Y \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $b \cdot \bar{v}^X \cdot k^X : kX \to Y$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui Y, şi pătratul

$$1 \cdot (b \cdot \bar{v}^X \cdot k^X) = (b \cdot u^X) \cdot r^{kX} \tag{2}$$

este cocartezian, $Y \in |\bar{\mathcal{V}}|$. Deoarece $\mathcal{R} \subset \bar{\mathcal{V}}$ (Lema 11.3.3), deducem că $\varepsilon\bar{\mathcal{V}} \subset \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$.

2. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. Fie $b : Y \to \bar{v}X \in \mu\mathcal{K}$. Atunci

$$u^X = b \cdot f, \tag{3}$$

$$\bar{v}^X \cdot k^X = b \tag{4}$$

pentru un f şi g. Deoarece $g = k^Y$, rezultă că

$$1 \cdot g = f \cdot r^{kX} \tag{5}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele k^Y şi r^{kX}. $\uparrow$

11.3.13. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi functorul $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ este un functor reflector. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$.

2. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$, atunci $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in\mid \bar{\mathcal{V}} \mid$, iar $b : A \to X \in \mu\mathcal{K}$. Examinăm diagrama (PDC) construită pentru obiectul A. Atunci

$$k^A = f \cdot r^{kA} \tag{2}$$

pentru un f. Deoarece $b \cdot k^A$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X din (2), rezultă că $\bar{v}^X \in \mathcal{I}so$.

2. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. Fie $A \in\mid \bar{\mathcal{V}} \mid$, şi $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. Dacă $k^X : kX \to X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X, atunci $b \cdot k^X : kX \to A$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Fie $r^{kX} : kX \to kX$ $\mathcal{R}$-replica lui kX. Atunci r^{kX} este şi $\bar{\mathcal{V}}$-replica lui kX. Astfel

$$b \cdot k^X = f \cdot r^{kX} \tag{1}$$

pentru un f. Avem $b \cdot k^X \in \mu\mathcal{K}$, şi $rkX \in\mid \mathcal{K} \mid$. Deci

$$f = b \cdot k^X \cdot g \tag{2}$$

pentru un g. Se verifică uşor că $r^{kX} = g^{-1}$. Deci $r^{kX} \in \mathcal{I}so$, iar cu el şi $\bar{v}^X \in \mathcal{I}so$.

$\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$. Fie $A \in |\bar{\mathcal{V}}|$ şi $m : A \to Y \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $r^{kY} : kY \to rkY$ este $\bar{\mathcal{V}}$-replica lui kY (Lema 11.3.8). Astfel

$$k^Y = m \cdot p, \tag{3}$$

şi

$$p = q \cdot r^{kY} \tag{4}$$

pentru un p şi q. Atunci $v^Y \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

11.3.14. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Atunci:*

1. $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ este o subcategorie reflectivă cu functorul reflector $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, apoi $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$. $\uparrow$

11.3.15. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ sau $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$, iar $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$. Atunci:*

1. Functorul $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \bar{\mathcal{V}}$ este un functor reflector.

2. $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(k(\mathcal{R})) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

$\downarrow$ 1. Deoarece $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, iar clasa $\varepsilon\mathcal{R}$ este stabilă la dreapta, deducem că perechea $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ verifică condiţia (PDC).

2. Incluziunile $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(r(\mathcal{K})) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$ reies din construcţia subcategoriei $\bar{\mathcal{V}}$, iar incluziunea $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\bar{\mathcal{V}})$ rezultă din faptul că $\mathcal{R} \subset \bar{\mathcal{V}}$ (Lema 11.3.3). Din Teorema precedentă deducem că $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\bar{\mathcal{V}}) \subset \bar{\mathcal{V}}$. Putem scrie

$$\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(r(\mathcal{K})) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\bar{\mathcal{V}}) \subset \bar{\mathcal{V}}.$$

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Fie $A \in |\mathcal{R}\ |$, şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $kA \in\mid \mathcal{R}|$, sau $kA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$, iar A este un $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiect a lui kA. Deci $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})|$.

$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K}\cap\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Fie că există un obiect $Z \in |\mathcal{K}\cap\mathcal{R}\,|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Este clar că $A \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K}\cap\mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Din egalitatea $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K}\cap\mathcal{R})$, rezultă că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica lui X. Atunci $b \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Deci $kX \in |\mathcal{K}\cap\mathcal{R}|$. Astfel A, iar cu el şi X, este un $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiect al lui kX. $\uparrow$.

11.3.16. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$, şi $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$. Atunci:*

1. Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$, şi cei reflectori $r : \mathcal{K} \to \mathcal{R}$ şi $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \bar{\mathcal{V}}$ verifică egalităţile: $r \cdot k = \bar{v} \cdot k = k \cdot \bar{v}$.

2. $(\mathcal{K}, \bar{\mathcal{V}})$ este o TTRD, adică functorii k şi $\bar{v}$ comută şi pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ pătratul $\bar{v}^X \cdot k^X = k^{\bar{v}X} \cdot \bar{v}^{kX}$ este un pătrat cocartezian (vezi 11.4).

3. $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K}\cap\bar{\mathcal{V}})$.

4. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

5. $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{K} *_{dc} \bar{\mathcal{V}}$.

$\downarrow$ 1. Din diagrama (PDC) pentru un obiect arbitrar $X \in\mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid$ avem

$$\bar{v}^X \cdot k^X = u^X \cdot r^{kX} \tag{1}$$

Deoarece $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}, k^X \in \mu\mathcal{K}$, iar (1) este pătrat cocartezian, deducem că $u^X \in \mu\mathcal{K}$. Ţinând cont că $rkX \in |\mathcal{K}|$, conchidem că u^X este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului $\bar{v}X : u^X = k^{\bar{v}X}$.

Pentru orice obiect $A \in\mid \mathcal{K} \mid$ avem $r^A = \bar{v}^A$. Atunci

$$\bar{v} \cdot k = r \cdot k = k \cdot \bar{v}. \tag{2}$$

2. Rezultă din p.1.

3. Rezultă din p.1.

4. În virtutea Teoremei 11.3.13.

5. Evident.

11.3.17. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$ este un functor reflector şi $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Atunci:*

1. $X \in |\bar{\mathcal{V}}\,| \Leftrightarrow kX \in\mid \bar{\mathcal{V}} \mid$.

2. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

3. $k(\bar{\mathcal{V}}) \subset \bar{\mathcal{V}}$.

4. $\bar{v}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Dacă în plus $\mathcal{K}$ este o subcategorie c-coreflectivă, atunci:

5. $k \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot k = r \cdot k$.

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\bar{\mathcal{V}}|, k^X : kX \to X$ şi $r^{kX} : kX \to rkX$ $\mathcal{K}$-coreplica şi $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Deoarece r^{kX} este $\bar{\mathcal{V}}$-replica obiectului kX, rezultă că

$$k^X = f \cdot r^{kX} \tag{1}$$

pentru un morfism f. Dar $rkX \in |\mathcal{K}|$ în baza ipotezei $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ (echivalentă cu $r(\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, vezi 11.1.4). Atunci

$$f = k^X \cdot g \tag{2}$$

pentru un morfism g. Se verifică că $r^{kX} = g^{-1}$, şi $kX \in |\bar{\mathcal{V}}|$.

Reciproc. Fie $kX \in |\bar{\mathcal{V}}|$. Atunci $X \in |\bar{\mathcal{V}}|$, deoarece $\bar{v}^{kX} \in \mathcal{I}so$.

2. $\bar{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$ în baza Teoremei 11.3.13. O să demonstrăm că subcategoria $\bar{\mathcal{V}}$ este închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte. Fie $A \in |\bar{\mathcal{V}}|$, şi $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. În baza p.1 $kA \in |\bar{\mathcal{V}}|$. Deoarece $b \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului A din p.1, rezultă că $X \in |\bar{\mathcal{V}}|$.

3. Reiese din p.1.

4. Conform Lemei 11.3.8 p.4.

5. Examinăm diagrama (PDC) pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Deoarece clasa $\mu\mathcal{K}$ este stabilă la dreapta, rezultă că $u^X \in \mu\mathcal{K}$. Dar $rkX \in |\mathcal{K}|$. Deci u^X este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului $\bar{v}X$. Aşadar, $rkX = k\bar{v}X = \bar{v}kX$. $\uparrow$

11.3.18. Exemple. *1. Pentru orice subcategorie coreflectivă $\mathcal{K}$ avem*

$$\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{S} = \mathcal{S} \text{ şi } \mathcal{K} *_{dc} \Pi = \Pi.$$

2. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}_{pb}$, şi $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\Pi)$ (vezi 9.3). Pentru orice $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

3. Astfel

$$\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma *_{dc} \Pi$$

este un functor reflector, pe când

$$v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma *_d \Pi$$

nu este un functor reflector (vezi 11.1.7).

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, atunci $\Sigma *_{sc} \mathcal{R} = \Sigma$. Astfel $\bar{w} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \sum *_{sc}\Pi$ este un functor coreflector pe când $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Sigma *_s \Pi$ nu este astfel.

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \not\subset \mathcal{K}$. Atunci $\mathcal{K} *_{dc} \Pi = \Pi$, dar perechea de subcategorii $(\mathcal{K}, \Pi)$ nu verifică condiţia (PDC).

$\downarrow$ 5. Examinăm diagrama (PDC) construită pentru un obiect X. Dacă $u^X \in \mu\mathcal{K}$, atunci $u^X \in \mathcal{I}so$, iar din egalitatea

$$u^X \cdot k^{rX} = \bar{v}^X \cdot k^X$$

rezultă că $k^X \in \mathcal{M}_u$. Deci $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. Astfel condiţia (PDC) este suficientă, dar nu şi necesară pentru ca produsul de dreapta cocartezian să fie o subcategorie reflectivă. $\uparrow$

11.3.19. Exerciţii. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ o pereche de subcategorii conjugate. Atunci:*

- $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{L} = \mathcal{L}$.

- $\mathcal{K} *_{sc} \mathcal{L} = \mathcal{K}$.

11.3.20. Exerciţii. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Notăm $\mathbb{A}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} | \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}\}$. Atunci:*

1. $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$ pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{A}(\mathcal{K})$.

2. Dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{P}_c$. Atunci:

a) $\mathbb{A}(\mathcal{K})$ posedă cel mai mic element $\mathcal{L}$;

b) $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{A}(\mathcal{K})$.

11.4. Teorii de torsiune relativă (TTR)

11.4.1. Definiţie. *Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie coreflectivă a categoriei $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ o subcategorie reflectivă şi fie că functorii $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ şi $f : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ comută: $t \cdot f = f \cdot t$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm pătratul*

$$f^X \cdot t^X = t^{fX} \cdot f^{tX} \qquad (*)$$

Perechea de subcategorii $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se numeşte:

1. Teorie de torsiune relativă de stânga (TTRS), dacă pătratul (*) este cartezian.

2. Teorie de torsiune relativă de dreapta (TTRD), dacă pătratul (*) este cocartezian.

3. Teorie de torsiune relativă (TTR), dacă pătratul (*) este cartezian şi cocartezian.

11.4.2. Remarcă. *1. O TTR $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ este relativă, în raport cu subcategoria $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$* (vezi [B, 1984]).

2. O teorie de torsiune $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ într-o categorie abeiană este o TTR în raport cu subcategoria $(\mathcal{T} \cap \mathcal{F}) = O$ (vezi [B, D, 1972]).

11.4.3. Corolar. *1. Perechea de subcategorii din 9.5.2 $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ este o TTRD şi $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ este o TTRS.*

2. Perechea de subcategorii $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ din p.9.5.2 este o TTRS.

11.4.4. Teoremă. *Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie coreflectivă, $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi functorii respectivi comută: $k \cdot r = r \cdot k$. Atunci:*

1. $(\mathcal{K}, \mathcal{K} *_d \mathcal{R})$ este o TTRD.

2. $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}, \mathcal{R})$ este o TTRS.

3. $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}, \mathcal{K} *_d \mathcal{R})$ este o TTR.

$\downarrow$ 1. Examinăm diagrama (PD) pentru un obiect arbitrar $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Deoarece

$$k(r^X) = r^{kX} \tag{1}$$

şi $r^{kX} \in \mathcal{E}pi$, rezultă că v^X este un epi. Astfel $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ este o subcategorie reflectivă. Functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ comută: $k \cdot v = v \cdot k$. Într-adevăr avem

$$kvX = krX = rkX. \tag{2}$$

Mai departe, deoarece kX şi rkX sunt obiecte ale subcategoriei $\mathcal{K}$, rezultă că $\mathcal{K}$-coreplicile acestor obiecte sunt morfismele identice. Deci şi $k^{vkX} = 1$, iar

$$v^{kX} = r^{kX}. \tag{3}$$

Astfel

$$vkX = krX = kvX = rkX. \tag{4}$$

2. Dual.

3. Fie $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi examinăm produsul de stânga $\mathcal{K} *_s \mathcal{V}$. Din egalitatea $vkX = kvX$ deducem egalitatea

$$v^{kX} = k(v^X) = k(r^X). \tag{5}$$

Mai departe, egalitatea $vkX = kvX$ ne conduce la o altă egalitate

$$v(k^X) = k^{vX}. \tag{6}$$

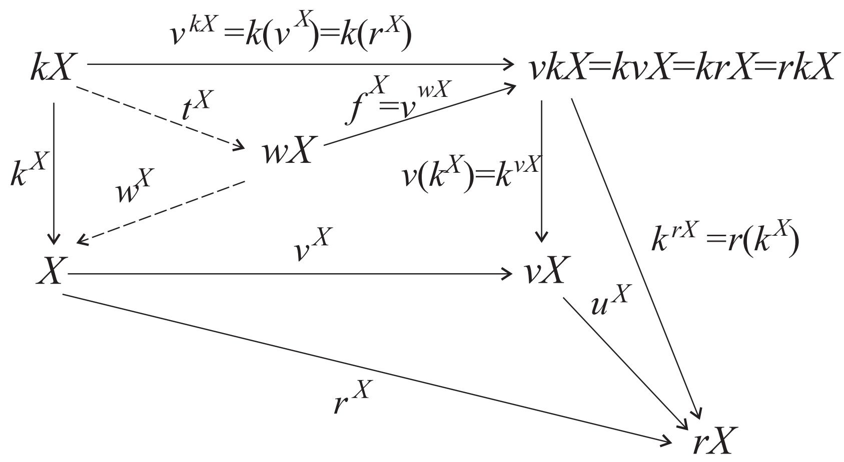


Figura 11.4.1

De asemenea din egalitatea $krX = rkX$, rezultă că

$$k^{rX} = r(k^X). \tag{7}$$

Fie

$$v^X \cdot w^X = v(k^X) \cdot f^X \tag{8}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele v^X şi $v(k^X)$. Deoarece $u^X \in \mathcal{M}ono$, rezultă că şi pătratul

$$r^X \cdot w^X = r(k^X) \cdot f^X \tag{9}$$

este cartezian. Astfel

$$\mathcal{K} *_s \mathcal{V} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}.$$

Mai departe, $t^X \in \mathcal{M}ono$, iar pătratul

$$v^X \cdot k^X = k^{vX} \cdot k(v^X) \tag{10}$$

este cocartezian, rezultă că şi pătratul

$$v^X \cdot w^X = k^{vX} \cdot v^{wX} \tag{11}$$

este cocartezian. Astfel pătratul (11) este atât cartezian cât şi cocartezian, iar

$$\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R} \quad \text{şi} \quad \mathcal{W} = \mathcal{K} *_s \mathcal{R}. \uparrow$$

11.4.5. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci:*

1. $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ este un functor reflector.

2. Functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ comută: $k \cdot v = v \cdot k$.

3. $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ este o TTRD.

$\downarrow$ 1.$\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_u$. Deci $\mathcal{K}$ este o subcategorie $\mathcal{M}_u$-coreflectivă. Atunci $\mathcal{V}$ este o subcategorie reflectivă (Teorema 11.1.13).

2. În baza Lemei 11.1.5 p.2 $kvX = krX$. Să demonstrăm că şi $vkX = krX$. Construim diagrama (PD) pentru obiectul kX. Deoarece $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ rezultă că, $r^X \cdot k^X : kX \to X$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului kX. În acest caz $k^{vX} = 1$. Deci $vkX = krX$.

3. Evident. $\uparrow$

11.4.6. Corolar. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. Atunci $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d \mathcal{S}$ este un functor reflector.*

2. Functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d \mathcal{S}$ comută: $k \cdot v = v \cdot k$.

3. $(\mathcal{K}, \mathcal{K} *_d \mathcal{S})$ este o TTRD. $\uparrow$

11.4.7. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ este o TTRD.

$\downarrow$ Fie $\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, şi $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ functorul reflector.

$1 \Rightarrow 2$. Să demonstrăm că functorii k şi r comută. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm diagrama (PD) construită în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$, ţinând cont că $\mathcal{K} *_d \mathcal{T} = \mathcal{R}$ (Teorema 12.3.5 p.1). Atunci $krX = ktX$. Deoarece $k^X \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $t^X \cdot k^X : kX \to tX$ este $\mathcal{T}$-replica lui kX. Mai departe, $ktX \in |\mathcal{K}|$. Deci $k(t^X) \perp \varepsilon\mathcal{L}$, şi $k^{tX} \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel

$$t^X \cdot k^X = k^{tX} \cdot k(t^X) \tag{1}$$

este $((\mu\mathcal{K})^\top, \mu\mathcal{K})$-factorizarea $\mathcal{T}$-replicii obiectului kX (Lema 11.1.5). Definitiv $ktX = rkX$, sau $r \cdot k = k \cdot r = k \cdot t$, şi $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ este o TTRD.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica lui X. Atunci $b \cdot k^X : kX \to A$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Mai departe,

$$b = f \cdot r^X. \tag{2}$$

Din (2) rezultă că $r^X \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $r^X \cdot k^X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui rX. Astfel $k(r^X) \in \mathcal{I}so$, şi $X \in |\mathcal{K} *_d \mathcal{R}| = |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $b \cdot k^A : kA \to X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X. Deoarece $kA \in |\mathcal{R}|$, obţinem $krX = rkX = rkA = krA = kA = kX$. Astfel $k(r^X) \in \mathcal{I}so$, deci şi $r^X \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

11.4.8. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi cel reflector $g : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma$ comută: $k \cdot g = g \cdot k$.*
2. *Functorii reflectori $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ şi $g : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma$ comută: $l \cdot g = g \cdot l$.*
3. *$(\mathcal{K}, \Gamma)$ este o TTR.*
4. *$\Gamma \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.*
5. *$\Gamma = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$.*
6. *$\Gamma \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$.*
7. *$\mathcal{K} *_{dc} \Gamma = \Gamma$.*
8. *$\mathcal{K} *_{dc} \Gamma \subset \Gamma$.*
9. *$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma) = \Gamma$.*
10. *$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \Gamma) \subset \Gamma$.*
11. *$\Gamma = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\Gamma)$.*
12. *$\Gamma = \lambda_\Gamma(\mathcal{K})$.*
13. *$\Gamma = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \Gamma)$.*
14. *$\Gamma \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \Gamma)$.*
15. *$\Gamma = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma)$.*
16. *$\Gamma \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma)$.*

↓ Vom demonstra următoarele implicaţii:

$$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1, 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6, 4 \Rightarrow 7 \Leftrightarrow 8, 7 \Rightarrow 4,$$

$$4 \Rightarrow 10 \Rightarrow 9 \Rightarrow 4, 4 \Rightarrow 13 \Rightarrow 14 \Rightarrow 4, 4 \Rightarrow 15 \Rightarrow 16 \Rightarrow 4.$$

$1 \Rightarrow 3$. Fie că functorii respectivi comută: $k \cdot g = g \cdot k$. Pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm pătratul

$$g^X \cdot k^X = k^{gX} \cdot g^{kX} \tag{1}$$

Să demonstrăm că el este atât cartezian cât şi cocartezian. Fie

$$g^X \cdot u^X = k^{gX} \cdot v^X \tag{2}$$

pătratul cartezin construit pe morfismele g^X şi k^{gX}. Atunci

$$k^X = u^X \cdot w^X, \tag{3}$$

$$g^{kX} = v^X \cdot w^X \tag{4}$$

pentru un morfism w^X. Avem $k^X, k^{gX} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci $u^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$, şi cu el şi $w^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Din condiţia $g^{kX} \in \mathcal{M}_p$ şi egalitatea (4) rezultă că $w^X \in \mathcal{M}_p$. Astfel $w^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$, şi pătratul (1) este cartezian.

Să demonstrăm că (1) este un pătrat cocartezian. Fie

$$v_1^X \cdot k^X = u_1^X \cdot g^{kX} \tag{5}$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi g^{kX}. Atunci

$$g^X = w_1^X \cdot v_1^X, \tag{6}$$

$$k^{gX} = w_1^X \cdot u_1^X \tag{7}$$

pentru un morfism w_1^X. Avem $k^X \in \mathcal{E}_u$. Deci $u_1^X \in \mathcal{E}_u$, şi din egalitatea (6) şi că $k^{gX} \in \mathcal{M}ono$, rezultă că $u_1^X \in \mathcal{M}ono$. În egalitatea (7) $u_1^X, k^{gX} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci şi $w_1^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Mai departe, $g^{kX} \in \mathcal{E}pi$. Astfel $v_1^X \in \mathcal{E}pi$. În egalitatea (6) $g^X \in \mathcal{M}_p$ şi clasa $\mathcal{M}_p$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară. Atunci $w_1^X \in \mathcal{M}_p$. Definitiv $w_1^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$, iar pătratul (1) este cocartezian.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rrr, "g^{kX}"] \arrow[dr, dashed, "w^X"] \arrow[ddd, "k^X"'] & & & gkX{=}kgX \arrow[ddd, "k^{gX}"] \arrow[dl, dashed, "u_1^X"'] \\
& P \arrow[urr, dashed, "v^X"] \arrow[ddl, dashed, "u^X"'] & & \\
& & T \arrow[dr, dashed, "w_1^X"] & \\
X \arrow[rrr, "g^X"'] \arrow[urr, dashed, "v_1^X"] & & & gX
\end{tikzcd}$$

Figura 11.4.2

$3 \Rightarrow 4$. În virtutea Teoremei 11.1.5* p.6 $\Gamma = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K})$. Faptul că $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă din Teorema 6.5.9.

$4 \Rightarrow 2$. Fie $g^X : X \to gX$, $l^X : X \to lX$, $l^{gX} : gX \to lgX$ şi $g^{lX} : lX \to glX$ Γ- şi $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Avem următoarele morfisme $g(l^X) : gX \to glX$, $l(g^X) : lX \to lgX$ ce verifică egalităţile

$$g(l^X) \cdot g^X = g^{lX} \cdot l^X, \tag{8}$$

$$l(g^X) \cdot l^X = l^{gX} \cdot g^X. \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dd, "g^X"'] & & lX \arrow[dl, "l(g^X)"'] \arrow[dd, "g^{lX}"] \\
& lgX \arrow[dr, dashed, shift left, "v"] & \\
gX \arrow[ur, "l^{gX}"] \arrow[rr, "g(l^X)"] & & glX \arrow[ul, dashed, shift left, "u"]
\end{tikzcd}$$

Figura 11.4.3

Deoarece $\Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ rezultă că $lgX \in |\Gamma|$. Deci

$$l(g^X) = u \cdot g^{lX} \tag{10}$$

pentru un morfism $u : glX \to lgX$. Mai departe, $\mathcal{L}$ ca subcategorie c-reflectivă este închisă în raport cu extensiile (Propoziţia 9.2.3). Deci $glX \in |\mathcal{L}|$. Atunci

$$g^{lX} = v \cdot l(g^X) \tag{11}$$

pentru un morfism $v : lgX \to glX$. Se verifică că $u = v^{-1}$.

$2 \Rightarrow 1$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm următoarea diagramă comutativă, unde

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rrr, "g^{kX}"] \arrow[dr, "k^X"] \arrow[dd, "k^{lX} = l^{kX}"'] & & & gkX \arrow[dl, "g(k^X)"'] \arrow[dd, "l^{gkX}"] \\
& X \arrow[r, "g^X"] \arrow[dl, "l^X"] & gX \arrow[dr, "l^{gX}"] & \\
lX \arrow[rrr, "g^{lX}"] & & & glX = lgX = lgkX
\end{tikzcd}$$

Figura 11.4.4

$$g^X \cdot k^X = g(k^X) \cdot g^{kX}. \tag{12}$$

Avem

$$l^{gX} \cdot g(k^X) \cdot g^{kX} = (\text{din}(12)) = l^{gX} \cdot g^X \cdot k^X =$$
$$= g^{lX} \cdot l^X \cdot k^X = g^{lX} \cdot l^{kX} = l^{gkX} \cdot g^{kX}$$

i.e.

$$l^{gX} \cdot g(k^X) \cdot g^{kX} = l^{gkX} \cdot g^{kX}, \tag{13}$$

sau

$$l^{gX} \cdot g(k^X) = l^{gkX}. \tag{14}$$

Din ultima egalitate rezultă că $g(k^X) \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$. Odată ce $gkX \in |\mathcal{K}|$, rezultă că $g(k^X)$ este $\mathcal{K}$-coreplica obiectului gX. Deci $kgX = gkX$.

$4 \Leftrightarrow 5$. În virtutea Teoremei 12.2. p. 3.

$4 \Rightarrow 6, 5 \Rightarrow 6, 7 \Rightarrow 8, 9 \Rightarrow 10, 11 \Rightarrow 12$. Evident.

$6 \Rightarrow 5$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \Gamma|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica acestui obiect. Atunci $lA \in |\Gamma|$. Deci $A \in |\Gamma|$ în virtutea Teoremei 6.5.9.

$4 \Rightarrow 7$. Incluziunea $\Gamma \subset \mathcal{K} *_{dc} \Gamma$ este evidentă. Să demonstrăm că $\mathcal{K} *_{dc} \Gamma \subset \Gamma$. Examinăm diagrama (PDC) pentru un obiect arbitrar $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Atunci $gkX \in |\mathcal{K} \cap \Gamma|$ şi u^X este $\mathcal{K}$-coreplica lui $\bar{v}X$. Din p.4 deducem că $\bar{v}X \in |\Gamma|$.

$7 \Rightarrow 8$. Avem $6 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Astfel $k \cdot g = g \cdot k$ şi atunci din Teorema 11.3.10 rezultă că $\mathcal{K} *_{dc} \Gamma = \mathcal{K} *_d \Gamma$. Adică $\mathcal{K} *_d \Gamma = \Gamma$.

$8 \Rightarrow 7$. Întotdeauna $\Gamma \subset \mathcal{K} *_{dc} \Gamma$, dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

$7 \Rightarrow 4$. Faptul că $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ este evident. Să verificăm că $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\Gamma|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $b \cdot k^A$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X şi $kA \in |\mathcal{K} \cap \Gamma| \subset |\mathcal{K} *_{dc} \Gamma|$. Deci $X \in |\Gamma|$.

$4 \Rightarrow 10$. În virtutea Teoremei 11.3.15.

$10 \Rightarrow 9$. Fie $A \in |\Gamma|$, iar $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica acestui obiect. Atunci $kA \in |\mathcal{K} \cap \Gamma|$ şi A este un $(\mu\mathcal{K})$-factorobiect al obiectului kA.

$9 \Rightarrow 4$. Din condiţia 9 rezultă că subcategoria Γ este închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-factorobiecte. În acelaşi timp Γ este închisă şi în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte.

$4 \Rightarrow 13$. $\Gamma \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \Gamma)$. Fie $A \in |\Gamma|$, iar $l^A : A \to lA$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului A. Atunci $lA \in \Gamma$ şi A este un $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiect al obiectului $lA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma|$.

$\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \Gamma$. În virtutea Propoziţiei 6.5.9.

$14 \Rightarrow 4$. Întotdeauna $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Să verificăm că $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\Gamma|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi $l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X. Atunci $l^X \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului A. În virtutea condiţiei 14, rezultă că $lA \in |\Gamma|$. Atunci şi $X \in |\Gamma|$.

$4 \Rightarrow 15$. $\Gamma \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma)$. Fie $A \in |\Gamma|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica acestui obiect. În virtutea condiţiei $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem $lA \in |\Gamma|$. Deci $lA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma|$.

$\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \Gamma$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma)$, $A \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \Gamma)|$ şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica obiectului A. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma|$. Deci $lA \in |\Gamma|$ şi $A \in |\Gamma|$.

$16 \Rightarrow 4$. Este suficient de demonstrat că $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\Gamma|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X. Atunci $l^X \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului A, iar $lX \in |\mathcal{L} \cap \Gamma|$. Atunci $X \in |\Gamma| \uparrow$.

11.4.9. Teoremă. *Fie $\mathcal{K}_1$ şi $\mathcal{K}_2$ două subcategorii c-reflective, $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, iar $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Dacă $(\mathcal{K}_1, \Gamma)$ este o TTR, atunci şi $(\mathcal{K}_2, \Gamma)$ este o TTR.*

$\downarrow$ Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, k_2^X : k_2X \to X$ $\mathcal{K}_2$-coreplica obiectului X, iar $k_1^{k_2X} : k_1k_2X \to k_2X$ $\mathcal{K}_1$-coreplica obiectului k_2X. Deoarece $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, rezultă că $k_2^X \cdot k_1^{k_2X}$ este $\mathcal{K}_1$-coreplica obiectului k_2X :

$$k_2^X \cdot k_1^{k_2X} = k_1^X. \tag{1}$$

Examinăm Γ-replicile acestor trei obiecte. Obţinem următoarea diagramă comutativă:

$$g^X \cdot k_2^X = g(k_2^X) \cdot g^{k_2X}, \tag{2}$$

$$g^{k_2X} \cdot k_1^{k_2X} = g(k_1^{k_2X}) \cdot g(k_1^X), \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
k_1X \arrow[rr, "g^{k_1X}"] \arrow[dd, "k_1^X"'] \arrow[dr, "k_1^{k_2X}"] & & gk_1X = k_1gX \arrow[d, "g(k_1^{k_2X})"] \\
& k_2X \arrow[r, "g^{k_2X}"] \arrow[dl, "k_2^X"'] & gk_2X \arrow[d, "g(k_2^X)"] \\
X \arrow[rr, "g^X"] & & gX
\end{tikzcd}$$

Figura 11.4.5

$$g^X \cdot (k_2^X \cdot k_1^{k_2X}) = (g(k_2^X) \cdot g(k_1^{k_2X})) \cdot g(k_1^X). \tag{4}$$

Deoarece pătratul (4) este cocartezian, iar $k_1^{k_2X}$ este un epi, rezultă că şi pătratul (2) este cocartezian. Astfel $g(k_2^X) \in \mu\mathcal{K}_2$, iar $gk_2X \in |\mathcal{K}_2|$. Deci $g(k_2^X)$ este $\mathcal{K}_2$-coreplica obiectului gX. Astfel functorii k_2 şi g comută, iar $(\mathcal{K}_2, \Gamma)$ exste o TTR. $\uparrow$

11.4.10. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *şi* $\Gamma_1 = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)$. *Atunci:*

1. $(\mathcal{K}, \Gamma_1)$ *este o TTR.*

2. Γ_1 *este cea mai mică subcategorie reflectivă ce conţine subcategoria* Γ *şi pentru care* $(\mathcal{K}, \Gamma_1)$ *ste o TTR.*

3. Pentru orice pereche de subcategorii conjugate $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1)$, *dacă* $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$, *atunci functorii respectivi* $k_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}_1, l_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}_1$ *şi* $g_1 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma_1$, *verifică egalităţile:*

- $k_1 \cdot g_1 = g_1 \cdot k_1$,

- $l_1 \cdot g_1 = g_1 \cdot l_1$.

4. $\Gamma_1 \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\Gamma_1 = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma_1$.

5. Subcategoria $\mathcal{K}_1$ *este închisă în raport cu* $(\varepsilon\Gamma_1)$*-factorobiecte:* $\mathcal{K}_1 \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\Gamma)$. *De asemenea* $\mathbb{K}_1 \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$. $\uparrow$

11.4.11. Teoremă. *Fie* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), s\Gamma_0$ *subcategoria spaţiilor secvenţial complete,* $\Gamma \subset s\Gamma_0$, *şi* $\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} \Gamma$. *Atunci functorul reflector* $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ *şi cel reflector* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută, dar* $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ *nu este o TTR.*

$\downarrow$ $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{R})$ este o TTRD. Să demonstrăm că această pereche nu este o TTRS. Fie $X = c_0$ spaţiul Banach al şirurilor ce converg la zero, şi $s^X : X \to sX$ $\mathcal{S}$-replica lui. sX nu este secvenţial complet. Examinăm $\mathcal{R}$-replica obiectului $sX : sX \to rsX$. Spaţiul rsX este secvenţial complet. Dearece completarea secvenţială a spaţiului sX coincide cu completarea, deducem că spaţiul rsX este complet. În plus, spaţiul rsX are topologie slabă. Deci $rsX = \pi X$, iar $\pi X \in |\mathcal{K}|$. Dacă pătratul

$$m^{\pi X} \cdot r^X = r^{sX} \cdot m^{sX}$$

$$\begin{tikzcd}
c_0=X \arrow[r, "m(r^X)=r^X"] \arrow[d, "m^{sX}"'] & rX=m\pi X \arrow[d, "1=m^{\pi X}"] \\
sX \arrow[r, "r^{sX}"] & rsX=\pi X
\end{tikzcd}$$

Figura 11.4.6

ar fi cartezian, atunci şi m^{sX} ar fi un izomorfism. $\uparrow$

11.4.12. Corolar. *Deoarece* $\Gamma_0 \subset q\Gamma_0 \subset p\Gamma_0 \subset s\Gamma_0$ *conchidem: următoarele perechi de subcategorii sunt TTRD, dar nu sunt TTR:*

$$(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S} *_{sr} \Gamma_0), (\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0), (\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S} *_{sr} p\Gamma_0), (\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S} *_{sr} s\Gamma_0). \uparrow$$

11.4.13. Exemple. *1. Perechea de subcategorii* $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ *este o TTRD (vezi 9.5.2. p.6). Deci* $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}, \mathcal{R})$ *este o TTR.*

2. Perechea de subcategorii $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ *este o TTRS (vezi 9.5.2. p.6*). Deci* $(\mathcal{T}, \mathcal{T} *_d \mathcal{L})$ *este o TTR.*

3. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ *o pereche de subcategorii conjugate, iar* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Dacă* $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ *şi* $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, *sau* $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ *şi* $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, *atunci functorii* k *şi* r *comută:* $k \cdot r = r \cdot k$ *(vezi p.10.2.1). Astfel:*

- $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}, \mathcal{R})$ *este o TTRS;*
- $(\mathcal{K}, \mathcal{K} *_d \mathcal{R})$ *este o TTRD;*
- $(\mathcal{K} *_s \mathcal{R}, \mathcal{K} *_d \mathcal{R})$ *este o TTR.*

4. Fie $\mathcal{K}$ *o subcategorie c-coreflectivă, şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci produsul de dreapta cocartezian*

$$\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$$

este o subcategorie relfectivă (Teorema 11.3.15) şi functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *şi* $\bar{v} : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \bar{\mathcal{V}}$ *comută:* $k \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot k$ *(Teorema 11.3.16). În acest caz*

$$\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R},$$

şi $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ *este o TTRD (Teorema 11.3.16).*

11.4.14. Probleme. *1. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie c-coreflectivă, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), \Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Dacă $(\mathcal{K}, \Gamma_1)$ este o TTR în ce condiţii şi $(\mathcal{K}, \Gamma_2)$ este o TTR?*

2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie arbitrară, $l : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$ şi $t : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$ doi functori coreflectori, sau reflectori, sau unul coreflector şi unui reflector şi fie că pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}|$ $ltX = tlX$.

-În ce condiţii functorii l şi t sunt izomorfi?

3. Să se examineze problema 2 în categoriile $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}_2$) ale spaţiilor uniforme, $\mathcal{CA}b$ ($\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$) ale grupurilor local convexe, $\mathcal{T}h$ ale spaţiilor Tihonov.

4. Fie $\mathcal{C}$ categoria algebrelor universale de signatura dată, $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{T}$ două varietăţi, iar $ltX = tlX$ pentru $X \in |\mathcal{C}|$. În ce condiţii $l \cdot t = t \cdot l$?

5. Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ şi $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ două teorii de torsiune, iar $f_1 f_2 X = f_2 f_1 X$ pentru $X \in |\mathcal{C}|$.

- În ce condiţii functorii $f_1 \cdot f_2$ şi $f_2 \cdot f_1$ sunt izomorfi?

- În ce condiţii functorii $t_1 \cdot t_2$ şi $t_2 \cdot t_1$ sunt izomorfi?

11.5. Centrul clasei structurilor de factorizare

11.5.1. Notaţii. *Fie $C(\mathbb{B}) = \{\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} | \mathcal{M}_p \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{M}_u\}$*

Vom numi $C(\mathbb{B})$ centrul clasei structurilor de factorizare $\mathbb{B}$.

11.5.2. Exerciţii. *1. $C(\mathbb{B}) = \{(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B} |\ \mathcal{E}_p \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u\}$.*

2. $\mathbb{B}_{pb} \subset \{(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})) | \mathcal{K} \subset \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)\} \subset C(\mathbb{B})$.

3. $\{(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R})) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)\} \subset C(\mathbb{B})$.

4. $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p) = (\mathcal{P}''(\mathcal{S}), \mathcal{I}''(\mathcal{S})) = (\mathcal{E}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{M}'(\mathcal{C}_2\mathcal{V}))$.

5. $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u) = (\mathcal{P}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{I}''(\mathcal{C}_2\mathcal{V})) = (\mathcal{E}'(\tilde{\mathcal{M}}), \mathcal{M}'(\tilde{\mathcal{M}}))$.

6. $C(\mathbb{B})$ conţine o clasă proprie de elemente.

11.5.3. Exerciţiu. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$. Atunci există o unică subcategorie coreflectivă $\mathcal{T}$ şi o unică subcategorie reflectivă $\mathcal{R}$ astfel încât $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{T}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$.*

Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in C(\mathbb{B})$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{T}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$. Atunci:*

1. Functorul coreflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ şi cel reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $t \cdot r = r \cdot t$.

2. $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}$.

3. $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1. A se vedea demonstraţia Teoremei 10.2.2.

2. Deoarece $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{P}$.

3. Deoarece $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$. $\uparrow$

11.5.4. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in C(\mathbb{B}), (\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{T}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ şi fie clasa $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$-ereditară. Atunci:*

1. $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

2. Pentru orice $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, *pătratul* $r^X \cdot t^X = t^{rX} \cdot r^{tX}$ *este cartezian. În particular,* $(\mathcal{T},\mathcal{R})$ *este o TTRS.*

3. $\mathcal{T} = \mathcal{F} *_s \mathcal{R}$ *pentru orice* $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea* $\mathcal{T} \subset \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{M}}$.

4. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

$\downarrow$ 1. În virtutea Teoremei 6.6.14.

2. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm pătratul comutativ

$$r^X \cdot t^X = t^{rX} \cdot r^{tX}. \tag{1}$$

Dacă

$$r^X \cdot v = t^{rX} \cdot u \tag{2}$$

este pătratul cartezian construit pe r^X şi t^{rX}, atunci

$$t^X = v \cdot h, \tag{3}$$

$$r^{tX} = u \cdot h \tag{4}$$

pentru un h. Avem $r^X \in \mathcal{M}_u$. Deci $u \in \mathcal{M}_u$. Mai departe, $r^{tX} \in \mathcal{P}$ şi $u \in \mathcal{M}_u$. Atunci din (4) deducem că $h \in \mathcal{P}$, iar din (3) că $h \in \mathcal{I}$. Astfel $t \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}so$, iar (1) este un pătrat cartezian.

3. Rezultă din p.2.

4. În virtutea Teoremei 11.1.11* $\uparrow$

11.5.5. Din Teorema precedentă şi cea duală rezultă.

Teoremă. *Fie* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) \in \mathbb{L}_x(\mathcal{T}) \cap \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$, *clasa* $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$*-ereditară, iar clasa* $\mathcal{I}$ $\mathcal{E}_u$*-coereditară. Atunci:*

1. $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}'(\mathcal{T}),\mathcal{M}'(\mathcal{T})) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}),\mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

2. $(\mathcal{T},\mathcal{R})$ *este o TTR.*

3. $\mathcal{T} = \mathcal{U} *_s \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_d \mathcal{V}$ *pentru orice* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{V} \in \mathbb{R}$ *cu proprietăţile* $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ *şi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{R}$.

4. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. $\uparrow$

11.5.6. Prezentăm schematic laticea $\mathbb{B}$ a structurilor de factorizare şi unele elemente ale ei.

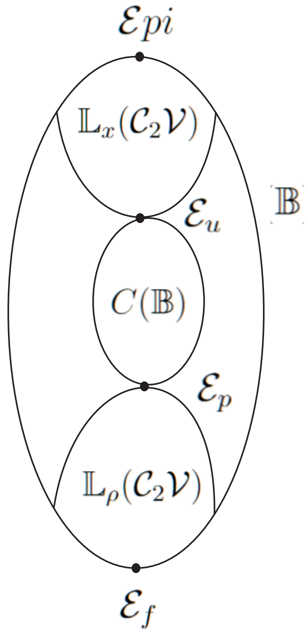


Figura 11.5.1

11.5.7. Probleme. *1. Este adevărat că*

$$\{(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K})|\ \mathcal{K} \in \mathbb{K}\} \cap \{(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))|\ \mathcal{R} \in \mathbb{R}\} = C(\mathbb{B})?$$

2. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in C(\mathbb{B})$. *Este adevărat că ori clasa* $\mathcal{P}$ *este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară, ori clasa* $\mathcal{I}$ *este* $\mathcal{E}_u$*-coereditară?*

Capitolul 12. Produsul semireflexiv a două subcategorii

12.1. Subcategorii $\mathcal{A}$-semireflexive, $\mathcal{A}$-inductiv semireflexive şi functorial semireflexive

12.1.1. $\mathcal{A}$-semireflexivitatea. Fie $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, şi $\mathcal{P}$ o proprietate care defineşte o familie de submulţimi $\mathcal{A}$ a spaţiului E, ce posedă următoarele proprietăţi:

1. Fie $A, B \in \mathcal{A}$. Atunci există $C \in \mathcal{A}$ astfel încât $A \cup B \subset C$.
2. Pentru orice $\alpha \in K$ şi $A \in \mathcal{A}$ rezultă că $\alpha A \in \mathcal{A}$.
3. $\cup\{A|A \subset \mathcal{A}\} = E$.

Pe spaţiul E' se examinează topologia $t(\mathcal{A})$ a convergenţei uniforme pe mulţimile familiei $\mathcal{A} : (E', t(\mathcal{A}))$.

12.1.2. Definiţie. *Spaţiul local convex (E, u) se numeşte $\mathcal{P}$-semireflexiv, dacă*

$$(E', t(\mathcal{A}))' = E.$$

12.1.3. Fie că pe spaţiul E' înzestrat cu una din topologiile σ, τ, β sau careva alta, proprietate $\mathcal{P}$ defineşte o familie de submulţimi $\mathcal{A}'$ cu proprietăţile 1-3, atunci putem defini şi spaţiile $\mathcal{P}$-reflexive.

Definiţie. *Spaţiul (E, u) se numeşte $\mathcal{P}$-reflexiv, dacă*

$$(((E', t(\mathcal{A}))', t(\mathcal{A}')) = (E, u).$$

12.1.4. *V.Sekevanov a examinat şi cazul când familia $\mathcal{A}$ este definită de o proprietate topologică $\mathcal{P}_1 : \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{P}_1)$, şi familia $\mathcal{A}'$ de o altă proprietate topologică $\mathcal{P}_2 : \mathcal{A}' = \mathcal{A}'(\mathcal{P}_2)$. Atunci spaţiul local convex (E, u) se numeşte $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-reflexiv, dacă*

$$((E', t(\mathcal{A})), t(\mathcal{A}')) = (E, u).$$

12.1.5. Teoremă. *Fie $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $\mathcal{A}$ o familie de submulţimi a spaţiului E, care verifică şi următoarea proprietate:*

Mulţimile familiei $\mathcal{A}$ posedă proprietatea $\mathcal{P}$ în orice topologie compatibilă cu dualitatea (E, E'), Atunci subcategoria spaţiilor $\mathcal{P}$-semireflexive este o subcategorie închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{S})$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{S})$-factorobiecte. $\uparrow$

12.1.6. Exemple. *1. Fie $\mathcal{A}$ familia mulţimilor mărginite în spaţiul local convex (E, u). Atunci spaţiile $\mathcal{A}$-semireflexive şi cele $\mathcal{A}$-reflexive sunt spaţiile semireflexive şi respectiv cele reflexive* (vezi [R, R, 1964]).

2. Fie $\mathcal{A}_1$ familia mulţimilor compacte în spaţiul (E,u), şi $\mathcal{A}_2$ familia mulţimilor absolut convexe şi compacte. Spaţiile $\mathcal{A}_1$-reflexive şi $\mathcal{A}_2$-reflexive, numite k-reflexive şi c-reflexive, au fost studiate de B.S.Brudovsky [Br, 1967].

3. Cazul când $\mathcal{A}$ este familia mulţimilor precompacte ne conduce la spaţii p-semireflexive şi spaţii p-reflexive, examinate de Köethe [Kt, 1969], M.Day [D, 1958], J.Dazord şi M.Jourlin [D,J, 1971].

4. Fie $\mathcal{A}$ familia discurilor complete din spaţiul (E,u). Acest caz ne conduce la spaţii d-reflexive [Sk, 1984].

12.1.7. Semireflexivitatea inductivă. Fie $\mathcal{A}$ o familie de mulţimi a spaţiului local convex (E,u), ce verifică condiţiile:

1. Dacă $A, B \in \mathcal{A}$, atunci şi $A \cap B \in \mathcal{A}$.

2. Pentru orice număr $\alpha \neq 0$ şi orice $A \in \mathcal{A}$ avem $\alpha A \in \mathcal{A}$.

Se examinează familia $\tilde{\mathcal{A}}$ formată din polarele mulţimilor $A \in \mathcal{A}$:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A^0 | A \in \mathcal{A}\}.$$

Fiecare $B \in \tilde{\mathcal{A}}$ ne conduce la spaţiul normat (E'_B, n_B), unde E'_B este acoperirea liniară a mulţimii B, şi n_B ete norma H.Minkovski, definită de discul B.

Aplicaţiile liniare

$$i_B : (E'_B, n_B) \to E', B \in \tilde{\mathcal{A}}$$

definesc cea mai fină topologie local convexă (topologia inductivă) $i(\tilde{\mathcal{A}})$, pentru care aceste aplicaţii sunt continui. Obţinem spaţiul local convex $(E', i(\tilde{\mathcal{A}}))$.

12.1.8. Definiţie. *Spaţiul local convex (E,u) se numeşte $\tilde{\mathcal{A}}$-inductiv semireflexiv, dacă*

$$(E', i(\tilde{\mathcal{A}}))' = E.$$

12.1.9. Exemple. Subcategoria spaţiilor inductiv semireflexive $i\mathcal{R}$. *Fie $(E,u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, şi $\mathcal{A} = u$, unde u este baza a topologiei. Atunci spaţiile $\tilde{\mathcal{A}}$-inductiv semireflexive sunt spaţii inductiv semireflexive studiate de B.A.Berezansky* [Br, 1967] *cu notaţiile noastre. Subcategoria $i\mathcal{R}$ a acestor spaţii se exprimă*

$$i\mathcal{R} = \mathcal{S}h *_{sr} \Gamma_0,$$

unde $\mathcal{S}h$ este subcategoria spaţiilor Schwartz, şi Γ_0 subcategoria spaţiilor complete.

12.1.10. Exemplu. Subcategoria spaţiilor $\mathcal{B}$-inductiv semireflexive.

12.1.11. Definiţie [Ra, 1965]. În spaţiul (E, u) o mulţime absolut convexă şi mărginită A se numeşte sferă Banach, dacă spaţiul (E_A, n_A) este complet.

Fie $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $\mathcal{B}$ familia tuturor sferelor Banach în spaţiul $(E', \beta(E', E))$, unde $\beta(E', E)$ este topologia convergentei uniforme pe toate mulţimile mărginite din spaţiul E. Sistemul de aplicaţii liniare

$$j_B : (E', n_B) \to E', B \in \mathcal{B}$$

defineşte topologia local convexă inductivă $(E', j_{\mathcal{B}})$ în spaţiul E'.

12.1.12. Definiţie [Sk, 1980]. *Spaţiul local convex (E, u) se numeşte B-inductiv semireflexiv dacă*

$$(E', j_{\mathcal{B}})' = E.$$

Subcategoria acestor spaţii o vom nota-o $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$. Această subcategorie este $\mathcal{S}$-semireflexivă, unde $\mathcal{S}$ este subcategoria spaţiilor cu topologie slabă (vezi 16.5).

12.1.13. Semireflexivitatea functorială. Fie $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ un functor covariant sau contravariant cu proprietatea

$$t(E, u) = (E', t(u)), (E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|.$$

Astfel functorul t defineşte pe spaţiul dual o topologie local convexă $t(u)$.

Definiţie. *1. Spaţiul (E, u) se numeşte t-semireflexiv, dacă*

$$(E', t(u))' = E.$$

2. Spaţiul (E, u) se numeşte t-reflexiv, dacă

$$((E', t(u))', tt(u)) = (E, u).$$

12.1.14. Exemple. *1. Topologia inductivă din 12.1.7 defineşte un functor contravariant*

$$i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}, i(E, u) = (E', i(\tilde{\mathcal{A}})).$$

2. Topologia inductivă din p.12.1.6 Exemplul 2 defineşte un functor contravariant

$$j : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V},\ j(E, u) = (E', j_B).$$

3. Fie $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ un functor coreflector. Vom defini functorul contravariant $d_k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ astfel

$$d_k(E, u) = k(E', \sigma(E', E)) = (E', k\sigma(E', E)).$$

Referitor la acest exemplu vezi 16.3.

Dacă $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, *atunci* $d_k d_k(E, u) = ks(E, u)$.

Putem obţine exemple netriviale în cazurile:

\- $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$.

\- *subcategoriile* $\mathcal{K}$ *şi* $\tilde{\mathcal{M}}$ *nu sunt comparabile.*

4. Functorul $d_\beta : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Definim functorul contravariant* $d_\beta : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *astfel: pentru* $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *notăm* $d_\beta(E, u) = E'_\beta$, *unde* E' *este înzestrat cu topologia convergentei uniforme pe toate mulţimile mărginite din* (E, u). *Acest functor se întâlneşte cel mai des la definirea unor semireflexivităţi.*

5. Functorul $d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Se defineşte stabilind* $d_\tau(E, u) = E'_\tau$.

6. Fie $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *un x-functor, în particular un functor coreflector. Atunci avem şi următorii functori contravarianţi:*

$$t \cdot d_\beta : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}; \quad t \cdot d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}.$$

12.2. Produsul semireflexiv a două subcategorii

12.2.1. Definiţie. *Fie* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{A}$ *două subcategorii ale categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *unde* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. *Obiectul* X *al categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *se numeşte* $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$*-semireflexiv, dacă* $\mathcal{L}$*-replica lui aparţine subcategoriei* $\mathcal{A}$. *Vom nota* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *subcategoria plină a tuturor obiectelor* $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$*-semireflexive. Ea se numeşte produsul semireflexiv al subcategoriilor* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{A}$.

12.2.1*. *Fie* $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{A}$ *două subcategorii, unde* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. *Obiectul* X *se numeşte* $(\mathcal{K}, \mathcal{A})$*-semicoreflexiv, dacă* $\mathcal{K}$*-coreplica lui aparţine subcategoriei* $\mathcal{A}$.

Notăm cu $\mathcal{K} *^{sc} \mathcal{A}$ *produsul semicoreflexiv al subcategoriilor* $\mathcal{K}$ *şi* $\mathcal{A}$.

12.2.2. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. *Atunci* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Fie $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$. *Atunci* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{L} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$.

4. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A})$.

5. Fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. *Atunci* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_2$.

6. $\mathcal{L} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$.

7. Fie $\{\mathcal{A}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *o clasă de subcategorii a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci*

$$\mathcal{L} *_{sr} (\cap \mathcal{A}_i) = \cap(\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_i).$$

8. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{A} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Atunci* $\mathcal{S} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$.

9. $\mathcal{A} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} *_{sr} \Gamma \Leftrightarrow \mathcal{A} = \Gamma$.

10. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$.

11. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

12.2.3. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\Pi *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\mathcal{R} *_{sr} \Pi = \rho(\mathcal{R}, \Pi)$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\mathcal{R} *_{sr} \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. $\Gamma_0 *_{sr} \mathcal{S} = \mathcal{S}$.

5. $\mathcal{S} *_{sr} \Gamma_0 = \Pi$.

6. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \in \mathbb{R}$, *şi* $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ *subcategorii ale categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

- Dacă $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3$ *şi* $\mathcal{L}_1 *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{L}_3 *_{sr} \mathcal{A}$, *atunci* $\mathcal{L}_2 *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{L}_2 *_{sr} \mathcal{A}$.

- Dacă $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ *şi* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_1 = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_3$, *atunci* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_1 = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_2$.

12.2.4. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, *şi* $\mathcal{A}$ *o subcategorie a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci subcategoria* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *este închisă în raport cu:*

1. $(\varepsilon\mathcal{L})$*-subobiecte.*

2. $(\varepsilon\mathcal{L})$*-factorobiecte.*

3. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi subcategoria* $\mathcal{A}$ *este închisă în raport cu produsele, atunci şi subcategoria* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *este închisă în raport cu produsele.*

$\downarrow$ 1. Fie $B \in \mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \mid$, şi $b : X \to B \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci $lB \in \mid \mathcal{A} \mid$, şi $l^B \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X. Deci $X \in \mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \mid$.

$$X \xrightarrow{b} B \xrightarrow{b^B} lB = lY.$$

2. Fie $B \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$, şi $b : B \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$. Dacă $l^Y : Y \to lY$ este $\mathcal{L}$-replica lui Y, atunci $l^Y \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica lui B. Deci $lB \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$, iar $Y \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$.

$$B \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{l^Y} lY = lB$$

3. Fie $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ o familie de obiecte a subcategoriei $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$, şi $l_i : X_i \to Y_i$, $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{L}$-replicile obiectelor X_i. Examinăm produsele familiilor respective de obiecte:

$$X = \Pi\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\},\ Y = \Pi\{Y_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

cu proiecţiile canonice

$$p_i : X \to X_i, \quad q_i : Y \to Y_i, i \in \mathcal{I}.$$

Morfismul

$$l = \Pi\{l_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

verifică egalităţile

$$l_i \cdot p_i = q_i \cdot l, \forall i \in \mathcal{I}$$

şi l este $\mathcal{L}$-replica obiectului X (Teorema 6.1.6). Familia de obiecte $\{lX_i \mid i \in \rangle\}$, în baza ipotezei, aparţine subcategoriei $\mathcal{A}$. Deci şi obiectul $Y \in \mid \mathcal{A} \mid$. Astfel $\mathcal{L}$-replica obiectului X aparţine subcategoriei $\mathcal{A}$. Am demonstrat că subcategoria $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ este închisă în raport cu produsele.↑

12.2.5. Vom examina condiţii care permit să afirmăm, că produsul semireflectiv a două subcategorii este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ posedă proprietatea*

$$l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R}).$$

Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. În particular, aceasta are loc când $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

↓ Este suficient de demonstrat că subcategoria $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $B \in \mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \mid, m : X \to B \in \mathcal{M}_f$, şi $l^X : X \to lX$ şi $l^B : B \to lB$ sunt $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci $lB \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $l(m) \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Deci $lX \in \mid \mathcal{R} \mid$, deoarece subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$-subobiecte. ↑

12.2.6. Teoremă. *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

2. Pentru orice $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ are loc $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

↓ 1 ⇒ 3. Subcategoria $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte în virtutea Teoremei12.2.4.

2 ⇒ 1. Evident.

3 ⇒ 2. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Într-adevăr, fie $A \in |\mathcal{R}|, l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Deci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| \subset |\mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ şi $lA \in |\mathcal{H}|$. Dacă $r^{lA} : lA \to rlA$ este $\mathcal{R}$-replica lui lA, atunci $r^{lA} \in \mathcal{I}so$. Deoarece $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte decidem că $A \in |\mathcal{R}|$. ↑

12.2.6*. **Teoremă.** *Fie $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{T} = \mathcal{K} *_{sr} \mathcal{T}$.

2. Pentru orice $\mathcal{H} \in \mathbb{K}$ cu proprietatea $\mathcal{K} \cap \mathcal{T} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ are loc $\mathcal{T} = \mathcal{K} *^{cs} \mathcal{H}$.

3. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{K})$. ↑

12.2.7. Remarcă. *Astfel un element $\mathcal{R}$ al clasei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ poate fi definit prin următoarele două metode:*

1. $\mathcal{R}$ este o subcategorie reflectivă închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte.

2. $\mathcal{R}$ este produsul semireflexiv al subcategoriilor $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

d^*. Un element $\mathcal{T}$ al clasei $\mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$ poate fi definit prin următoarele două metode.

1. $\mathcal{T}$ este o subcategorie coreflectivă închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte şi $(\mu\mathcal{K})$-factorobiecte.

2. $\mathcal{K}$ este produsul semicoreflexiv al subcategoriilor $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$: $\mathcal{T} = \mathcal{L} *^{sc} \mathcal{T}$.

12.2.8. Teoremă. *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

1^*. $\mathcal{K} *^{sc} \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

$\downarrow$ 1.$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Într-adevăr, fie $X \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \mid$. Atunci $lX \in\mid \mathcal{R} \mid$. Astfel $lX \in\mid \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \mid$, iar $l^X : X \to lX \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $X \in \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$. Fie $X \in\mid \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \mid$. Există deci un obiect $A \in\mid \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \mid$ şi un morfism $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Este evident că b este $\mathcal{L}$-replica obiectului X. Deci $X \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \mid$.

2. Fie $X \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \mid$, iar $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-replica lui X. Atunci $lX \in\mid \mathcal{R} \mid$ şi deoarece $l^X \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $X \in\mid \mathcal{A} \mid$.

3. E suficient de demonstrat că subcategoria $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $B \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|, m : X \to B \in \mathcal{M}_f$, iar $l^X : X \to lX$ şi $l^B : B \to lB$ sunt $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$l(m) \cdot l^X = l^B \cdot m. \tag{1}$$

Pe morfismele l^X şi m construim pătratul cocartezian

$$u \cdot l^X = v \cdot m. \tag{2}$$

Atunci

$$l(m) = t \cdot u, \tag{3}$$

$$l^B = t \cdot v \tag{4}$$

pentru un morfism $t : P \to lB$.

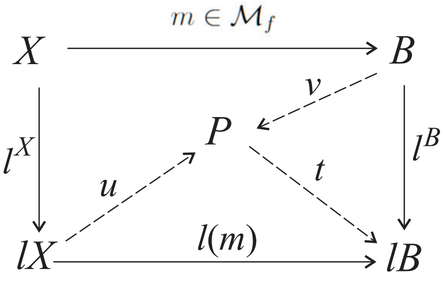


Figura 12.2.1

Avem $l^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $v \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci din egalitatea (4) deducem că şi $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $P \in\mid \mathcal{R} \mid$, deoarece $lB \in\mid \mathcal{R} \mid$, iar $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Mai departe, clasa $\mathcal{M}_f$ este stabilă la dreapta. Deci $u \in \mathcal{M}_f$ şi $P \in\mid \mathcal{R} \mid$. Am demonstrat că $lX \in\mid \mathcal{R} \mid$, şi $X \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \mid$.

4. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Fie $X \in \left|\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}\right|$. Atunci $lX \in\mid \mathcal{R} \mid$. Astfel $lX \in\mid \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \mid$ şi l^X este $(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$-replica acestui obiect. Am demonstrat că $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

$\rho(\mathcal{L}, \mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$. Fie că $\mathcal{L}$-replica şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$-replica obiectului X coincid. Astfel $l^X : X \to lX$ este şi $(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$-replica obiectului X. Deci $lX \in\mid \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \mid$. Atunci $lX \in\mid \mathcal{R} \mid$, şi $X \in \left|\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}\right|$. $\uparrow$

12.2.9. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci:*

1. Subcategoria $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma$ este închisă în raport cu $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$-subobiecte: $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$, adică $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^{sm}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$.

3. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. $\Gamma *_{sr} \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$.

5. $\Gamma *_{sr} \mathcal{L} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Gamma)$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \mid, b : X \to A \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, iar $l^X : X \to lX$ şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$l(b) \cdot l^X = l^A \cdot b. \tag{1}$$

Deoarece $l^A, b \in \mathcal{E}_u$, rezultă că $l(b) \in \mathcal{E}_u$. Mai departe, $l^A \cdot b \in \mathcal{M}_u$, adică $l(b) \cdot l^X \in \mathcal{M}_u$ şi $l^X \in \mathcal{E}pi$. Deci $l(b) \in \mathcal{M}_u$. Astfel $l(b) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ şi $lA \in\mid \Gamma \mid$. Deci şi $lX \in\mid \Gamma \mid$, iar $X \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \mid$.

2. Fie $A \in\mid \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \mid$. Atunci $lA \in |\Gamma|$. Deci şi $A \in |\Gamma|$.

3. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, atunci $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (Propoziţia 6.5.9). Astfel se îndeplinesc condiţiile Teoremei 12.2.8 p.3.

4. Vezi 12.2.8 p.2.

5. Vezi 12.2.8 p.3. $\uparrow$

12.2.10. Teoremă. *Fie $\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $g : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma, l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}, r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ şi $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L} \cap \Gamma$ functorii reflectori respectivi. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$.

2. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \mathcal{R}$ şi $l \cdot r = p$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Trebuie de demonstrat egalitatea functorială. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $r^X : X \to rX$ şi $p^X : X \to pX$ replicile respective ale acestui obiect, şi $l^{rX} : rX \to lrX$ $\mathcal{L}$-replica obiectului rX. Deoarece $pX \in |\Gamma \cap \mathcal{L}| \subset |\mathcal{L} *_{sr} \Gamma|$, rezultă că

$$p^X = f \cdot r^X \tag{1}$$

pentru un morfism f. Mai departe, $lrX \in \mid \mathcal{L} \cap \Gamma \mid$, deci

$$l^{rX} \cdot r^X = u \cdot p^X \tag{2}$$

pentru un morfism u. Pentru morfismul f există un morfism v astfel încât

$$f = v \cdot l^{rX}. \tag{3}$$

Se verifică uşor că $u = v^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r^X"] \arrow[dr, "p^X"'] & rX \arrow[r, "l^{rX}"] \arrow[d, dashed, "f"'] & lrX \arrow[dl, dashed, shift left, "v"] \\
& pX \arrow[ur, dashed, shift left, "u"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.2.2

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. Fie $A \in \mid \mathcal{R} \mid$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Astfel $lA \in \mid \Gamma \mid$, iar $A \in \mid \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \mid$. $\uparrow$

12.2.11. Definiţie. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Perechea de subcategorii reflective $(\mathcal{B}, \Gamma)$ se numeşte o $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-pereche dacă*

a) $\mathcal{B}$ este o subcategorie $\mathcal{P}$-reflectivă;

b) Γ-replica oricărui obiect al subcategoriei $\mathcal{B}$ aparţine clasei $\mathcal{I}$.

$$X \xrightarrow{b^X \in \mathcal{P}} bX \xrightarrow{g^{bX} \in \mathcal{I}} gbX$$

12.2.12. Exemple. *1. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci pentru orice elemente $\mathcal{B} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$ $(\mathcal{B}, \Gamma)$ este o $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-pereche de subcategorii. În particular, dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, şi $\Gamma_0 \subset \Gamma$, atunci $(\mathcal{B}, \Gamma)$ este o $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$-pereche de subcategorii.*

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare. $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea functorului reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ ne conduce la subcategoria $\mathcal{P}$-reflectivă $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ şi clasa $\bar{G}(\mathcal{R})$.

- $(\mathcal{B}, \Gamma)$ este o $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-pereche de subcategorii, unde $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$.

- $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$ este o $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-pereche de subcategorii, unde $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{B}$.

12.2.13. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{R}_c$ şi $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Dacă $(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ este o $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-pereche de subcategorii reflective, atunci produsul semireflectiv $\mathcal{B} *_{sr} \mathcal{R}$ este o subcategorie $\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$-reflectivă, unde $(\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K}), \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})) = ((\varepsilon\mathcal{L})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$.*

$\downarrow$ Subcategoria $\mathcal{B} *_{sr} \mathcal{L}$ este închisă în raport cu produsele (Teorema 12.2.4). Astfel este suficient de demonstrat că ea este închisă în raport cu $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$-subobiecte. Fie $A \in \mid \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{R} \mid$, şi $m : X \to \mathcal{A} \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$. Examinăm $\mathcal{B}$-replicile acestor obiecte $b^X : X \to bX$ şi $b^A : A \to bA$. Atunci

$$b(m) \cdot b^X = b^A \cdot m. \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "m \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})"] \arrow[d, "b^X"'] & & A \arrow[d, "b^A"] \\
bX \arrow[rr, "b(m)"] \arrow[d, "r^{bX}"'] \arrow[dr, dashed, "g \in \mu\mathcal{K}"] & & bA \\
rbX \arrow[r, "h"] & Y \arrow[ur, dashed, "f \in \mathcal{M}_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.2.3

În această egalitate $b^A \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{M}_u = \mu\mathcal{K}$, şi $m \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K})$. Astfel $b^A \cdot m \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$, adică $b(m) \cdot b^X \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$, į $b^X \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{M}_u \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deoarece clasa $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară, deducem că $b(m) \in \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$. Astfel

$$b(m) = f \cdot g, \tag{2}$$

unde $f \in \mathcal{M}_f$, şi $g \in \mu\mathcal{K}$. Conform ipotezei $bA \in \mid \mathcal{R} \mid$. Astfel deducem că $Y \in \mid \mathcal{R} \mid$.

Fie $r^{bX} : bX \to rbX$ $\mathcal{R}$-replica obiectului respectiv. Atunci

$$g = h \cdot g^{bX} \tag{3}$$

pentru un $h : rbX \to Y$. Deoarece $g \in \mu\mathcal{K}$, şi $r^{bX} \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $r^{bX} \in \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{L})$. Conform ipotezei însă $r^{bX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$. Aşadar $r^{bX} \in \mathcal{I}so$, şi $bX \in \mid \mathcal{R} \mid$. Deci $X \in \mid \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{R} \mid$. $\uparrow$

12.2.14. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Examinăm $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-factorizarea functorului reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$, unde $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Această factorizare ne defineşte subcategoria $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ şi clasa $\bar{G}(\mathcal{R})$.*

Corolar. *Pentru orice element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ produsul semireflectiv $\mathcal{B} *_{sr} \Gamma$ este o subcategorie $\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$-reflectivă.* $\uparrow$

12.2.15. Exerciţii. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.*

Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ (Teorema 12.2.9). Sunt adevărate egalităţile:

1. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))$.

2. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma)$.

3. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{L}*_{sr}\Gamma}(\mathcal{L} \vee (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))$.

4. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{L}*_{sr}\Gamma}(\mathcal{L})$.

12.2.16. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$ *şi* $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. *Atunci* $\mathcal{R} \subset \Gamma$.

2. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci:*

a) $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$;

b) $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$;

c) $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$;

d) $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} *_{sr} \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

12.3. Produsul semireflexiv şi produsul de dreapta

12.3.1. Produsul semireflexiv şi produsul la dreapta. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \mathcal{L}, \Gamma \in \mathbb{R}$ şi fie că aceste subcategorii verifică următoarele condiţii:

1^0. $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$.

2^0. $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

3^0. Functorul $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ este un functor reflector.

4^0. $g(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Notăm $\mathcal{K} *_s (\mathcal{L} \cap \Gamma) = \mathcal{V}, \mathcal{L} \cap \Gamma = \mathcal{T}$, şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ şi $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ functorii reflectori.

12.3.2. Remarcă. *1. Din condiţia* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$, *rezultă, că* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Dacă* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, *atunci* $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, *şi* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mu\tilde{\mathcal{M}}$.

2. Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$. *Atunci în baza Teoremei 11.1.13 functorul* $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ *este un functor reflector (condiţia* 3^0*).*

3. Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ *şi* $\Gamma_0 \subset \Gamma$. *Atunci sunt îndeplinite condiţia* 2^0 *(Propoziţia 6.5.9) şi condiţia* 4^0.

4. Fie $\Gamma_0 \subset \Gamma$, *iar* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$. *Atunci se îndeplineşte condiţia* 4^0.

5. Din condiţiile 1^0 *şi* 2^0 *rezultă că* $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma$ *este o subcategorie reflectivă (Teorema 12.2.8).*

6. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ *o pereche de subcategorii conjugate. Atunci* $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ *şi deci se îndeplineşte condiţia* 1^0. *De asemenea se îndeplineşte condiţia* 3^0 *(Teorema 11.1.13).*

7. Din condiţia 3^0 *rezultă că* $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

8. Referitor la relaţia $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$ *vezi p.11.3.11.*

12.3.3. Lemă. *1. Fie* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *o structură de factorizare,* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u), \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$. *Atunci pentru orice element* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$ *subcategoriile* $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ *şi* Γ *verifică confiţiile* 1^0-3^0 *din din p.12.3.1.*

2. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci subcategoriile $\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{L}$ şi Γ verifică condiţiile 1^0-3^0 din p.12.3.1. În particular, $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma$ este o subcategorie reflectivă închisă în raport cu $\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma)$-factorobiecte şi $(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$-subobiecte.

$\downarrow$ 1. Rămâne de verificat condiţia 2^0: $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$, şi aceasta rezultă din Propoziţia 6.5.9.

2. Condiţia 1^0: $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$. Avem $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u = \mu\tilde{\mathcal{M}}$.

Condiţia 2^0: $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$ conform Propoziţiei 6.5.9.

Condiţia 3^0: functorul $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ este un functor reflector conform Teoremei 11.1.13. $\uparrow$

12.3.4. Lemă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci subcategoriile $\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{L}$ şi Γ verifică condiţiile $1^0 - 3^0$ din p. 12.3.1. Dacă subcategoria $\mathcal{L}$ este închisă în raport cu extensiile: $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$, atunci aceste subcategorii verifică şi condiţia 4^0.* $\uparrow$

12.3.5. Teoremă. *Fie că subcategoriile $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ şi Γ verifică condiţiile 1^0-3^0 din p.12.3.1. Atunci:*

1. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$. În particular, $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma))$, $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

2. $\mathcal{L} \cap \Gamma \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$.

3. $l \cdot v = t$. În particular $l(\mathcal{V}) \subset \mathcal{L} \cap \Gamma$, iar $u^X : vX \to tX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului vX.

4. $v \cdot g = g \cdot v = g \cdot v \cdot g = v$. În particular, functorii v şi g comută: $v \cdot g = g \cdot v$.

5. $v(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. În particular, $v \cdot k = k \cdot t \cdot k$.

Dacă subcategoriile $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ şi Γ verifică condiţiile 1^0-4^0 atunci:

6. $v \cdot l = l \cdot v = g \cdot l = g \cdot l \cdot g = t$. În particular, functorii v şi l comută: $v \cdot l = l \cdot v$.

$\downarrow$ 1. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$. Fie $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \Gamma|$. Atunci $lX \in |\Gamma|$. Astfel $l^X : X \to lX$ este şi $\mathcal{T}$-replica obiectului X, unde $\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \Gamma$. Construim diagrama (PD) pentru obiectul X în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$. În pătratul cocartezian

$$v^X \cdot k^X = k^{vX} \cdot k(t^X), \tag{1}$$

deoarece $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$, rezultă că $k(t^X) \in \mathcal{I}so$, şi cu el şi $v^X \in \mathcal{I}so$. Am demonstrat că $X \in\mid \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \mid$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(l^X)=k(t^X)\in\mathcal{I}so"] \arrow[dd, "k^X"'] & & ktX=klX \arrow[dl, "k^{vX}"'] \arrow[dd, "k^{tX}"] \\
& vX \arrow[dr, "u^X"] & \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "l^X=t^X\in\varepsilon\mathcal{L}\subset\mu\mathcal{K}"] & & lX=tX
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.1

$\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. Pentru un obiect arbitrar X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ examinăm diagrama (PD) în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(t^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & ktX \arrow[dl, "k^{vX}"'] \arrow[dd, "k^{tX}"] & \\
& vX \arrow[rr, "l^{vX}"] \arrow[dr, "u^X"] & & lvX \arrow[dl, dashed, "b^X"] \\
X \arrow[ur, "v^X"] \arrow[rr, "t^X"] & & tX &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.2

Fie $l^{vX} : vX \to lvX$ $\mathcal{L}$-replica obiectului respectiv. Deoarece $tX \in |\mathcal{L}|$, rezultă că

$$u^X = b^X \cdot l^{vX} \tag{2}$$

pentru un morfism b^X. u^X este $\mathcal{T}$-replica obiectului vX (Teorema 11.1.8 p.5), deci $u^X \in \mathcal{M}_u$. Clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, atunci din egalitatea (2), deducem că $b^X \in \mathcal{M}_u$. Avem

$$b^X \cdot l^{vX} \cdot k^{vX} = u^X \cdot k^{vX} = k^{tX}, \tag{3}$$

$$b^X \cdot l^{vX} \cdot k^{vX} = k^{tX}. \tag{4}$$

Deci $b^X \in \mu\mathcal{K}$. Ţinând cont că $tX \in| \Gamma |$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$, conchidem că $lvX \in| \Gamma |$. Astfel am demonstrat că $vX \in| \mathcal{L} *_{sr} \Gamma |$, şi $\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$.

Faptul, că $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma))$, rezultă din Lema 12.3.3 p.2, şi afirmaţia $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$ rezultă din Teorema 11.1.11. Din Teorema 12.2.4 conchidem că $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Incluziunea $\mathcal{L} \cap \Gamma \subset \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$ este evidentă, şi incluziunea $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$ rezultă din 12.2.8 condiţia 2.

3. Să construim diagrama (PD) pentru un obiect arbitrar X în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$. Fie $l^{vX} : vX \to lvX$ $\mathcal{L}$-replica obiectului vX. Deoarece $tX \in| \mathcal{L} |$, rezultă că

$$u^X = f \cdot l^{vX} \tag{5}$$

pentru un morfism f. Mai departe, $vX \in| \mathcal{L} *_{sr} \Gamma |$ conform p.1, deci $lvX \in| \Gamma |$, sau $lvX \in| \mathcal{T} |$. Deoarece u^X este $\mathcal{T}$-replica lui vX, rezultă că

$$l^{vX} = g \cdot u^X \tag{6}$$

pentru un morfism g. Se verifică uşor că

$$f = g^{-1}. \tag{7}$$

4. $v \cdot g = v$. Fie $X \in \mid \mathcal{C}_2\mathcal{V} \mid, g^X : X \to gX$ şi $v^X : X \to vX$ Γ- şi $\mathcal{V}$-replicile lui X. Deoarece $\mathcal{V} \subset \Gamma$ (p.2), rezultă că

$$v^X = h^X \cdot g^X \tag{9}$$

pentru un h^X. În egalitatea scrisă $g^X \in \mathcal{E}pi$, deci h^X este $\mathcal{V}$-replica lui gX.

Egalitatea $g \cdot v = v$ rezultă din faptul că $\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \Gamma$ (p.2). Celelalte egalităţi devin evidente.

5. Fie $A \in \mid \mathcal{K} \mid$ şi construim diagrama (PD) pentru acest obiect în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{T}$. Atunci $k^{vA} \in \mathcal{I}so$.

6. $v \cdot l = t$ (cu condiţia $4^0 : g(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$). Fie $A \in \mid \mathcal{L} \mid$. Atunci $gA = tA$. Examinăm $\mathcal{V}$-replica obiectului $A : v^A : A \to vA$.

Avem

$$t^A = g^A = u^A \cdot v^A. \tag{10}$$

În acelaşi timp $vA \in \mid \Gamma \mid$. Deci

$$v^A = s \cdot g^A \tag{11}$$

pentru un morfism s. Este evident că $p = s^{-1}$. Astfel am demonstrat că $v \cdot l = t$.

Egalitatea $g \cdot l \cdot g = t$ este evidentă.

Astfel $\mathcal{T}$-replica unui obiect poate fi obţinută în doi paşi: $tX = glX$, sau în trei paşi $tX = glgX$.

Din relaţia demonstrată $v \cdot l = t$ şi din p.3, deducem că $v \cdot l = l \cdot v$. Deci functorii v şi l comută. $\uparrow$

12.3.6. Remarcă. *S-a menţionat proprietatea* $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma))$, *deoarece* $\mathcal{L} \cap \Gamma \subset \mathcal{L}$. *Deci* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma)$ *şi clasa* $\varepsilon(\mathcal{L} \cap \Gamma)$ *este, în genere, mai mare decât clasa* $\varepsilon\mathcal{L}$.

12.3.7. Corolar. *Pentru subcategoriile* $\mathcal{L}$ *şi* Γ *ce verifică condiţiile* $1^0 - 3^0$ *şi subcategoriile* $\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \Gamma$ *şi* $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ *replicile unui obiect arbitrar* X *verifică egalităţile indicate în următoarea diagramă comutativă.* $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
& gX \arrow[dd, "v^{gX}"] \arrow[rrd, "t^{gX}"] & & \\
X \arrow[ru, "g^X"] \arrow[rr, "l^X"] \arrow[rrr, bend right, "t^X"'] \arrow[rd, "v^X"'] & & lX \arrow[r, "t^{lX}"] & tX=lvX \\
& vX \arrow[rru, "u^X=l^{vX}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.3

12.3.8. Corolar. *În cazul când subcategoriile $\mathcal{L}$ şi Γ verifică condiţiile $1^0 - 4^0$ avem următoarea diagramă comutativă.*$\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & gX \arrow[rr, "l^{gX}"] \arrow[dd, "v^{gX}"] \arrow[drr, "t^{gX}"] & & lgX \arrow[d, "g^{lgX}"] \\
X \arrow[ur, "g^X"] \arrow[rr, "l^X"] \arrow[dr, "v^X"'] \arrow[rrr, bend right=15, "t^X"'] & & lX \arrow[ur, dashed, "l(g^X)"] \arrow[r, "g^{lX}=v^{lX}"] & tX=glX=glgX=lvX \\
 & vX \arrow[urr, "u^X=l^{vX}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.4

12.3.9. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \mathcal{V} = \mathcal{K} *_d \mathcal{T}$, $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ şi $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}, p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} \cap \mathcal{V}$ functorii reflectori respectivi. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{V}$.

2. $t = l \cdot v$ şi $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.

3. $t^{kX} = k^{tX} \cdot k(t^X)$.

$t^X = u^X \cdot v^X$ pentru $\mathcal{V} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$ sunt $((\varepsilon\mathcal{L})^\perp, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizările morfismelor respective.

$(\mathcal{K} *_d \mathcal{R})$-replica obiectului X se obţine prin $((\varepsilon\mathcal{L})^\perp, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizarea $\mathcal{R}$-replicii:

$$r^X = u^X \cdot v^X.$$

În particular, $k(t^X) : kX \to ktX$ este $(\mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}))$-replica lui kX.

Functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$ comută: $k \cdot v = v \cdot k$.

4. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{V} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{K} *_{dc} (\mathcal{K} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

5. Fie. $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Atunci $r \cdot l = t$.

6. Fie $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ şi $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{I}so$. Atunci functorii $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $l \cdot r = r \cdot l$.

În particular, dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, atunci $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ şi $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{I}so$.

7. Fie $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{R}$-replica şi $\mathcal{V}$-replica obiectelor subcategoriei $\mathcal{L}$ coincid: $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \mathcal{V})$.

În particular, dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, atunci $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\downarrow$ 1.$\mathcal{L} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{V}|$. Atunci v^X şi cu el şi $k(r^X)$ sunt *iso*. Avem

$r^A \cdot (v^A)^{-1} \cdot f^A \cdot k(r^A) = r^A \cdot (v^A)^{-1} \cdot v^A \cdot k^A = r^A \cdot k^A = k^{rA} \cdot k(r^A)$

şi deoarece $k^{rA} \cdot k(r^A) \in \mu\mathcal{K}$, deducem că $r^A \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Odată ce $A \in |\mathcal{L}|$, $r^A \in \mathcal{I}so$ şi $A \in |\mathcal{R}|$.

2. $t = l \cdot v$. Deoarece $l(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

3. $t^{kX} = k^{tX} \cdot k(t^X)$. Menţionăm că $tX \in |\mathcal{T}|$ şi $k^{tX} \cdot k(t^X) \in \mathcal{E}pi$. Să verificăm că orice morfism $f : kX \to Z$ cu $Z \in |\mathcal{T}|$ se extinde prin $k^{tX} \cdot k(t^X)$. Deoarece $Z \in |\mathcal{T}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ şi $l^{kX} = l^X \cdot k^X$, f se extinde prin $l^X \cdot k^X$:

$$f = f_1 \cdot l^X \cdot k^X \tag{1}$$

pentru un f_1. Deaorece $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{V}$, $f_1 \cdot l^X$ se extinde prin v^X.

$$f_1 \cdot l^X = f_2 \cdot v^X \tag{2}$$

pentru un f_2. Mai departe, $tX \in |\mathcal{L}|$ şi $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Deci u^X este $\mathcal{L}$-replica lui vX. Astfel f_2 se extinde prin u^X :

$$f_2 = f_3 \cdot u^X \tag{3}$$

pentru un f_3. Din egalităţile scrise avem:

$$f = f_1 \cdot l^X \cdot k^X = f_2 \cdot v^X \cdot k^X = f_3 \cdot u^X \cdot v^X \cdot k^X = f_3 \cdot t^X \cdot k^X = f_3 \cdot k^{tX} \cdot k(t^X).$$

Aşadar morfismul f_3 prelungeşte f prin $k^{tX} \cdot k(t^X)$.

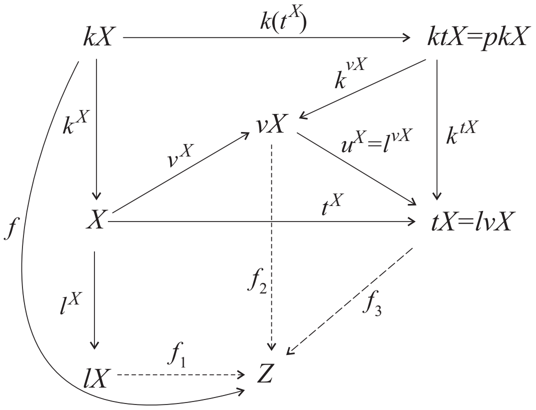


Figura 12.3.5

$r^X = u^X \cdot v^X$ şi $t^X = u^X \cdot v^X$ ca $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizări în virtutea Teoremei 11.1.15 p.6.

$t^{kX} = k^{tX} \cdot k(t^X)$. Avem $k^{tX} \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ şi $k(t^X) : kX \to ktX \in (\varepsilon\mathcal{L})^\top$, deoarece $ktX \in |\mathcal{K}|$.

$k \cdot v = v \cdot k$. Avem $kvX = ktX$ şi $vkX = ktX$ deoarece $\mathcal{V}$-replica obiectului kX se obţine prin $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizarea morfismului t^{kX}.

4. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{V}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$. Atunci $lA \in |\mathcal{R}|$ şi $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{V}|$. Sau $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{V}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{V} \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R})$. În acelaşi mod.

$\mathcal{K} *_d \mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Atunci $t^X = l^{vX} \cdot v^X$ şi $k(t^X) = k(l^{vX} \cdot v^X) = k(v^X)$. Astfel

$$v^X \cdot k^X = f^X \cdot k(r^X)$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele k^X şi r^X cât şi pe morfismele k^X şi $k(t^X)$.

$\mathcal{V} = \mathcal{K} *_{dc} (\mathcal{K} \cap \mathcal{V})$. În primul rând, menţionăm că $\mathcal{K} \cap \mathcal{V} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Pentru un obiect X avem $k^X : kX \to X$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui X, $k(t^X) : kX \to ktX$ este $(\mathcal{K} \cap \mathcal{V})$-replica lui kX şi

$$v^X \cdot k^X = k^{vX} \cdot k(t^X)$$

este pătratul cocartezian construit pe k^X şi $k(t^X)$. Aşadar $\mathcal{R} *_{dc} (\mathcal{K} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{T})$.

Egalitatea $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$ rezultă din Teorema 12.2.8.

5. Deoarece $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, rezultă că $t = r \cdot l$. De asemenea $l(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. Deci $l \cdot v = t$.

6. Cum s-a menţionat mai sus, $l \cdot v = r \cdot l$. Egalitatea $v \cdot l = r \cdot l$ se demonetrează reieşind din faptul, că $tX = rlX = tlX$. Într-adevăr, fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, şi $v^{lX} : lX \to vlX$ $\mathcal{V}$-replica lui lX. Pe morfismele v^X şi l^X construim pătratul cocartezian

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^{lX})=k(t^{lX})"] \arrow[d, "k^X"] \arrow[dd, bend right, "k^{lX}"'] & & ktX \arrow[dl, "k^{vX}"'] \arrow[dd, "k^{tX}"] \\
X \arrow[r, "v^X"] \arrow[d, "l^X"] & vX \arrow[d, "p^X"'] \arrow[dr, "u^X"] & \\
lX \arrow[r, "f=v^{lX}"] \arrow[rr, bend right, "r^{lX}=t^{lX}"'] & P=vlX \arrow[r, dashed, "u^{lX}"] & rlX=tX=tlX
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.6

$$f \cdot l^X = p^X \cdot v^X. \tag{6}$$

Atunci

$$f \cdot k^{lX} = (p^X \cdot k^{vX}) \cdot k(t^X) \tag{7}$$

este pătratul cocartezian construit pe morfismele k^{lX} şi $k(t^X)$. Deci $f = v^{lX}, P = vlX$ şi

$$u^{lX} \cdot p^X = u^X, \tag{8}$$

$$u^{lX} \cdot v^{lX} = r^{lX} \tag{9}$$

pentru un morfism u^{lX}. Deoarece $u^X \in \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că şi $u^{lX} \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi din (9), deducem că $u^{lX} \in \varepsilon\mathcal{R}$. Astfel $u^{lX} \in \varepsilon\mathcal{R} \cap \varepsilon\mathcal{L} = \mathcal{I}so$. Deci $v \cdot l = l \cdot v$.

7. Fie $A \in \mid \mathcal{L} \mid$. Atunci $rA = tA$, şi din condiţia $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $vA \in \mid \mathcal{R} \mid$. Deci $vA = rA$. $\uparrow$

12.3.10. Remarcă. *1. Egalitatea*

$$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$$

indică o construcţie simplă a ($\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$)-replicii unui obiect arbitrar al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$: se construieşte diagrana (PD) a obiectului dat în raport cu subcategoriile $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

2. Unele subcategorii semireflexive au fost construite anume ca produsul semireflectiv al unei subcategorii c-reflective şi a unei completări. S-a apelat la subcategoriile c-reflective $\mathcal{S}, u\mathcal{N}, \mathcal{S}h$ şi la completările $\Gamma_0, q\Gamma_0$ etc.

12.3.11. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p), \mathcal{V} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$, şi $\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \Gamma$. Atunci:*

1. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$.

2.$v \cdot k = k \cdot v = k \cdot g \cdot t$, iar $t \cdot k = t$ şi $g \cdot l = t$. În particular, functorii k şi v comută.

3. Functorii v şi l comută: $v \cdot l = l \cdot v$.

4. $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{V}, \Gamma)$. $\uparrow$

12.3.12. Produsul semireflexiv şi prdusele de dreapta. Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}$. Notăm $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$ următoarea clasă:

A. Dacă $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_c$, atunci $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$.

B. Dacă $\mathcal{P} \notin \mathbb{K}_c$, atunci $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} | \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{P}\}$.

În ambele cazuri, dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$, atunci perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ verifică condiţia (PDC). Să verificăm aceasta în cazul condiţiei B. Examinăm pătratul (PDC) pentru obiectul X.

$$\begin{tikzcd}
pX \arrow[r, "r^{pX}"] \arrow[d, "p^X"'] & rpX \arrow[d, "u^X"] \\
X \arrow[r, "\bar{v}^X"] & \bar{v}X
\end{tikzcd}$$

Figura 12.3.7

Avem $r^{pX} \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci şi $\bar{v}^X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Astfel $\bar{v}^X \cdot p^X \in \mu\mathcal{P}$, sau $r^{pX}, u^X \cdot r^{pX} \in \mu\mathcal{P}$. Deoarece clasa $\mu\mathcal{P}$ este a-coereditară, deducem că $u^X \in \mu\mathcal{P}$. Astfel $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{Q}_\mu\mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Menţionăm următoarele proprietăţi ale clasei $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$.

1. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$ pentru orice $\mathcal{P} \in \mathbb{K}$.

2. Fie $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{M}}$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \subset \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$.

3. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$, atunci şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$.

Pentru $\mathcal{P} \in \mathbb{K}$ notăm $\mathbb{R}^\mu_{\varepsilon f}(\mu\mathcal{P}) = \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) \cap \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$.

Definim aplicaţia

$$\varphi_{dc}(\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}) \quad \text{pentru} \quad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}).$$

Teoremă. *1. Aplicaţia φ_{dc} ia valori în clasa $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$*

$$\varphi_d : \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^\mu_{\varepsilon f}(\mu\mathcal{P}).$$

2. $\varphi_d(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_{\varepsilon f}(\mu\mathcal{P})$.

$\downarrow$ 1. Avem $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}$. Deci $\varepsilon(\mathcal{P} *_{dc} \mathcal{R}) \subset \varepsilon\mathcal{P} \subset \mu\mathcal{P}$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_{\varepsilon f}(\mu\mathcal{P})$. Este suficient de verificat că $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{P} *_{dc} \mathcal{R}|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mu\mathcal{P}$. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$, rezultă că $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.3.13. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$. Atunci $\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ este o subcategorie reflectivă a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

Notăm $\varphi_d(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$.

Teoremă. *1. Aplicaţia φ_d ia valori în clasa $\mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$*

$$\varphi_d : \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$$

2. Aplicaţia $\varphi_{dc} \cdot \varphi_d$ ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$

$$\varphi_{dc} \cdot \varphi_d : \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P}).$$

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$. Atunci $\mathcal{R} \subset \varphi_d(\mathcal{R})$ şi $\varepsilon(\varphi_d(\mathcal{R})) \subset \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\mathcal{K}$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^\mu_\varepsilon(\mathcal{P})$. Atunci

$$\varphi_{dc}\varphi_d(\mathcal{R}) = \varphi_{dc}\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}).$$

Este suficient de verificat relaţia

$$\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$$

Într-adevăr, fie $Z \in |\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})|$. Există un obiect $A \in \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})|$ şi un morfism $b_1 : Z \to A \in \mu\mathcal{P}$. Pentru obiectul A există un obiect $B \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b_2 : B \to A \in \mu\mathcal{P}$.

Fie

$$b_1 \cdot b_2' = b_2 \cdot b_1' \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele b_1 şi b_2. Atunci $b_1', b_2' \in \mu\mathcal{P}, P \in \mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ şi $Z \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})|$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "b_1'"] \arrow[d, dashed, "b_2'"'] & B \arrow[d, "b_2"] \\ Z \arrow[r, "b_1"] & A \end{tikzcd}$$

12.4. Subcategorii semireflexive şi structuri de factorizare

12.4.1. Următoarele Teoreme permit de a construi exemple de subcategorii semireflexive.

Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{L})$, unde $\mathcal{L} = \mathcal{S}_\mathcal{M}(\Pi)$. Structura $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ împarte clasa $\mathbb{R}$ în trei subclase (vezi §10.1).

$$\mathbb{R}(\mathcal{E}), \quad \mathbb{R}(\mathcal{M}), \quad \mathbb{R}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$$

Teoremă.

1. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{E})$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$. Atunci $\mathbb{K}(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u) \subset \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.*

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$.

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{E})$. Atunci $\mathbb{K}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{K}_f(\mu\mathcal{K})$.*

3. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$. Atunci $\mathbb{K}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.*

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$.

4. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Atunci $\mathbb{K}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{K}_f(\mu\mathcal{K})$.*

5. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u)$. Atunci $\mathbb{R}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

5 Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}$. Atunci $\mathbb{K}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.*

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

6. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{M})$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\mu\mathcal{K})$. Atunci $\mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

7. Fie clasa $\mathcal{M} \cap \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$ a-coereditară. Atunci pentru orice element $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S}_\mathcal{M}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R}).$$

7. Fie clasa $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ a-ereditară. Atunci pentru orice element $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K}).$$

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \cap\mathcal{M}), A \in |\mathcal{L}|$ şi $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. Dacă $l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X, atunci

$$b = f \cdot l^X \tag{1}$$

pentru un morfism f. Astfel $b \in \mathcal{M}ono$, iar $l^X \in \mathcal{E}_u$ şi deoarece clasa $\mathcal{M}ono$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară, deducem că $f \in \mathcal{M}ono$. Din egalitatea (1), rezultă că $f, l^X \in \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Deci $l^X \in \mathcal{E}$ şi $l^X \in \mathcal{M}$, sau $l^X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$.

2. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}), A \in |\mathcal{L}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Avem egalitatea (1) scrisă mai sus pentru aceeaşi situaţie, unde $b \in \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Deci $l^X \in \mathcal{M}$, şi conform ipotezei 2 $l^X \in \mathcal{E}$. Astfel $l^X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$.

3. Fie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}(\mathcal{E})$. Atunci $\mathcal{L}$ este o subcategorie $\mathcal{E}$-reflectivă, deci închisă în raport cu $\mathcal{M}$-subobiecte. Deoarece $\mu\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, ea este închisă şi în raport cu $(\mu\mathcal{K})$-subobiecte.

4. Fie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}(\mathcal{M}), A \in |\mathcal{L}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Avem egalitatea (1), unde $b \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $l^X \in \mathcal{E}pi$. Deci $l^X \in \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$. Pe de altă parte, $l^X \in \mathcal{M}$. Deci $l^X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{I}so$.

5. Fie $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}(\mathcal{M}), A \in |\mathcal{L}|$ şi $b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$. În egalitatea (1) $b \in \mathcal{M}_u$ şi $l^X \in \mathcal{E}pi$, deci $f \in \mathcal{M}_u$ sau $f \in \mu\mathcal{K}$, şi cu el şi $l^X \in \mu\mathcal{K}$. Definitiv, $l^X \in \mu\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ şi $l^X \in \mathcal{M}$, sau $l^X \in \mathcal{I}so$.

6. Fie X un obiect arbitrar al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $r^X : X \to rX$ şi $l^X : X \to lX$ $\mathcal{R}$ - şi $\mathcal{L}$-replicile lui. Mai departe, dacă $\pi^X : X \to \pi X$ este Π-replica obiectului X, atunci

$$\pi^X = u^X \cdot l^X, \tag{2}$$

$$\pi^X = v^X \cdot r^X \tag{3}$$

pentru două morfisme u^X şi v^X. Deoarece $\mathcal{R}$ este $\mathcal{E}$-reflecrtivă, adică $r^X \perp u^X$, rezultă că

$$l^X = t \cdot r^X \tag{4}$$

$$v^X = u^X \cdot t \tag{5}$$

pentru un morfism t. Din egalitatea (4), rezultă că $r^X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci $X \in |\mathcal{R}|$ şi $\mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

7. Fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica obiectului X, şi

$$r^X = m^X \cdot e^X \tag{6}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea morfismului r^X. Atunci $e^X : X \to eX$ este $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$-replica obiecutului X, şi $m^X : eX \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului eX.

Dacă $b : eX \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$, atunci

$$m^X = t \cdot b \tag{7}$$

pentru un morfism t. Avem $m^X \in \mathcal{M}$. Din egalitatea (7) rezultă că şi $b \in \mathcal{M}$. Definitiv m^X şi b aparţin clasei $\mathcal{M} \cap \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$. Deci şi t aparţine acestei clase, şi $Y \in |\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.4.2. Din p. 4 şi 6 ale Teoremei precedente obţinem:

Corolar. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ o structură de factorizare cu proprietatea $\varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ sau $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. Atunci clasa $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$ constă din toate elementele clasei $\mathbb{R}(\mathcal{M})$ şi unele elemente ale clasei $\mathbb{R}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.* $\uparrow$

12.4.3. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie $\mathcal{I}''(\mathcal{L})$-reflectivă. Mai departe, fie $(E, u) \in |\mathcal{R}|, (E, k(u))$ $\mathcal{K}$-coreplica acestui obiect, şi v o topologie local convexă pe spaţiul E cu proprietatea*

$$u \leq v \leq k(u).$$

Atunci spaţiul (E, v) aparţine subcategoriei $\mathcal{R}$.

$\downarrow$ Rezultă din faptul că $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ şi p. 4 al Teoremei precedente. $\uparrow$

12.4.4. Pentru subcategoria $\mathcal{S}$ a spaţiilor cu topologie slabă

$$(\mathcal{P}''(\mathcal{S}), \mathcal{I}''(\mathcal{S})) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p), \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u,$$

$$\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) = \{\Gamma \in \mathbb{R} | \Gamma_0 \subset \Gamma\},$$

unde Γ_0 este subcategoria spaţiilor complete. Teorema 12.4.1 p. 4 se va scrie

Teoremă. *1.* $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}) = \mathbb{R}^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}) = \mathbb{R}^s(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$.

2. $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *pentru orice* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. $\uparrow$

12.4.5. Exemple. *1. Când subcategoria $\mathcal{L}$ se măreşte, clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P}''(\mathcal{L}))$ se micşorează, şi clasa $\mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$ se măreşte:*

Fie $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) = (\varepsilon\mathcal{L} \cdot \mathcal{E}_p) \subset (\varepsilon\mathcal{R}) \cdot \mathcal{E}_p = \mathcal{P}''(\mathcal{R})$, şi $\mathcal{I}''(\mathcal{R}) \subset \mathcal{I}''(\mathcal{L})$.

2. În cazul structurii de factorizare $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ p.1 al Teoremei 12.4.1 se va scrie:*

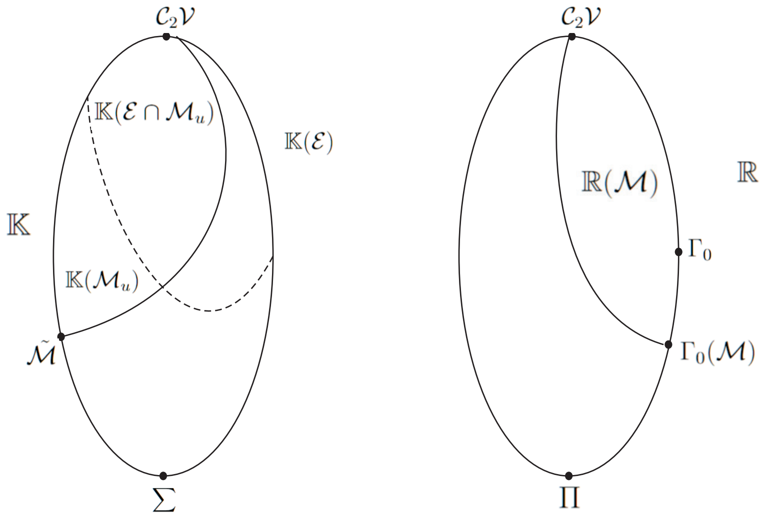
$$\mathbb{K}(\mathcal{M}_u) \subset \mathbb{K}_f(\varepsilon(\Gamma_0).$$

Dacă subcategoria coreflectivă $\mathcal{K}$ conţine subcategoria $\tilde{\mathcal{M}}$, atunci ea este închisă în raport cu extensiile. Menţionăm că incluziunea de mai sus poate fi scrisă şi astfel:

Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi $\Gamma_o \subset \Gamma$. Atunci

$$\mathcal{K} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\Gamma).$$

3. Cazul structurii de factorizare $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ cu clasa de injecţii stabilă la dreapta.



$\Gamma_0(\mathcal{M}) = \mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\Pi)$, *unde* $(\mathcal{P},\mathcal{I}) = (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}, (\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M})^{\perp})$, *este cel mai mic element al clasei* $\mathbb{R}(\mathcal{M})$.

4. Cazul structurii de factorizare $(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$. $\mathbb{R}(\mathcal{E}_p \cap \mathcal{M}_u) = \mathbb{R}(\mathcal{I}so) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}, \mathbb{R}(\mathcal{M}_u) = \mathbb{R}$.

12.4.6. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Examinăm condiţiile:*

A. $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

B. $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

C. $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$ *şi* $\mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{I}so$.

D. $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi* $\mu\mathcal{K} \cap \varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{I}so$.

1. *Dacă* $\mathcal{R}$ *este epireflectivă, atunci* $A \Rightarrow B$.

1*. *Dacă* $\mathcal{K}$ *este monocoreflectivă, atunci* $B \Rightarrow A$.

2. *În categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *condiţiile* A *şi* B *sunt echivalente.*

3. *Dacă* $\mathcal{R}$ *este epirefectivă şi clasa* $\mathcal{E}pi$ *este* $\mathcal{M}_u$*-ereditară, atunci din condiţia* C*, rezultă că* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$. *În particular, în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *din condiţia* C*, rezultă că* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

3*. *Dacă* $\mathcal{K}$ *este monoreflectivă şi clasa* $\mathcal{M}ono$ *este* $\mathcal{E}_u$*-coereditară, atunci din condiţia* D *rezultă că* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. *În particular, în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *din condiţia* D *rezultă că* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. $\uparrow$

12.5. Clasa $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$

12.5.1. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. *Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{L})$.

2. Dacă $r^X \in \varepsilon\mathcal{L}$*, atunci* $r^X \in \mathcal{I}so$.

3. $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R})$.

4. Există un element $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{L}_{\rho}(\mathcal{R})$*, astfel încât* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$.

5. Pentru orice obiect X *al categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $r^X \perp \varepsilon\mathcal{L} : \mathcal{U}(\mathcal{R}) \perp \varepsilon\mathcal{L}$.

Sunt adevărate implicaţiile:

$$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1.$$

Dacă $\mathcal{L}$ este o subcategorie c-reflectivă, atunci condiţiile 1-5 sunt echivalente.

$$5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \overset{\mathcal{L}\in\mathbb{R}_c}{\Longrightarrow} 5.$$

↓ $5 \Rightarrow 4$. Dacă $\mathcal{U}(\mathcal{R}) \perp \varepsilon\mathcal{L}$, atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset (\mathcal{U}(\mathcal{R}))^{\llcorner} = \mathcal{I}'(\mathcal{R})$, şi $(\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R})) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$.

$4 \Rightarrow 3$. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ şi $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. Atunci $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R})$.

$3 \Rightarrow 2$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, rezultă că Π-replica $\pi^A : A \to \pi A$ aparţine clasei $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Atunci $\pi^A \cdot b \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$ şi $X \in |\mathcal{R}|$, odată ce subcategria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$-subobiecte.

$2 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Examinăm $\mathcal{R}$-replica lui X. Atunci

$$b = f \cdot r^X \tag{1}$$

pentru un f, de unde rezultă că $r^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $r^X \in \mathcal{I}so$, şi $X \in |\mathcal{R}|$.

$1 \Rightarrow 5$ (cu condiţia $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$). Fie X un obiect arbitrar al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $b : A \to B \in \varepsilon\mathcal{L}$. O să demonstrăm că $r^X \perp b$. Într-adevăr, fie

$$b \cdot u = v \cdot r^X. \tag{2}$$

Pe morfismele b şi v construim pătratul cartezian

$$b \cdot v' = v \cdot b'. \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dd, "u"'] \arrow[dr, dashed, "t"] & & rX \arrow[dd, "v"] \arrow[dl, dashed, bend left, "w"] \\
& P \arrow[ur, dashed, "b'"] \arrow[dl, dashed, "v'"] & \\
A \arrow[rr, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & & B
\end{tikzcd}$$

Figura 12.5.1

Atunci

$$u = v' \cdot t, \tag{4}$$

$$r^X = b' \cdot t \tag{5}$$

pentru un morfism $t : X \to P$. Deoarece $b' \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $rX \in |\mathcal{R}|$, deducem că $P \in |\mathcal{R}|$. Deci

$$t = w \cdot r^X \tag{6}$$

pentru un morfism w. Atunci $v' \cdot w$ este diagonala pătratului (2). $\uparrow$

12.5.2. Corolar [Bn, 1984]. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$, şi $r^X \in \mathcal{E}_u$. Atunci $r^X \in \mathcal{I}so$.* $\uparrow$

12.5.3. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $((\varepsilon\mathcal{L})^\urcorner, \mathcal{M}_f \circ \varepsilon\mathcal{L}))$ este o structură de factorizare (vezi Teorema 9.3.5 p.2).

Propoziţie. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R}$ este o subcategorie $(\varepsilon\mathcal{L})$-reflectivă.

3. $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\mathcal{M}_f \circ \varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte. $\uparrow$

13.5.4. Teoremă. *Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$.

Atunci $1 \Rightarrow 2$. *Dacă $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, atunci* $2 \Rightarrow 1$.

$\downarrow$ $1 \Rightarrow 2$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. Fie $X \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Atunci $l^X = r^X = 1$, iar $X \in |\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})|$.

$\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R}) \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Fie $X \in |\rho(\mathcal{L}, \mathcal{R})|$. Atunci $l^X = r^X : X \to lX = rX$. Deoarece $l^X \in ((\varepsilon\mathcal{L}) \cap (\varepsilon\mathcal{R}))$, şi $rX \in |\mathcal{R}|$, în baza ipotezei 1, deducem că $X \in |\mathcal{R}|$. Deci $r^X = 1$, adică $r^X = l^X = 1$, şi $X \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$ (cu condiţia că $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$). Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. O să demonstrăm că $X \in |\mathcal{R}|$. Fie $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X. Atunci

$$b = f \cdot r^X \tag{1}$$

pentru un morfism f. Deoarece $r^X \in \mathcal{E}pi$, şi $b \in \varepsilon\mathcal{L}$, deducem că $r^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Fie $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-replica obiectului X. Atunci

$$l^X = g \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un morfism $g : rX \to lX$. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ avem

$$r^X = h \cdot l^X \tag{3}$$

pentru un morfism h. Se verifică uşor că $h = g^{-1}$. Astfel $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{L}$-replicile obiectului X coincid: $r^X \sim l^X$. Deci $X \in |\rho(\mathcal{L}), \mathcal{R}| \subset |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.5.5. Remarcă. *Dacă* $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, *atunci* $\mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Incluziunea* $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ *este posibilă, de exemplu, când* $\mathcal{L}$ *este o subcategorie semireflexivă.*

12.5.6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte.

Corolar. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci* $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $(\mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$*-subobiecte.*

2. Fie $\mathcal{L}$ *o subcategorie c-reflectivă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

- $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $\bar{\mathcal{I}}$*-subobiecte, unde*

$$(\bar{\mathcal{P}}(\mathcal{L}), \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{L})) = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{I}}) = ((\mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}))^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L})).$$

- $\mathcal{R}$ *este o subcategorie* $\bar{\mathcal{P}}$*-reflectivă.*

3. Fie $\mathcal{L}$ *o subcategorie c-reflectivă. Atunci* $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}(\bar{\mathcal{P}})$.

4. $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) = \mathbb{R}(\mathcal{E}'_p)$, *unde*

$$(\mathcal{E}'_p, \mathcal{M}'_u) = ((\mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{S}))^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{S})).$$

5. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

- $\Gamma \in \mathbb{R}$ *şi* Γ *este închisă în raport cu* $\mathcal{M}'_u$*-subobiecte.*

- Γ *este o subcategrie* $\mathcal{E}'_p$*-reflectivă.* $\uparrow$

12.5.7. Un element $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ ne conduce la structura de factorizare $(\varepsilon\mathcal{L}, (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$ şi la clasele $\mathbb{R}(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}((\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$, unde

$$\mathbb{R}(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \subset \mathcal{T}\}.$$

Propoziţie. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathcal{H} \in \mathbb{R}((\varepsilon\mathcal{L})^{\perp})$, *şi* $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H}$. *Atunci* $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-subobiecte.*

$\downarrow$ Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi $t^X : X \to tX$ şi $t^A : A \to tA$ $\mathcal{T}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$t^A \cdot b = t(b) \cdot t^X. \tag{1}$$

Mai departe, fie $h^{tX} : tX \to htX$ $\mathcal{H}$-replica lui tX. Deoarece $tA \in |\mathcal{H}|$, rezultă că

$$t(b) = f \cdot t^X \tag{2}$$

pentru un f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] \arrow[d, "t^X"'] & & A \arrow[d, "t^A"] \\
tX \arrow[rr, "t(b)"] \arrow[dr, "h^{tX}"'] & & tA \\
& htX \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.5.2

Avem $t^A, b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $t^X, t(b) \cdot t^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este a-coereditară, rezultă că $t(b) \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi din egalitatea (2), deducem că $h^{tX} \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $h^{tX} \in \varepsilon\mathcal{L} \cap (\varepsilon\mathcal{L})^{\perp} = \mathcal{I}so$. Deci tX, şi cu el X, aparţin subcategoriei $\mathcal{R}$. $\uparrow$

12.5.8. Corolar. *1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Atunci orice $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{S})$-subobiecte.*

2. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. $\uparrow$

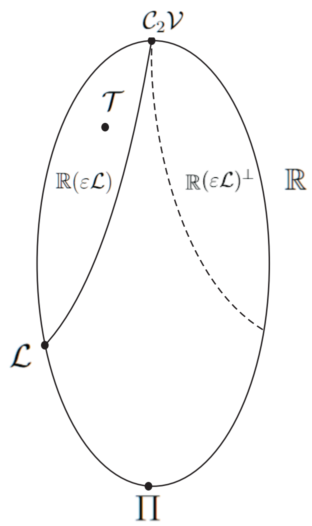


Figura 12.5.3

12.5.9. Propoziţie. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Atunci $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.*

$\downarrow$ Fie $A \in |\Gamma|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, iar $g^X : X \to gX$ Γ-replica lui X. Atunci

$$b = f \cdot g^X \tag{1}$$

pentru un f. Se verifică că $g^X \in \varepsilon\mathcal{L} \cap \mathcal{I}''(\mathcal{L}) = \mathcal{I}so$. $\uparrow$

12.5.10. Corolar. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.* $\uparrow$

12.5.11. Remarcă. *Faptul că* $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$ *este bine ştiut (vezi* [R, R, 1964], *cap. VI, Propoziţia 5). Fie E un spaţiu local convex complet. Atunci E este complet în orice topologie mai fină, dar compatibilă cu aceeaşi dualitate.*

12.5.12. În continuare se fixează o subcategorie reflectivă $\mathcal{L}$ şi structura de factorizare $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$.

Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-factorizarea functorului reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ ne conduce la subcategoria reflectivă $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\mathcal{I}''}(\mathcal{R})$ şi laticea $\bar{G}(\mathcal{R})$ cu cel mai mic element $\mathcal{R}$ şi cel mai mare element $\mathcal{A}''(\mathcal{R}) = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ (vezi 10.3).

Examinăm următoarele condiţii pentru subcategoria $\mathcal{R}$ *în raport cu subcategoria* $\mathcal{L}$ *şi o subcategorie coreflectivă* $\mathcal{K}$.

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Există o $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$*-pereche de subcategorii reflective* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *astfel încât* $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{F}$.

3. Există un element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *astfel încât* $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma$.

4. Pentru orice element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *este adevărată egalitatea* $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma$.

În plus, dacă $\mathcal{K}$ *este o subcategorie coreflectivă, atunci examinăm şi condiţiile:*

5. Există un element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *astfel încât subcategoria* $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ *posedă proprietatea* $(\mathcal{SR})$ *în raport cu x-functorul* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *generat de subcategoria reflectivă* Γ *şi cea coreflecrivă* $\mathcal{K}$.

6. Pentru orice element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *subcategoria* $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ *posedă proprietatea* $(\mathcal{SR})$ *în raport cu x-functorul* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *generat de subcategoria reflectivă* Γ *şi cea coreflectivă* $\mathcal{K}$.

7. $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

8. Există un element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *astfel încât* $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$.

9. Pentru orice element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *este adevărată egalitatea* $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$.

Teoremă. *A. Condiţiile 1-4 sunt echivalente. În plus,* $6 \Rightarrow 5$ *şi* $9 \Rightarrow 8$.

B. Fie $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$. *Atunci* $5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$.

C. Fie $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$. *Atunci* $1 \Rightarrow 6, 1 \Leftrightarrow 7, 1 \Leftrightarrow 9$.

$\downarrow$ Pentru orice element $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ $(\mathcal{B}, \Gamma)$ este o $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-pereche de subcategorii, Astfel implicaţiile $3 \Rightarrow 2, 4 \Rightarrow 3, 6 \Rightarrow 5$ şi $9 \Rightarrow 8$ sunt evidente.

$2 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Examinăm $\mathcal{T}$-replicile acestor obiecte $t^X : X \to tX$ şi $t^A : A \to tA$.

Deoarece $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{F}$, deducem că $tA \in |\mathcal{F}|$. Fie $f^{tX} : tX \to ftX$ $\mathcal{F}$-replica obiectului respectiv. Atunci

$$t^A \cdot b = t(b) \cdot t^X \tag{1}$$

pentru un morfism u, şi

$$t(b) = v \cdot f^{tX} \tag{2}$$

pentru un morfism v. Din aceste egalităţi rezultă egalitatea

$$t^A \cdot b = v \cdot f^{tX} \cdot t^X, \tag{3}$$

unde $t^A \cdot b \in \mathcal{M}_u$, şi $f^{tX} \cdot t^X$ este un epi. Deoarece clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, conchidem că $v \in \mathcal{M}_u$. Mai departe $t^A \cdot b \in \mathcal{P}''$. Deci $v \cdot f^{tX} \cdot t^X \in \mathcal{P}''$, şi $v \in \mathcal{M}_u$. Clasa $\mathcal{P}''$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Astfel $f^{tX} \cdot f^X \in \mathcal{P}''$. Deci $f^{tX} \in \mathcal{P}''$. Pe de altă parte, $f^{tX} \in \mathcal{I}''$, de unde rezultă că $f^{tX} \in \mathcal{I}so$, şi $tX \in |\mathcal{F}|$. Deci $X \in |\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{F}| = |\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "t^X"] \arrow[d, "b"'] & tX \arrow[r, "f^{tX}"] \arrow[d, dashed, "t(b)"] & ftX \arrow[dl, dashed, "v"'] \\
A \arrow[r, "t^A"] & tA &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.5.4

$1 \Rightarrow 4$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, şi $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{B} *_{sr} \Gamma$. Avem $\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \cap \Gamma \subset \mathcal{B} *_{sr} \Gamma$.

$\mathcal{B}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma \subset \mathcal{R}$. Fie $X \in |\mathcal{B} *_{sr} \Gamma|$. Examinăm $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'')$-factorizarea morfismului $r^X : X \to rX$

$$r^X = i^X \cdot b^X. \tag{4}$$

Deoarece $X \in |\mathcal{B} *_{sr} \Gamma|$, rezultă că $bX \in |\mathcal{R}|$. Avem

$$b^X \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{M}_u = ((\varepsilon\mathcal{L}) \circ \mathcal{E}_p) \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{L}.$$

Astfel X este un $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiect al obiectului bX ce aparţine subcategoriei $\mathcal{R}$. În baza ipotezei 1 deducem că $X \in |\mathcal{R}|$.

$5 \Rightarrow 6$ (cu condiţia $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$). Fie Γ_1 şi Γ_2 două elemente ale laticei $\bar{G}(\mathcal{R})$. Atunci pentru orice obiect al subcategoriei $\mathcal{B}$ Γ_1- şi Γ_2-replicile lui coincid. Aceasta ne permite să afirmăm că x-functorii generaţi de perechile $(\mathcal{K}, \Gamma_1)$ şi $(\mathcal{K}, \Gamma_2)$ pe obiectele subcategoriei $\mathcal{B}$ coincid.

$6 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, iar $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, rezultă că $kA = tA$. Odată ce

$$k^A = b \cdot f \tag{5}$$

pentru un morfism f, deducem că $X \in |\mathcal{R}|$.

$1 \Rightarrow 6$ (cu condiţia $\mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$). Să verificăm că subcategoria $\mathcal{R}$ verifică condiţia $(t\mathcal{SR})$. Într-adevăr, fie $A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ şi

$$t^A = b \cdot f \tag{6}$$

pentru un morfism f. Deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, rezultă că $t^A = k^A$, şi din egalitatea scrisă, rezultă că $b \in \mu\mathcal{K} \subset \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $X \in |\mathcal{R}|$.

$1 \Leftrightarrow 7$. Deoarece $\mathcal{R} = \mathcal{B} \cap \Gamma$ echivalenta condiţiilor date rezultă din Teorema 11.1.11.

$1 \Leftrightarrow 3$. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, şi $\mathcal{R} \subset \Gamma$, rezultă că

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cap \Gamma \subset \mathcal{L} \cap \Gamma \subset \mathcal{B} \cap \Gamma = \mathcal{R}. \uparrow$$

12.5.13. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ conform p.3 din Teorema precedentă

$$\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{R}) *_{sr} \Gamma.$$

Atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{B}(\mathcal{R}))$. Dacă repetăm construcţia perechii $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ pentru perechea $(\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ nu obţinem nimic nou, deoarece penru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$ şi $(\mathcal{P}''(\mathcal{B}(\mathcal{R})), \mathcal{I}''(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$-factorizările morfismului $r^X : X \to rX$ coincid.

12.5.14. Exemple. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma)$, *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$ *(Teorema 12.4.1 p.4, cazul structurii de factorizare* $(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$*).*

1. Examinăm structura de factorizare $(\mathcal{P}''\mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$. *Deoarece* $\mathcal{P}'' = (\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_u$, *rezultă că* $\mathcal{B}(\Gamma) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\{\Gamma\} = \bar{G}(\Gamma)$. *Deci avem cazul trivial* $\Gamma = \mathcal{C}_2\mathcal{V} *_{sr} \Gamma$.

2. Examinăm structura de factorizare $(\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\Gamma), \mathcal{I}''(\Gamma))$. *Deci* $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *şi* $\{\mathcal{R}\} = \bar{G}(\mathcal{R})$. *La fel avem cazul trivial* $\mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V} *_{sr} \mathcal{R}$.

3. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Atunci* $\Pi \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Dacă* $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *atunci* $\{\Pi\} = \bar{G}(\Pi)$.

4. Dacă $\mathcal{L} = \mathcal{S}$, *atunci* $\Gamma_0 \in \bar{G}(\Pi)$.

12.5.15. O pereche $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ de subcategorii conjugate ne conduce la structura de factorizare

$$(\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K}), \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})) = ((\mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))$$

(vezi 9.3).

Notaţii. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *atunci* $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ *este clasa tuturor structurilor de factorizare* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *cu proprietatea, că* $\mathcal{R}$ *este o subcategorie* $\mathcal{P}$*-reflectivă, şi* $\mathcal{L}$ *o subcategorie* $\mathcal{I}$*-reflectivă. Nu se exclude, ca această clasă să fie vidă.*

12.5.16. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$.

3. Pentru orice subcategorie coreflectivă $\mathcal{T}$ a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu proprietatea $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ rezultă că $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_d \mathcal{R}$.

4. Subcategoria $\mathcal{R}$ verifică condiţia $(\mathcal{SR})$ în raport cu functorul $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$.

5. Subcategoria $\mathcal{R}$ verifică condiţia $(\mathcal{SR})$ în raport cu orice x-functor $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu proprietatea $k \leq t$.

6. $\mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}, \mathcal{L}) \neq \varnothing$.

7. $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$-reflectivă.

8. Subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$-subobiecte.

$\downarrow$ 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3. În virtutea Teoremei 11.1.11.

1 $\Rightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 1. Evident.

1 $\Rightarrow$ 6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte, deci ea este închisă în raport cu $(\mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}))$-subobiecte. Dar $\mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L}) = \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}) = \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$. Astfel $\mathcal{R}$ este o subcategorie $\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$-reflectivă, şi $\mathcal{L}$ o subcategorie $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$-reflectivă. Deci $(\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{K}), \bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K})) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

6 $\Rightarrow$ 1. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Deci clasele $\mu\mathcal{K}$ şi $\mathcal{M}_f$ se includ în clasa $\mathcal{I}$, sau $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{I}$. Astfel subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\mu\mathcal{K}) = (\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte.

1 $\Leftrightarrow$ 7 $\Leftrightarrow$ 8. Evident. $\uparrow$

12.5.17. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{T} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{T})$.* $\uparrow$

12.5.18. Exerciţii. *1. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, şi $\mathcal{E} = (\varepsilon\Gamma)^{\llcorner}$. Atunci subcategoria Γ este închisă în raport cu $\mathcal{E}$-subobiecte.*

2. Examinăm următoarele condiţii pentru $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$:

a) $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{I}'(\mathcal{R})$.

b) $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

Atunci $a \Rightarrow b$. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, atunci $b \Leftrightarrow a$.

3. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{I}so$. Atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $((\varepsilon\mathcal{L})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\varepsilon\mathcal{L})) \in \mathbb{B}$ şi $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}((\varepsilon\mathcal{L})^{\urcorner})$.

12.5.19. Probleme. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), (\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Examinăm subcategoria $\mathcal{B}(\Pi) = \mathcal{L}$ şi clasa $\bar{G}(\Pi)$.*

1. Dacă $\mathcal{L} \neq \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, atunci clasa $G(\Pi)$ se reduce la un singur element?

2. Să se descrie cel mai mare element $\mathcal{A}''(\Pi)$ al clasei $\bar{G}(\Pi)$.

12.6. Clasa $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$

12.6.1. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. *Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

3. Pentru orice morfism $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ *pătratul* $r(b) \cdot r^X = r^Y \cdot b$ *este cocartezian.*

4. Clasa $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$ *este* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-coereditară.*

5. Există un element $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$, *astfel încât clasa* $\mathcal{M}$ *este* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-coereditară.*

6. $r(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \varepsilon\mathcal{L}$.

Atunci $2 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 3, 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ *şi* $3 \Rightarrow 6$.

Dacă $\mathcal{L}$ *este o subcategorie c-reflectivă, atunci condiţiile 1, 3-5 sunt echivalente.*

Dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, *atunci* $6 \Rightarrow 3$.

$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[drr, Rightarrow] & & 1 \arrow[ll, Rightarrow, "\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c"'] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 2 \arrow[r, Leftrightarrow] & 3 \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
& & 5 & & 6 \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})"']
\end{tikzcd}$$

Figura 12.6.1

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}), A \in |\mathcal{R}|$, iar $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Atunci $lA \in |\mathcal{R}|$, şi $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$.

$\downarrow 1 \Rightarrow 3$. Fie $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi examinăm pătratul

$$r(b) \cdot r^X = r^Y \cdot b. \tag{1}$$

Pe morfismele b şi r^X construim pătratul cocartezian

$$u \cdot r^X = v \cdot b. \tag{2}$$

Atunci

$$r(b) = t \cdot u, \tag{3}$$

$$r^Y = t \cdot v \tag{4}$$

pentru un morfism t. Deoarece $b \in \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că şi $u \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $P \in |\mathcal{R}|$. Astfel

$$v = w \cdot r^X \tag{5}$$

pentru un morfism w. Se verifică că $t = w^{-1}$.

$3 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci pătratul (1) are forma

$$r^X \cdot b = r(b) \cdot 1^A \tag{6}$$

Deci r^X este un izomorfism, şi $X \in |\mathcal{R}|$.

$4 \Rightarrow 5$. Evident.

$5 \Rightarrow 1$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci Π-replcia obiectului A aparţine clasei $\mathcal{M} : \pi^A : A \to \pi A \in \mathcal{M}$. Deoarece πA este un obiect $\mathcal{M}_u$-injectiv, şi $b \in \mathcal{M}_u$, deducem, că

$$\pi^A = f \cdot b. \tag{7}$$

În egalitatea scrisă $\pi^A \in \mathcal{M}$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci $f \in \mathcal{M}$, şi $X \in |\mathcal{R}|$.

$3 \Rightarrow 6$. Deoarece clasa $\varepsilon\mathcal{L}$ este stabilă la dreapta.

$1 \Rightarrow 4$ (cu condiţia că $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$). Fie $m \cdot b \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$, unde $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Trebuie de demonstrat că $m \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$, adică pentru orice obiect A al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $r^A \perp m$. Într-adevăr fie

$$m \cdot f = g \cdot r^A. \tag{8}$$

Construim pătratele carteziene:

pe morfismele m şi g

$$m \cdot g' = g \cdot m', \tag{9}$$

pe morfismele b şi g'

$$b \cdot g'' = g' \cdot b'. \tag{10}$$

Atunci

$$(m \cdot b) \cdot g'' = g \cdot (m' \cdot b') \tag{11}$$

este pătratul cartezian construit pe morfismele $m{\cdot}b$ şi g. Avem $m{\cdot}b \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Deci $m'{\cdot}b' \in \mathcal{I}'(\mathcal{R})$. Deoarece subcategoria $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$-subobiecte, deducem că $P_2 \in |\mathcal{R}|$. Conform ipotezei 1 şi faptului, că $b' \in \varepsilon\mathcal{L}$, conchidem că $P_1 \in |\mathcal{R}|$.

Din egalitatea (8) şi faptul că (6) este un pătrat cartezian, rezultă că există un morfism $t : A \to P_1$ ce verifică egalităţile:

$$f = g' \cdot t, \tag{12}$$

$$r^A = m' \cdot t. \tag{13}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "r^A"] \arrow[dd, "f"] \arrow[dr, dashed, "t"] & & rA \arrow[dl, dashed, shift right, "s"'] \arrow[dd, dashed, "g"] \\
P_2 \arrow[rr, dashed, "b' \in \varepsilon\mathcal{L}"] \arrow[d, "g''"'] & & P_1 \arrow[ur, dashed, shift right, "m'"'] \arrow[dl, dashed, "g'"'] & \\
X \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & Y \arrow[rr, "m"] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Atunci există un morfism $s : rA \to P_1$, astfel încât

$$t = s \cdot r^A. \tag{14}$$

Avem

$$g' \cdot s \cdot r^A = (\text{din } (14)) = g' \cdot t = (\text{din}(12)) = f,$$

i.e.

$$g' \cdot s \cdot r^A = f. \tag{15}$$

Mai departe, $m \cdot b$ este un mono, şi $b \in \mathcal{E}_u$. Deci m de asemenea este un mono. Astfel am demonstrat că $r^A \perp m$, adică clasa $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară.

$6 \Rightarrow 3$ (cu condiţia că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$). Fie $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi examinăm pătratul (1). Pe morfismele b şi rX construim pătratul cocartezian (2). Atunci există un morfism t, care verifică egalităţile (3) şi (4). Deoarece $u \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $r(b) \in \varepsilon\mathcal{L}$ (condiţia 5), din egalitatea (3) deducem că $t \in \varepsilon\mathcal{L}$. În baza ipotezei $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă că $P \in |\mathcal{R}|$. Astfel t este un izomorfism. $\uparrow$

12.6.2. Corolar. *1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Clasa $\mathcal{I}'(\mathcal{R})$ este $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară atunci şi numai atunci, când $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.*

1. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$. Clasa $\mathcal{E}''(\mathcal{T})$ este $(\mu\mathcal{K})$-ereditară atunci ş numai atunci, când $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K})$.*

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ pentru orice $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ există o clasa de structuri de factorizare cu clasa de injecţii $(\varepsilon\mathcal{L})$-coereditară:

$$\{(\mathcal{P}'(\mathcal{R}), \mathcal{I}'(\mathcal{R})) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})\}.$$

2. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ pentru orice $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ există o clasă de structuri de factorizare cu clasa de proiecţii $(\mu\mathcal{K})$-ereditară:*

$$\{(\mathcal{E}''(\mathcal{T}), \mathcal{M}''(\mathcal{T})) | \mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K})\}.$$

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{S})$ atunci şi numai atunci când clasa $\mathcal{J}'(\mathcal{R})$ este $\mathcal{E}_u$-coereditară. $\uparrow$

12.6.3. Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{R}_c$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. $\mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Evident.

$\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$, $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-replica lui kA. Atunci

$$k^A = f \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pentru un f. Deoarece $r^{kA} \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $f \in \mathcal{M}_u$. Deci $f \in \mu\mathcal{K}$. Astfel $f \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Ţinând cont că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $A \in |\mathcal{R}|$.

2 $\Rightarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{K}|$, $r^B : B \to rB$ $\mathcal{R}$-replica lui B, şi $f : B \to X$. Atunci

$$f = b \cdot g \tag{2}$$

pentru un morfism g. Deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, avem

$$g = h \cdot r^B \tag{3}$$

pentru un h. Atunci

$$f = (b \cdot h) \cdot r^B. \tag{4}$$

Deci $X \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r^B"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "f" near start] & rB \arrow[d, dashed, "b \cdot h"] \arrow[dl, dashed, "h"' near start] \\
A \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

12.6.4. Exerciţii. *1. Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *şi clasa* $\mathcal{I}''(\mathcal{R})$ $(\varepsilon\mathcal{L})$*-coereditară. Atunci* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R})$ *şi clasa* $\mathcal{M}$ *este* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-coereditară. Atunci* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

12.7. Clasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

12.7.1. Exerciţii. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Notăm*

$$\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}.$$

Sunt adevărate următoarele incluziuni:

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{U})$.

2. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$. *Atunci* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

3. $\mathcal{F} \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{U})$.

4. $\mathcal{F} \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{L}) \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

5. $\mathcal{F} \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{R})$.

6. $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.

7. $\mathcal{F} \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{U}) \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.

8. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci* $\lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{R}) \subset \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{R})$.

9. Fie $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ *şi* $\lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{R})$. *Atunci* $\mathcal{T} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{U}) = \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$. *În particular,* $\lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{R}) \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{U}) = \lambda_{\mathcal{L}}(\mathcal{U}) \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{U}) = \lambda_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$.

12.7.2. Prezentăm schematic relaţiile între subcategoriile menţionate mai sus în cazul când $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

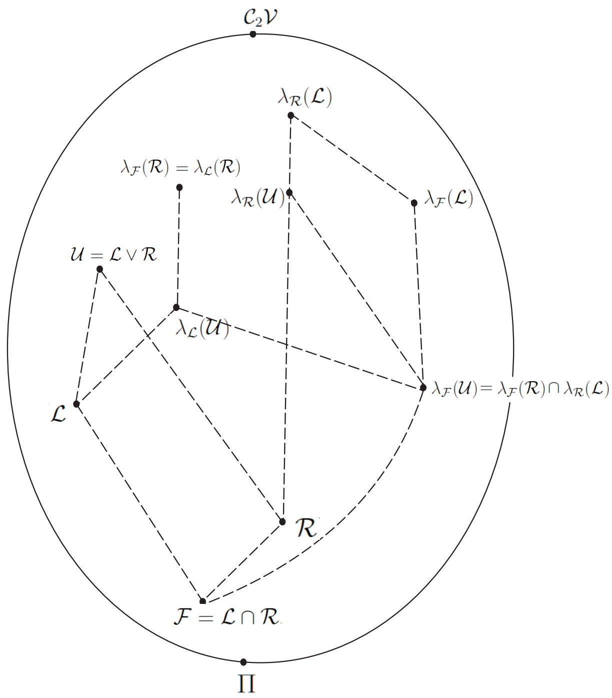


Figura 12.7.1

12.7.3. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, *şi* $\mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $l(\mathcal{R}) = \mathcal{F}$.

3. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

4. Clasa $\mathcal{J}'(\mathcal{R})$ *este* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-coereditară şi pentru orice morfism* $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ *pătratul*

$$r(b) \cdot r^X = r^Y \cdot b$$

este cocartezian.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3. Evident.

3 $\Rightarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Dacă $l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului X, atunci $l^X \cdot b$ este $\mathcal{L}$-replica obiectului A. Deci $lX \in |\mathcal{R}|$. Atunci $X \in |\mathcal{R}|$, deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2 $\Leftrightarrow$ 4. Conform Teoremei 14.3.1 p.5. $\uparrow$

12.7.4. Lemă. *Fie* $\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. *Atunci* $\mathcal{R} = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{B})$.

$\downarrow$ Condiţia $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ este echivalentă cu condiţia $\varepsilon\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{L}$. $\uparrow$

12.7.5. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$.

3. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2.$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica acestui obiect. În virtutea condiţiei întâi, deducem că $lA \in |\mathcal{T}|$. Rămâne de amintit că $\mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$.

$\mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui. Atunci $lA \in |\lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}|$. Deci $lA \in |\mathcal{T}|$, şi $A \in |\mathcal{R}|$.

2 $\Rightarrow$ 3. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui. Atunci $lA \subset |\mathcal{L} \cap \mathcal{T}| \subset |\lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})$. În virtutea condiţiei a doua $A \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}) \subset \mathcal{R}$. Fie $X \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{T})|$ şi $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-replica lui X. Atunci $lX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{T}|$, sau $lX \in |\mathcal{T}|$. Deci $lX \in |\lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{L})|$ şi $X \in |\mathcal{R}|$ conform p.2.

3 $\Rightarrow$ 1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$. Evident.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{T}|$. Deci $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.7.6. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. Atunci $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (Propoziţia 6.5.6), şi $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. *Atunci:*

1. $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)| \Leftrightarrow kA \in |\Gamma|$.

2. $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma) = \lambda_{\Gamma}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)|$, şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Există $B \in |\Gamma|$ şi $b : B \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci

$$k^A = b \cdot f \tag{1}$$

pentru un f. Deoarece $b \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, rezultă că $f \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $kA \in |\Gamma|$. Astfel am verificat că $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)| \Rightarrow kA \in |\Gamma|$. Afirmaţia reciprocă este evidentă.

2. $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma) \subset \lambda_{\Gamma}(\mathcal{K})$. Fie $A \in |\Gamma|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{K}|, g^B : B \to g^B$ Γ-replica lui B, şi $f : B \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Trebuie să arătăm că f se prelungeşte prin g^B. Deoarece $B \in |\mathcal{K}|$, iar

$b \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, rezultă că

$$f = b \cdot h \tag{2}$$

pentru un h. $A \in |\Gamma|$, deci

$$h = t \cdot g^B \tag{3}$$

pentru un h. Atunci

$$f = (b \cdot f) \cdot g^B. \tag{4}$$

$\lambda_\Gamma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)$. Fie $A \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{K})|, k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, şi $g^{kA} : kA \to gkA$ Γ-replica lui kA. Atunci

$$k^A = u \cdot g^{kA} \tag{5}$$

pentru un u. Avem $g^{kA} \in \mathcal{E}pi$, deci $u \in \mathcal{M}_u$, sau $u \in \mu\mathcal{K}$. De unde rezultă că $g^{kA} \in \mu\mathcal{K}$. Avem $g^{kA} \in \mu\mathcal{K} \cap \mathcal{I}''(\mathcal{L}) = \varepsilon\mathcal{L} \cap \mathcal{I}''(\mathcal{L}) = \mathcal{I}so$. Astfel $kA \in |\Gamma|$, şi $A \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma)|$.

12.7.7. Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\Gamma = \lambda_\Gamma(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'(\mathcal{L})) \cap \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. O să verificăm că $\Gamma = \lambda_\Gamma(\mathcal{K})$.

$\Gamma \subset \lambda_\Gamma(\mathcal{K})$. Evident.

$\lambda_\Gamma(\mathcal{K}) \subset \Gamma$. În virtutea Teoremei 10.3.13 $\lambda_\Gamma(\mathcal{K}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\Gamma) = \Gamma$.

2 $\Rightarrow$ 1. În virtutea Teoremei 10.3.9 $\Gamma \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, şi a Propoziţiei 6.5.9 $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

12.7.8. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ o structură de factorizare în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, şi $\mathcal{R}$ o subcategorie reflectivă. Astfel, $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorizarea functorului reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ generează subcategoria $\mathcal{P}$-reflectivă $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ (vezi 7.3.1) şi laticea $\bar{G}(\mathcal{R})$. Fie $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$.

Examinăm următoarele condiţii:

A. $\mathcal{R} = \mathcal{B} \times_{sr} \Gamma$.

B. Există o $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$*-pereche de subcategorii reflective* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathcal{T}$ *a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*, astfel încât* $\mathcal{R} = \mathcal{L} \times_{sr} \mathcal{T}$.

C. Subcategoria $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$*-subobiecte.*

D. Subcategoria $\mathcal{R}$ *verifică condiţia* $(\mathcal{SR})$ *în raport cu functorul* $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$.

E. Subcategoria $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{L})$ *verifică condiţia* $(\mathcal{SR})$ *în raport cu x-functorul* $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$, *generat de subcategoria reflectivă* $\Gamma \in \bar{G}(\mathcal{R})$ *şi cea coreflectivă* $\tilde{\mathcal{M}}$ *a spaţiilor cu topologie Mackey.*

Lema. *1. Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ *şi* $\Gamma \in \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{R})$. *Atunci*

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \times_{sr} \Gamma.$$

2. Pentru obiectele subcategoriei $\mathcal{R}$ condiţia ($\mathcal{SR}m$) coincide cu condiţia ($\mathcal{SR}t$). $\uparrow$

12.7.9. Teorema. *Sunt adevărate următoarele aplicaţii:*

1. $C \Rightarrow A \Rightarrow B$.

2. Fie clasa $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$-ereditară. Atunci $B \Rightarrow C$

3. Fie clasa $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u$. Atunci $E \Rightarrow D \Rightarrow C$.

4. Fie clasa $\mathcal{I}$ stabilă la dreapta. Atunci $D \Rightarrow E$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[d, "\text{Clasa } \mathcal{P} \text{ este } \mathcal{M}_u\text{-ereditară}"] \\
D \arrow[r, "\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u"] \arrow[d, shift right, "\text{Clasa } \mathcal{I} \text{ este stabilă la dreapta}"'] & C \arrow[ul] \\
E \arrow[u, shift right, "\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u"'] \arrow[ur, "\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_u"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.7.2

$\downarrow$ Vom demonstra implicaţiile în baza ipotezelor respective.

$A \Rightarrow B$. Evident.

$C \Rightarrow A$. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \cap \Gamma$, deducem că $\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \times_{sr} \Gamma$. Demonstrăm incluziunea reciprocă. Fie că $X \in |\mathcal{B} \times_{sr} \Gamma|$. Atunci $b^X : X \to bX \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$, şi $bX \in |\Gamma|$. Deci $bX \in |\mathcal{R}|$. Astfel X este un $(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$-subobiecte al obiectului $bX \in |\mathcal{R}|$. Deci $X \in |\mathcal{R}|$.

$B \Rightarrow C$. Fie $f : Y \to X \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$ şi $X \in |\mathcal{R}|$. Examinăm $\mathcal{L}$-replicile obiectelor X şi Y : $l^X : X \to lX$ şi $l^Y : Y \to lY$. Fie $t^{lY} : lY \to tlY$ $\mathcal{T}$-replica obiectului lY. Atunci $l^X \in \mathcal{P}, t^{lY} \in \mathcal{I}$. Deoarece $X \in |\mathcal{R}|$, deducem că $lX \in |\mathcal{T}|$. Aşadar,

$$l^X \cdot f = l(f) \cdot l^Y \tag{1}$$

şi

$$l(f) = h \cdot t^{lY} \tag{2}$$

pentru un morfism h. Deoarece

$$h \cdot t^{lY} \cdot l^Y = l^X \cdot f \in \mathcal{M}_u, \tag{3}$$

iar $t^{lY} \cdot l^Y \in \mathcal{E}pi$ şi clasa $\mathcal{M}_u$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară, rezultă că $h \in \mathcal{M}_u$. În egalitatea (3) $l^X \cdot l(f) \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$, adică $h \cdot t^{lY} \cdot l^Y \in \mathcal{P}$ şi $h \in \mathcal{M}_u$. În baza ipotezei, clasa $\mathcal{P}$ este $\mathcal{M}_u$-ereditară. Deci, $t^{lY} \cdot l^Y \in \mathcal{P}$. De unde rezultă că $t^{lY} \in \mathcal{P}$. Ulterior, $t^{lY} \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{I}so$. Aşadar, $lY \in |\mathcal{T}|$. Deci, $Y \in |\mathcal{R}|$.

$E \Rightarrow D$. În baza Lemei 12.7.8.

$D \Rightarrow C$. Este evident că $(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u) \subset (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$.

$D \Rightarrow E$. Fie $X \in |\mathcal{B}|$. Construim obiectul tX. Fie $g^X : X \to gX$ Γ-replica, $m^{gX} : mgX \to gX$ $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului gX, şi

$$g^X \cdot t^X = m^{gX} \cdot u^X \tag{4}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele g^X şi m^{gX}. Fie $f : Y \to X$ un *mono*, astfel încât

$$t^X = f \cdot g \tag{5}$$

pentru un morfism g. Trebuie să demonstrăm că $Y \in |\mathcal{B}|$. Pe morfismele u^X şi g construim pătratul cocartezian

$$u' \cdot g = g' \cdot u^X \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
tX \arrow[rrr, "u^X"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "t^X"'] & & & mgX \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dd, "m^{gX}"] \\
& Y \arrow[r, dashed, "u'"] \arrow[dl, "f"] & T \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[rrr, "g^X"] & & & gX
\end{tikzcd}$$

Figura 12.7.3

Cum am menţionat, $u^X \in \mathcal{I}$. În continuare, avem

$$m^{gX} = h \cdot g', \tag{7}$$

$$g^X \cdot f = h \cdot u' \tag{8}$$

pentru un morfism h. În pătratul cocartezian (6), $u^X \in \mathcal{I}$, iar clasa $\mathcal{I}$ este stabilă la dreapta. Deci şi $u' \in \mathcal{I}$. De asemenea, $g \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, de unde rezultă că şi $g' \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. În acest caz putem spune că şi $h \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Conform ipotezei, $X \in |\mathcal{B}|$. Deci Γ-replica lui este şi $\mathcal{R}$-replica.

Aşadar, $gX \in |\mathcal{R}|$. Atunci şi $T \in |\mathcal{R}| \subset |\mathcal{B}|$, şi Y ca un $\mathcal{I}$-subobiect al obiectului T, aparţine subcategoriei $\mathcal{B}$. $\uparrow$

12.7.10. Teoremă. *În cazul când* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ *condiţiile* $A - E$ *sunt echivalente.*

$\downarrow$ Clasa $\mathcal{E}_u$ este $\mathcal{M}_p$-ereditară (implicaţiile $B \Rightarrow C$), iar clasa $\mathcal{M}_p$ este stabilă la dreapta (implicaţia $D \Rightarrow C$). Celelalte cazuri sunt evidente. $\uparrow$

12.7.11. Propoziţie. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare cu clasă de proiecţii* $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$-*ereditară,* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u)$ *şi* $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R})$. *Atunci* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\downarrow$ Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, rezultă că $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ şi deci $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiecte. Mai departe, $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_u$ astfel $\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $\mathcal{L}$ şi $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiecte. $\uparrow$

12.7.12. Corolar. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$, *şi* $\mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{R})$. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$.

3. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$. *Atunci* $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$. $\uparrow$

12.7.13. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Atunci $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

$\downarrow$ $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$. Într-adevăr, fie $Z \in |\mathcal{K}|$, $r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-replica lui Z şi $f : Z \to A \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci

$$l^A \cdot f = h \cdot r^Z \tag{1}$$

pentru un h. Deoarece $l^A \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$ conchidem că

$$h = l^A \cdot u \tag{2}$$

pentru un u. Se verifică că

$$f = u \cdot r^Z. \tag{3}$$

$\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$. Fie $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}|$, şi $k^A : kA \to A$ şi $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{K}$-coreplica şi $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Atunci

$$k^A = v \cdot r^{kA}, \tag{4}$$

iar

$$v = k^A \cdot w \tag{5}$$

deoarece $rkA \in |\mathcal{K}|$. Atunci

$$r^{kA} = w^{-1}, \tag{6}$$

şi $kA \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $l^A \cdot k^A$ este $\mathcal{L}$-replica lui kA şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $lA \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.7.14. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$. Notăm $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{E}pi\cap\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ şi $\mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$. Dacă $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replica lui X şi

$$r^X = m^X \cdot b^X \tag{1}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea lui r^X, atunci $m^X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}$, $b^X : X \to bX$ este $\mathcal{B}$-replica lui X şi $m^X : bX \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica lui bX.

$$X \xrightarrow{b^X} bX \xrightarrow{r^X} rX$$

Astfel $\mathcal{B}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} = \mathcal{B} \cap \mathcal{T}$ şi dacă $bX \in |\mathcal{R}|$, atunci $r^X = b^X$.

Propoziţie. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ şi $\mathcal{E} \cap (\varepsilon\mathcal{R}) \subset \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci $\mathcal{R} = \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T}$.*

$\downarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $A \in |\mathcal{B} \cap \mathcal{T}| \subset |\mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T}|$.

$\mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T}|$ şi $b^A : A \to bA$ $\mathcal{B}$-replica lui A. Atunci $bA \in |\mathcal{B} \cap \mathcal{T}| = |\mathcal{R}|$. Deoarece $b^A \in \mathcal{E} \cap (\varepsilon\mathcal{R}) \subset \varepsilon\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă că $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

Corolar. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}), (\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p), \mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{E}pi\cap\mathcal{M}_p}(\mathcal{R}), \mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$. Atunci $\mathcal{B} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ şi $\mathcal{R} = \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{T}$.* $\uparrow$

12.7.15. Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) pentru orice $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ pătratul

$$r(b) \cdot r^X = r^Y \cdot b \tag{1}$$

este cocartezian;

b) $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Fie $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Examinăm următoarele condiţii:

a) pentru orice $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ pătratul (1) este cartezian;

b) pentru orice $Y \in |\mathcal{R}|$ şi orice $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$ pătratul (1) este cocartezian;

c) $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

Atunci $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$.

3. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{L}_\rho(\mathcal{R}), \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M})$, şi clasa $\mathcal{M}$ este $\mathcal{E}pi$-coereditară. Atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Gamma)$.

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, şi $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ functorul reflector. Atunci $t = l \cdot r = l \cdot r \cdot l$.

12.7.16. Exerciţii. *Fie $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, \mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(S), \mathcal{K} = \lambda^*(\mathcal{B}), \mathcal{L} = \lambda(\mathcal{B}), (\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{B}^\top, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$, şi $\bar{\Gamma}_0 = \mathcal{L} \cap \Gamma_0$.*

1. $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{V} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{S}$.

3. Pentru $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}$ avem $\mathcal{V} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

4. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}. \mathcal{V} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{L} \cap \mathcal{H} = \mathcal{S}$.

5. $\mathcal{V} \cap \mathcal{L} \cap \Gamma_0 = \Pi$.

6. $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\bar{\Gamma}_0)$.

7. $\mathcal{V} = \bar{\Gamma}_0 *_{sr} \Pi$. *În particular,* $\mathcal{S} = \Gamma_0 *_{sr} \Pi$.

8. Fie $(E,t) \in \mathcal{S}$, $k^E : (E,k(t)) \to (E,t)$ *$\mathcal{K}$-coreplica, şi* $\pi^E : (E,t) \to ((F,\pi(t))$ *Π-replica lui* (E,t). *Mai departe, fie* (G,u) *un spaţiu local convex pentru care există bimorfismele* $f : (E,k(t)) \to (G,u)$ *şi* $g : (G,u) \to (F,\pi(t))$ *astfel încât*

$$\pi^E \cdot k^E = g \cdot f. \tag{1}$$

Atunci $(G,u) \in |\mathcal{V}|$.

$$\begin{tikzcd}
& (E,t) \arrow[dr, "\pi^E"] & \\
(E,k(t)) \arrow[ur, "k^E"] \arrow[dr, "f"'] & & (F,\pi(t)) \arrow[dl, "g"] \\
& (G,u) &
\end{tikzcd}$$

12.8. Grupoidul $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$

12.8.1. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *şi* $\mathcal{R},\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\downarrow$ $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$, $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{T}|$, şi $f : B \to X$. Trebuie să demonstrăm că f se extinde prin $r^B : B \to rB$. Examinăm pătratul

$$r^B \cdot k^B = k^{rB} \cdot k(r^B). \tag{1}$$

Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}), rB \in |\mathcal{R}|$ şi $k^{rB} \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $krB \in |\mathcal{R}|$, şi din faptul că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că (1) este un pătrat cocartezian (Teorema 11.1.11). $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$, deci

$$b \cdot f = g \cdot r^B \tag{2}$$

pentru un g. Avem $krB \in |\mathcal{K}|$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$. Atunci

$$g \cdot k(r^B) = b \cdot h \tag{3}$$

pentru un h. Verificăm

$$b \cdot f \cdot k^B = (\text{din}(2)) = g \cdot r^B \cdot k^B = (\text{din}(1)) = g \cdot r(k^B) \cdot r^{kB} = (\text{din}(3)) = b \cdot h \cdot r^{kB},$$

i.e.

$$b \cdot f \cdot k^B = b \cdot h \cdot k(r^B), \tag{4}$$

sau

$$f \cdot k^B = h \cdot k(r^B). \tag{5}$$

Ţinând cont că (1) este pătrat cocartezian, obţinem:

$$f = w \cdot r^B, \tag{6}$$

$$h = w \cdot r^{kB}, \tag{7}$$

$$\begin{tikzcd}
kB \arrow[r, "\mathrm{k}(r^B)"] \arrow[d, "k^B"'] & krB \arrow[d, "k^{rB}"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] \\
B \arrow[r, "r^B"] \arrow[d, "f"'] & rB \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\
X \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & A
\end{tikzcd}$$

Figura 12.8.1

$\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|, b_1 : A \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{T}|$, şi $f_1 : B \to Y$. Mai departe, fie $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $b_1 \cdot k^A$ este un $\mathcal{K}$-coreplica lui Y, şi

$$f_1 \cdot k^B = b_1 \cdot k^A \cdot g_1 \tag{8}$$

pentru un g_1. Deoarece $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$ şi $kB \in |\mathcal{T}|$, morfismul $k^A \cdot g_1$ se extinde prin r^{kB} :

$$k^A \cdot g_1 = h_1 \cdot r^{kB}. \tag{9}$$

Avem

$$f_1 \cdot k^B = (\mathrm{din}(8)) = b_1 \cdot k^A \cdot g_1 = (\mathrm{din}(9)) = b_1 \cdot h_1 \cdot r^{kB},$$

i.e.

$$f_1 \cdot k^B = (b_1 \cdot h_1) \cdot r^{kB}. \tag{10}$$

Deoarece (1) este un pătrat cocartezian (Corolarul 11.1.12), rezultă că

$$f_1 = w_1 \cdot r^B, \tag{11}$$

$$b_1 \cdot h_1 = w_1 \cdot r(k^B) \tag{12}$$

pentru un morfism w_1. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & kB \arrow[r, "r^{kB}"] \arrow[d, "k^B"'] \arrow[ddl, dashed, "g_1"'] & rkB \arrow[d, "r(k^B)"] \arrow[ddl, dashed, "h_1"'] \\
 & B \arrow[r, "r^B"] \arrow[dr, "f_1"] & rB \arrow[d, dashed, "w_1"] \\
kY = kA \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "b_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 12.8.2

12.8.2. Notaţii. *Pentru $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ vom defini o operaţie binară $\circ$:*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}).$$

12.8.3. Exemple. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci:*

1.$\mathcal{R} \circ \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \circ \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este element unitate din dreapta.

3. Întotdeauna $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.

4. Dacă $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, atunci $\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

5. Operaţia $\circ$ nu este comutativă.

6. Operaţia $\circ$ nu este asociativă:

$$(\Pi \circ \Pi) \circ \Pi = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \circ \Pi = \mathcal{C}_2\mathcal{V};\ \Pi \circ (\Pi \circ \Pi) = \Pi \circ \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \Pi.$$

7. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

12.8.4. Exerciţii. *Fie $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ un functor reflector*

1. Pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ $\lambda_\Pi(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\mathcal{S})$.

2. Dacă $r(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$, atunci $\lambda_\Pi(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

3. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, atunci $\lambda_\Pi(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

12.8.5.Exerciţii. *1. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$. Atunci $\lambda_\Pi(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.*

2. Fie $\mathcal{L} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}(\mathcal{S}))$. Atunci $\lambda_\Pi(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

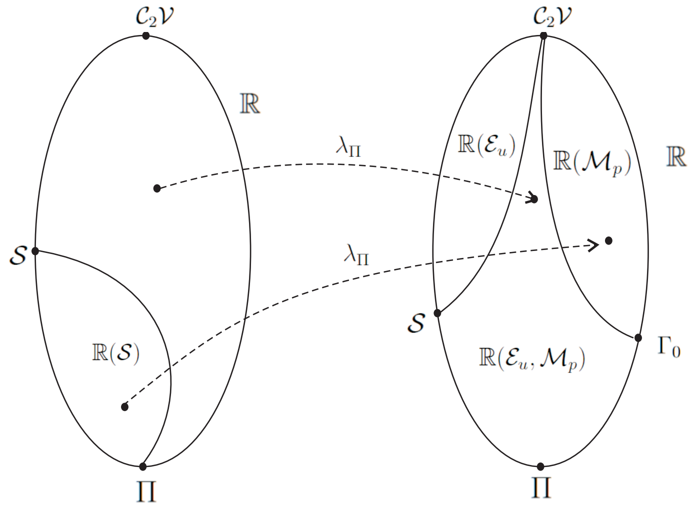


Figura 12.8.3

3. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

12.8.6. În virtutea Teoremei 12.2.7* putem formula rezultatele duale.

Teorema. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

1. Dacă $\mathcal{T}, \mathcal{H} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$, *atunci* $\lambda^*_{\mathcal{T}}(\mathcal{H}) \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

2. $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ *este un grupoid cu operaţia binară* $\mathcal{T} \circ \mathcal{H} = \lambda^*_{\mathcal{T}}(\mathcal{H})$.

3. Avem doi grupoizi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ *egal cu* $\mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

12.9. Subcategorii (c, g)-semireflexive, perechi de subcategorii bisemireflexive şi TTR. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P}$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{P}), \mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$

12.9.1. *Vom stabili următoarele condiţii şi notaţii.*

1. $\mathcal{P}$ *o subcategorie coreflectivă închisă în raport cu produsele:* $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$.

Atunci functorul coreflector $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{P}$ *comută cu produsele (Teorema 6.1.9).*

2. $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ *o pereche de subcategorii conjugate:* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

3. $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{P}$.

Această condiţie este echivalentă cu $\mu\mathcal{K} \subset \mu\mathcal{P}$ *sau* $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$.

4. Γ *o subcategorie închisă în raport cu* $(\mu\mathcal{P})$*-subobiecte:* $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$.

Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{P}$, *atunci* $\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\Gamma)$ *este o subcategorie reflectivă şi* $\mathcal{S}_{\mu\mathcal{P}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$ *(Exerciţiul 6.4.9 p.1).*

Dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{P}$ *şi* $\Gamma_0 \subset \Gamma$, *atunci* $\Gamma \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$ *(Propoziţia 6.5.9).*

Dacă $t_0 : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}on$ *este functorul coreflector şi* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$, *atunci* $g(\mathcal{T}on) \subset \mathcal{T}on$ ([R, R, 1964], *Cap.V., Propoziţia 10).*

5. $\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$ *subcategoria plină a obiectelor* A *pentru care* $lpA \in |\Gamma|$.

6. **Notaţii.** *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$ *şi* $\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \{X \in |\mathcal{T}| \; |p^X \in \varepsilon\mathcal{T}\}$.

Fie $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}|rX = tX \text{ pentru } \forall X \in |\mathcal{P}|\}$,

$\mathcal{G}(\Gamma) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{R}|utA = gtA \text{ pentru } \forall X \in |\mathcal{P}|\}$,

$\mathcal{T}' = \cap\{\mathcal{R}|\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})\}, \quad \mathcal{T}'' = \lambda_{\mathcal{T}}(\mathcal{P})$,

$\Gamma' = \cap\{\mathcal{U}|\mathcal{U} \in \mathcal{G}(\Gamma)\}, \quad \Gamma'' = \lambda_\Gamma\{t^{pX}|tpX \in |\Gamma|\}$.

Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. *Clasa tuturor perechilor* $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ *pentru care* $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{P}$ *o vom nota-o* $\mathbb{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{M}}$.

7. În p.13 al Teoremei o să examinăm condiţia

$$(*) \quad (\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B} \quad \text{şi} \quad \mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u \subset \mu\mathcal{P}.$$

Fie $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. *Atunci pentru orice* $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \subset \mathbb{B}$, *dacă* $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u$ ($\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_u$) *avem* $\mathcal{E} \cap \mathcal{M}_u \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u = \mu\tilde{\mathcal{M}} \subset \mu\mathcal{P}$.

Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi* $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. *Atunci* $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{R} \subset \mu\tilde{\mathcal{M}} \subset \mu\mathcal{P}$.

Fie $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$. *Atunci* $\mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{R} \subset \varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{P}$.

Fie $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R}), \Gamma = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$.

Teoremă. *1.* $\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma) \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P})$.

2. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$ *şi* $\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))$.

3. Dacă $\Gamma \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P})$, *atunci* $\Gamma = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma = \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$.

4. Fie că functorul coreflector $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{P}$ *şi cel reflector* $g : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \Gamma$ *comută* ($p \cdot g = g \cdot p$) *şi* $g(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. *Atunci* $\Gamma \subset \mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$. *Dacă, în plus,* $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\Gamma = \mathcal{I}so$, *atunci* $\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) = \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$.

În particular, dacă $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *şi* $p \cdot g = g \cdot p$, *atunci* $\Gamma \subset \mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) = \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

5. Fie $\Gamma_1 \in \mathbb{R}$ *şi* $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$. *Atunci* $\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma) = \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma_1)$.

6. $\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma) \subset \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$.

7. Fie $\mathcal{L} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$. *Atunci* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1,\Gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma)$.

8. Fie $\varepsilon\Gamma \perp \varepsilon\mathcal{T}$. *Atunci* $\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma) = \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$ *şi* $\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T})) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{T})$. *În particular,* $\mathcal{P}(\mathcal{T},\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))) = \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$.

9. Fie $\varepsilon\Gamma \perp \mu\mathcal{P}$. *Atunci* $\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma) = \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$ *şi* $\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T})) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$.

10. $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{T}' \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{T}''\}$.

11. $\mathcal{G}(\Gamma) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{R} \mid \Gamma' \subset \mathcal{U} \subset \Gamma''\}$.

12. $\mathcal{P}(\mathcal{R},\mathcal{U}) = \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma)$ *pentru orice* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ *şi* $\mathcal{U} \in \mathcal{G}(\Gamma)$.

13. Fie $(\mathcal{E},\mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \subset \mu\mathcal{P}$. *Mai departe, fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}, \mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$ *şi* $\Gamma = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$);

b) $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \Gamma)$.

14. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$, $\mathcal{F} \in \mathbb{R}(\mu\mathcal{P})$ *şi* $\Gamma = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$. *Atunci* $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathcal{F}, \Gamma)$.

În particular, pentru orice $\mathcal{F} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ *avem* $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{T}, \Gamma)$, *unde* $\Gamma = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{F})$.

$\downarrow$ 1. $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) \in \mathbb{R}$. O să verificăm că $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$ este închisă în raport cu produsele şi $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ o familie de obiecte a subcategoriei $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$. Atunci

$$lp\Pi X_i = l\Pi pX_i = \Pi lpX_i$$

prima egalitate scrisă în virtutea faptului că functorul $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{P}$ comută cu produsele (ipoteza 1), a doua egalitate, deoarece $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ şi în acest caz functorul reflector $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ comută cu produsele (Teorema 6.1.6). Astfel $lp\Pi X_i \in |\Gamma|$.

Să verificăm că $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$ şi $i : X \to A \in \mathcal{M}_f$.

Examinăm următoarea diagramă comutativă formată din $\mathcal{P}$-coreplici şi $\mathcal{L}$-replici ale obiectelor respective.

$$i \cdot p^X = p^A \cdot p(i) \tag{1}$$

$$l(i) \cdot l^X = l^A \cdot i \tag{2}$$

$$lp(i) \cdot l^{pX} = l^{pA} \cdot p(i) \tag{3}$$

$$l^X \cdot p^X = l(p^X) \cdot l^{pX}, \tag{4}$$

$$l^A \cdot p^A = l(p^A) \cdot l^{pA}, \tag{5}$$

$$l(i) \cdot l(p^X) = l(p^A) \cdot lp(i). \tag{6}$$

În plus, fie

$$l(i) \cdot b = l(p^A) \cdot i_1 \tag{7}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele $l(i)$ şi $l(p^A)$. Din egalitatea (6) rezultă că

$$l(p^X) = b \cdot b_1 \tag{8}$$

$$lp(i) = i_1 \cdot b_1 \tag{9}$$

pentru un morfism b_1.

$$\begin{tikzcd}
pX \arrow[rr, "p(i)"] \arrow[dr, "l^{pX}"] \arrow[ddd, "p^X"'] & & pA \arrow[dr, "l^{pA}"] \arrow[ddd, "p^A"] & \\
& lpX \arrow[rr, "lp(i)"] \arrow[ddd, "l(p^X)"'] \arrow[dr, dashed, "b_1"] & & lpA \arrow[ddd, "l(p^A)"] \\
& & Z \arrow[ur, dashed, "i_1"] \arrow[ddl, dashed, "b"] & \\
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "l^X"'] & & A \arrow[dr, "l^A"] & \\
& lX \arrow[rr, "l(i)"] & & lA
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.1

Deoarece $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{K}$, rezultă că $l^X \cdot p^X : pX \to lX$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui lX. În egalitatea (4) l^A, p^A şi l^{pA} sunt aplicaţii bijective. Deci şi $l(p^A)$ este la fel. Astfel $b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci $b_1 \cdot l^{pX}$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui Z şi $b_1 \in \mathcal{M}ono$, sau $b_1 \in \mu\mathcal{P}$.

Definitiv, $lpA \in |\Gamma|$ şi $i_1 \in \mathcal{M}_f$. Deci $Z \in |\Gamma|$. $b_1 \in \mu\mathcal{P}$ şi în virtutea ipotezei 4 $lpX \in |\Gamma|$ sau $X \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$. Condiţia $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$ este evidentă.

Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$, $b : X \to A \in \mu\mathcal{P}$ şi $p^X : pX \to X$ $\mathcal{P}$-coreplica lui X. Atunci $b \cdot p^X : pX \to A$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui A, şi $lpX \in \Gamma$. Deci $X \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$.

2. $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \Gamma|$. Atunci $lA \in |\Gamma|$. Examinăm următoarea diagramă comutativă în care toate morfismele sunt bijecţii şi $l(p^A) \cdot l^{pA}$, egal cu $l^A \cdot p^A$, este $\mathcal{P}$-coreplica lui lA. Deci $l(p^A) \in \mu\mathcal{P}$ şi $lA \in |\Gamma|$. Astfel $lpA \in |\Gamma|$ şi $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$.

$$\begin{tikzcd}
pA \arrow[r, "l^{pA}"] \arrow[d, "p^A"'] & lpA \arrow[d, "l(p^A)"] \\
A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.2

Verificăm egalitatea $\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))$.

$\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$. Atunci $lpA \in |\Gamma|$ şi $pA \in |\mathcal{L} *_{sr} \Gamma|$.

Astfel $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma)|$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma)) \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma))|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{P} \cap (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma)|$ şi un morfism $b : A \to Z \in \mu\mathcal{P}$. Atunci b este $\mathcal{P}$-coreplica lui A şi $lZ \in |\Gamma|$.

3. Deoarece $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{P}$, rezultă că $\Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)$. Fie $A \in |\Gamma|$. Atunci $pA \in |\Gamma|$ şi $lpA \in |\Gamma|$. Deci $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma) \subset \Gamma$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L},\Gamma)|$. Atunci $lpA \in |\Gamma|$, deci $pA \in |\Gamma|$ şi $A \in |\Gamma|$.

4. Examinăm produsul de dreapta $\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ al subcategoriilor $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{L} \cap \Gamma$. Deoarece $g(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, avem $\mathcal{L} \cap \Gamma = g(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}$. Revenim la diagrama (PD) pentru un obiect arbitrar X (vezi 11.1). Deoarece $g^{pX} \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $v^X \in \mathcal{E}pi$ şi f^X este $\mathcal{P}$-coreplica lui vX. Astfel $v^X : X \to vX$ este $(\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma))$-replica lui X.

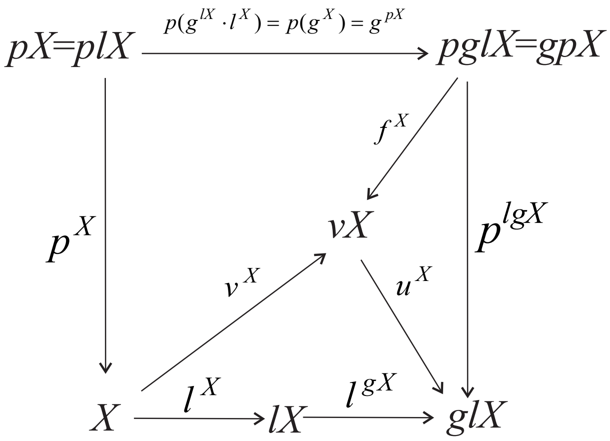


Figura 12.9.3

$\Gamma \subset \mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$. Fie $A \in |\Gamma|$. Atunci $pA \in |\Gamma|$ şi $g^{pA} \in \mathcal{I}so$. Deci şi $v^A \in \mathcal{I}so$, sau $A \in |\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)|$.

$\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{L} \cap \Gamma)$. Fie $l^{gpA} : gpA \to lgpA$ $\mathcal{L}$-replica obiectului gpA, care este $\mathcal{P}$-coreplica lui vA. Deoarece $glA \in |\mathcal{L}|$, deducem că

$$p^{glA} = h \cdot l^{gpA} \tag{10}$$

pentru un h. t^{glA} şi l^{gtA} sunt bijecţii. Deci la fel este şi h. Astfel $h \in \mu\mathcal{T}$, $lgtA \in |\Gamma|$ şi $vA \in |\mathcal{P}(\mathcal{L} \cap \Gamma)|$.

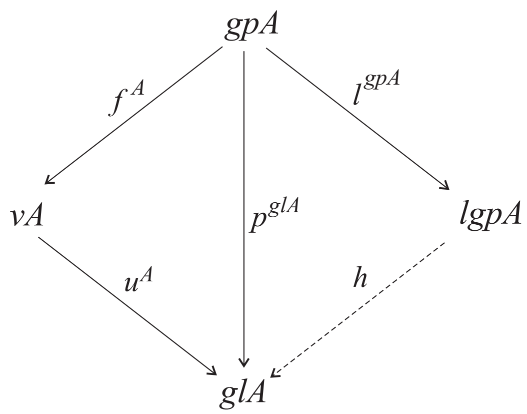


Figura 12.9.4

$\mathcal{R}(\mathcal{L},\Gamma) \subset \mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)$ cu condiţia, că $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\Gamma = \mathcal{I}so$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L} \cap \Gamma)|$. $l^{pA} : pA \to lpA$ şi $lpA \in |\Gamma|$. Atunci

$$l^{pA} = w \cdot g^{pA} \tag{11}$$

pentru un w. Avem

$$l^A \cdot p^A = s \cdot l^{pA} \tag{12}$$

pentru un s, sau

$$l^A \cdot p^A = (s \cdot w) \cdot g^{pA} \tag{13}$$

şi deoarece

$$v^A \cdot p^A = v^A \cdot g^{pA} \tag{14}$$

este un pătrat cocartezian avem

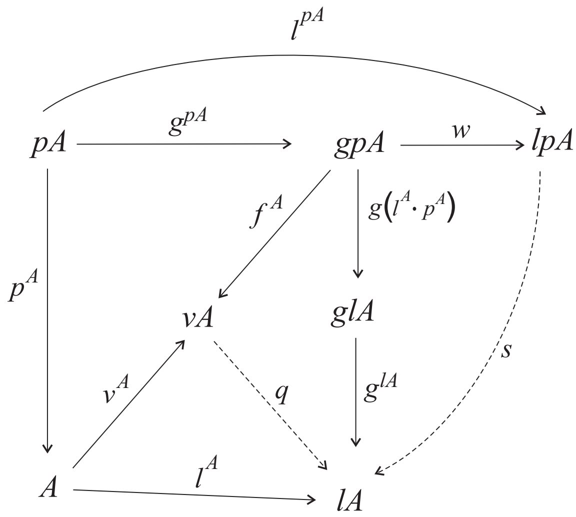


Figura 12.9.4 a)

$$l^A = q \cdot v^A \tag{15}$$

$$s \cdot w = q \cdot f^A \tag{16}$$

pentru un q. $v^A \in \varepsilon\Gamma$ şi din (6) deducem că $v^A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $v^A \in \varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\Gamma = \mathcal{I}so$ şi $A \in |\mathcal{P} *_d (\mathcal{L} \cap \Gamma)|$.

5. $\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma_1)$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma_1)|$. Atunci $tpA \in |\Gamma_1| \subset |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma_1) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma)$. Fie $A \in \mathcal{P}(\mathcal{T},\Gamma_1)$. Atunci $tpA \in |\Gamma_1| \subset \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$. Dacă $g^{tpA} : tpA \to gtpA$ este Γ-replica lui tpA, atunci morfismul $1 : tpA \to tpA$ se extinde prin g^{tpA}, deoarece $tpA \in |\mathcal{H}(\mathcal{T}) \cap \lambda_\Gamma\mathcal{H}(\mathcal{T})|$:

$$\begin{tikzcd} tpA \arrow[r, "g^{tpA}"] \arrow[d, equal, "1"'] & gtpA \arrow[dl, dashed, "f"] \\ tpA & \end{tikzcd}$$

Figura 12.9.5

$$1 = f \cdot g^{tpA} \tag{17}$$

pentru un f. Deci $tpA \in |\Gamma| \subset |\Gamma_1|$.

6. $\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma) \subset \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma)|$ şi vom arăta că $tA \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$. Întradevăr , fie $Z \in |\mathcal{H}(\mathcal{T})|$ şi $f : Z \to tA$. Avem următoarele egalităţi:

$$t^A \cdot p^A = t(p^A) \cdot t^{pA}, \tag{18}$$

$$f \cdot p^Z = t^A \cdot p^A \cdot p^{tA}. \tag{19}$$

Deoarece $p^Z \in \varepsilon\mathcal{L}$, există u astfel încât

$$u \cdot p^Z = t^{pA} \cdot p(t^A). \tag{20}$$

$A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma)|$, deci $tpA \in |\Gamma|$. Astfel u se extinde prin g^Z :

$$u = v \cdot g^Z \tag{21}$$

pentru un v. Avem

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z \cdot p^Z = (\text{din } (21)) = t(p^A) \cdot u \cdot p^Z = (\text{din } (20)) = t(p^A) \cdot t^{pA} \cdot p(t^A) =$$

$$= (\text{din } (18)) = t^A \cdot p^A \cdot p(t^A) = (\text{din } (19)) = f \cdot p^Z,$$

i.e.

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z \cdot p^Z = f \cdot p^Z, \tag{22}$$

sau

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z = f. \tag{23}$$

Astfel f se extinde prin $g^Z, tA \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$ şi $A \in |\mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$.

$$
\begin{tikzcd}
pA \arrow[rrr, "t^{pA}"] \arrow[ddd, "p^A"'] & & & tpA \arrow[ddd, "t(p^A)"] \\
& pZ \arrow[ul, dashed, "p(t^A)"'] \arrow[d, "p^Z \in \varepsilon\mathcal{T}"'] & & \\
& {|\mathcal{H}(\mathcal{T})| \ni Z} \arrow[r, "g^Z"] \arrow[uurr, dashed, "u"] \arrow[drr, "f"] & gZ \arrow[uur, dashed, "v"'] & \\
A \arrow[rrr, "t^A"] & & & tA
\end{tikzcd}
$$

Figura 12.9.6

7. $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1, \Gamma) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_2, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}_1, \Gamma)|$. Atunci $t_1 A \in |\Gamma|$ şi

$$t_1^{pA} = t_1^{tpA} \cdot t^{pA} \tag{24}$$

$$
\begin{tikzcd}
pA \arrow[r, "t^{pA}"] \arrow[rr, bend right, "t_1^{pA}"'] & tpA \arrow[r, "t_1^{tpA}"] & t_1pA
\end{tikzcd}
$$

Atunci $t_1^{tpA} \in \varepsilon\mathcal{T}_1 \subset \varepsilon\mathcal{L}$ şi $tpA \in |\Gamma|$ în virtutea ipotezei 4.

8. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma)|$, $Z \in |\mathcal{H}(\mathcal{T})|$ şi $f : Z \to A$. Să demonstrăm că f se extinde prin Γ-replica lui $Z : g^Z : Z \to gZ$. Morfismul $f \cdot p^Z$ se factorizează prin p^A :

$$f \cdot p^Z = p^A \cdot p(f). \tag{25}$$

Deoarece $p^Z \in \varepsilon\mathcal{T}$ $t^{pA} \cdot p(f)$ se extinde prin p^Z :

$$t^{pA} \cdot p(f) = u \cdot p^Z \tag{26}$$

pentru un u. $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma)|$, deci $tpA \in |\Gamma|$. Astfel u se extinde prin g^Z :

$$u = v \cdot g^Z. \tag{27}$$

Mai avem egalitatea

$$t^A \cdot p^A = t(p^A) \cdot t^{pA}. \tag{28}$$

Deci

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z \cdot p^Z = (\text{din } (27)) = t(p^A) \cdot u \cdot p^Z = (\text{din } (26)) = t(p^A) \cdot t^{pA} \cdot p(f) =$$

$$= (\text{din } (28)) = t^A \cdot p^A \cdot p(f) = (\text{din } (27)) = t^A \cdot f \cdot p^Z$$

i.e

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z \cdot p^Z = t^A \cdot f \cdot p^Z \tag{29}$$

sau

$$t(p^A) \cdot v \cdot g^Z = t^A \cdot f \tag{30}$$

cu $g^Z \in \varepsilon\Gamma$ şi $t^A \in \varepsilon\mathcal{T}$. Astfel $g^Z \perp t^A$ şi

$$f = w \cdot g^Z, \tag{31}$$

$$t(p^A) \cdot v = t^A \cdot w \tag{32}$$

pentru un w. Astfel $A \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$.

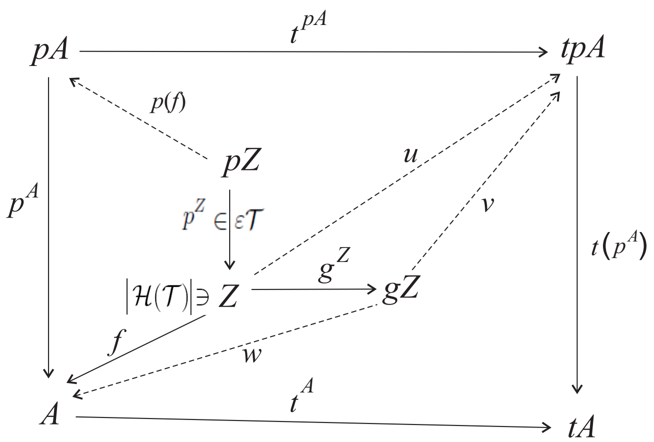


Figura 12.9.7

$\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T})) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{H})$. Fie $A \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$, $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{T}, Z \in |\mathcal{H}(\mathcal{T})|$ şi $f : Z \to X$. Atunci

$$b \cdot f = u \cdot g^Z \tag{33}$$

pentru un $u : gZ \to A$. În egalitatea (34) $g^Z \in \varepsilon\Gamma, b \in \varepsilon\mathcal{T}$ şi $\varepsilon\Gamma \perp \varepsilon\mathcal{T}$. Astfel

$$f = v \cdot g^Z, \tag{34}$$

$$u = b \cdot v \tag{35}$$

pentru un $v : gZ \to X$.

9. În virtutea p.6 $\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma) \subset \mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))$. Să verificăm incluziunea reciprocă cu ipoteza $\varepsilon\Gamma \perp \mu\mathcal{P}$.

Fie $A \in |\mathcal{T} *_{sr} \lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$. $tA \in |\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T}))|$ şi $g^{tpA} : tpA \to gtpA$ Γ-replica lui tpA. Avem $tpA \in |\Gamma|$ şi $t^{pA} : pA \to tpA$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui tpA. Deci $t^{pA} \in \varepsilon\Gamma$ şi $tpA \in |\mathcal{H}(\mathcal{T})|$. Astfel morfismul $t(p^A)$, care aparţine clasei $\mu\mathcal{P}$, se extinde prin g^{tpA} :

$$t(p^A) = f \cdot g^{tpA} \tag{36}$$

pentru un f. Egalitatea (36) poate fi scrisă şi astfel:

$$f \cdot g^{tpA} = t(p^A) \cdot 1, \tag{37}$$

cu $g^{tpA} \in \varepsilon\Gamma, t(p^A) \in \mu\mathcal{P}$ şi $\varepsilon\Gamma \perp \mu\mathcal{P}$. Deci $g^{tpA} \in \mathcal{I}so$, $tpA \in |\Gamma|$ şi $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{T}, \Gamma)|$.

$$\begin{tikzcd}
pA \arrow[r, "t^{pA}"] \arrow[d, "p^A"'] & tpA \arrow[r, "g^{tpA}"] \arrow[d, "t(p^A)"'] & gtpA \arrow[dl, dashed, "f"'] \\
A \arrow[r, "t^A"] & tA &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.8

$\lambda_\Gamma(\mathcal{H}(\mathcal{T})) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{T})$. Se verifică în acelaşi mod ca şi afirmaţia respectivă din p.8.

10. Fie $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$. Atunci $\Gamma' \subset \mathcal{R}$. Să verificăm că $\mathcal{R} \subset \Gamma''$. Dacă $X \in |\mathcal{P}|$, atunci $t^X = r^X$ şi orice morfism din X ce se extinde prin r^X se extinde şi prin t^X. Deci $\mathcal{R} \subset \lambda_\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \Gamma''$.

Reciproc. Este suficient de arătat că $\lambda_\mathcal{T}(\mathcal{P}) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$. Deoarece pentru $A \in |\mathcal{P}|$ $\mathcal{T}$-replica şi $\lambda_\mathcal{T}(\mathcal{P})$-replica coincid.

11. Dacă $\mathcal{U} \in \mathcal{G}(\Gamma)$, atunci $\Gamma' \in \mathcal{U}$. Să verificăm că $\mathcal{U} \subset \Gamma''$. Fie $tpA \in |\Gamma|$. Atunci $tpA \in |\mathcal{U}|$. Astfel $\mathcal{U} \subset \Gamma''$.

Reciproc. Să demonstrăm că $\Gamma'' \in \mathcal{G}(\Gamma)$. Pentru A din $\mathcal{P}, A \in |\Gamma''|$. Dacă $tA \in |\Gamma|$, atunci tA este Γ''-replica lui A şi aparţine lui Γ. Deci $\Gamma'' \in \mathcal{G}(\Gamma)$.

12. Fie $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ şi $\mathcal{U} \in \mathcal{G}(\Gamma)$. Atunci $\mathcal{P}(\mathcal{R},\mathcal{U}) = \{X \mid rpA \in |\mathcal{U}|\} =$ (în virtutea definiţiei clasei $\mathcal{F}(\mathcal{T})) = \{X \mid tpA \in |\mathcal{U}|\} =$(în baza definiţiei clasei $\mathcal{G}(\Gamma)) = \{X \mid tpA \in |\Gamma|\}$.

13. $a \Rightarrow b$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, p^A : pA \to A$ şi $b^{pA} : pA \to bpA$. Atunci $pA \in |\mathcal{R}|$ şi deoarece $b^{pA} \in \mathcal{E} \cap \mu\mathcal{P}$, deducem că şi $bpA \in |\mathcal{R}|$. Astfel $bpA \in |\mathcal{R} \cap \mathcal{B}| \subset |\Gamma|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{B}, \Gamma) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{B}, \Gamma)|$. Atunci $bpA \in |\Gamma|$ sau $bpA \in |\mathcal{B} \cap \Gamma| \subset |\mathcal{R}|$. Deci $pA \in |\mathcal{R}|$ şi $A \in |\mathcal{R}|$.

$b \Rightarrow a$. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $pA = pX$ şi $bpX = bpA \in |\Gamma|$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$. În acelaşi mod.

14. $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi o să arătăm că $fpA \in |\Gamma|$. Avem $pA \in |\mathcal{R}|$ şi $fpA \in |\mathcal{R}|$, deoarece $\mathcal{F} \in \mathbb{R}(\mu\mathcal{R})$. Astfel $fpA \in |\mathcal{R}| \subset |\Gamma|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{F}, \Gamma) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{F}, \Gamma)|$. Atunci $fpA \in |\Gamma|$,

$$\begin{tikzcd}
pA \arrow[r, "f^{pA}"] \arrow[d, "p^A"'] & fpA \arrow[r, "r^{tpA}"] \arrow[d, equal, "1"'] & rfpA \arrow[dl, dashed, "u"] \\
A & fpA &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.9

şi morfismul identic $1 : fpA \to fpA$ se extinde prin $\mathcal{R}$-replica r^{fpA} :

$$1 = u \cdot r^{fpA} \tag{39}$$

pentru un u. Astfel $r^{fpA} \in \mathcal{I}so$ şi $fpA \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $f^{pA}, p^A \in \mu\mathcal{P}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$, deducem că $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.9.2. Propoziţie. *Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. Există $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ astfel încât $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}, \mathcal{T})$.

3. $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ pentru orice $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

$\downarrow$ $1 \Rightarrow 2$. Se verifică uşor, că $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. $\uparrow$

12.9.3. Corolar. *1. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}on}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T}on)$.*

Menţionăm că $\varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K} \subset \mu\tilde{\mathcal{M}} \subset \mu\mathcal{T}on$ pentru orice $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

Deoarece $\Pi \subset \mathcal{T}on$, deducem, că $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T}on)$. Astfel Π este cel mai mic element al clasei $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T}on)$, şi $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ este cel mai mare element.

2. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci $\mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Π este cel mai mic element şi $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cel mai mare element al clasei $\mathbb{R}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$.

Pentru subcategoria $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$ a spaţiilor $\mathcal{B}$ -inductiv semireflexive avem

$$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S}h, \Gamma_0)$$

(vezi 16.4).$\uparrow$

12.9.4. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{P}^{\mu}_{\varepsilon}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$ pentru orice $\Gamma \in \mathcal{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

$\downarrow$ Menţionăm, că $\mathcal{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}\}$ (vezi 13.3).

$1 \Rightarrow 2. \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, p^A : pA \to A$ $\mathcal{P}$-coreplica lui A şi $l^{pA} : pA \to lpA$ $\mathcal{L}$-replica lui pA. Avem $A \in |\mathcal{R}|, p^A \in \mu\mathcal{P}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$. Deci $pA \in |\mathcal{R}|$. Mai departe, $l^{pA} \in \varepsilon\mathcal{L} \subset \mu\mathcal{P}$ şi $pA \in |\mathcal{R}|$. Deci $lpA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \Gamma|$, sau $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$.

$\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma) \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)|$. Atunci $lpA \in |\Gamma|$, sau $lpA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Astfel $lpA \in |\mathcal{R}|$ şi $pA \in |\mathcal{R}|$. Deci $A \in |\mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : X \to pA \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $pX = pA$ şi $lpX = lpA \in |\Gamma|$. Deci $X \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$ şi $b : A \to Y \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $pY = pA$ şi $lpX = lpA \in |\Gamma|$. Deci $Y \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

12.9.5. Corolar. *Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}, \mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ $(\mathcal{S} \subset \mathcal{L})$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaşii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$ pentru orice $\Gamma \in \mathcal{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. $\uparrow$

12.9.6. Corolar. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{U}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{P} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P}$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathcal{L}, \Gamma)$ pentru orice $\Gamma \in \mathcal{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. $\uparrow$

12.9.7. Perechi de subcategorii bisemireflexive şi TTR

Definiţie. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ se numeşte o pereche de subcategorii bisemireflexive, dacă $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{R})$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$. Adică $\mathcal{K}$ este o subcategorie $(\varepsilon\mathcal{R})$-semicoreflexivă şi $\mathcal{R}$ este o subcategorie $(\mu\mathcal{K})$-semireflexivă.*

12.9.8. Teoremă. *1. Fie $\mathcal{R}$ o subcategorie $(\mu\mathcal{K})$-semireflexivă. Atunci $(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}), \mathcal{R})$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

1. Fie $\mathcal{K}$ o subcategorie $(\varepsilon\mathcal{R})$-semicoreflectivă. Atunci $(\mathcal{K}, \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}))$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

$\downarrow$ Notăm $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ cu $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T} \in \mathbb{K}$. Verificăm că $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu sumele. Fie $A_i \in |\mathcal{K}|, b_i : X_i \to A_i \in \varepsilon\mathcal{R}, X = \sqcup X_i. A = \sqcup A_i$ şi $b = \sqcup b_i, i \in \mathcal{I}$. Atunci $A \in |\mathcal{K}|$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{R}$, deoarece $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$ este o structură de factorizare de dreapta. Astfel $X \in |\mathcal{T}|$.

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "b_i \in \varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[d] & A_i \arrow[d] \\
X \arrow[r, "b_i = \amalg b_i \in \varepsilon\mathcal{R}"] & A
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.10

Verificăm că $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu $\mathcal{E}_f$-factorobiecte. Fie $A \in |\mathcal{K}|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $p : X \to Y \in \mathcal{E}_f$. Examinăm pătratul cocartezian

$$p' \cdot b = b' \cdot p \tag{1}$$

construit pe morfismele p şi b. Atunci $p' \in \mathcal{E}_f$ şi $b' \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $P \in |\mathcal{K}|$ şi $Y \in |\mathcal{T}|$. Astfel am demonstrat, că $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[d, "p \in \mathcal{E}_f"'] & A \arrow[d, dashed, "p' \in \mathcal{E}_f"] \\
Y \arrow[r, dashed, "b' \in \varepsilon\mathcal{R}"] & P
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.11

$\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\varepsilon\mathcal{R})$. Evident

$\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$. Fie $A \in |\mathcal{K}|.b : X \to \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $b_1 : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$. Mai departe, fie $r^Y : Y \to rY$ $\mathcal{R}$-replica lui Y. Atunci $r^Y \cdot b_1 : X \to rY$ este $\mathcal{R}$-replica lui X şi

$$r^Y \cdot b_1 = u \cdot b \tag{2}$$

pentru un u. Astfel $u \cdot b \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $u \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi u este $\mathcal{R}$-replica lui $A : u = r^A$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b\in\varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[d, "b_1\in\varepsilon\mathcal{R}"'] & A \arrow[d, dashed, "u=r^A"] \\
Y \arrow[r, "r^Y"] & rY=rX=rA
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.12

Deoarece $\mathcal{R} = \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, deducem că $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. Astfel $rA = |\mathcal{K}|$, adică $rY \in |\mathcal{K}|$, sau $Y \in |\mathcal{T}|$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T})$. Deoarece $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, rezultă că $\mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K}$. Astfel $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T})$.

Corolar. *Fie $\mathcal{K}, \mathcal{P} \in \mathbb{K}, \mathcal{K} \subset \mathcal{P}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$. Atunci $(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{P}), \mathcal{R})$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

12.9.9. Exemple.

1. Deoarece $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mu\tilde{\mathcal{M}} = \varepsilon\mathcal{S}$, deducem că pentru orice $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, dacă $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, atunci $(\mathcal{S}_{\varepsilon l\Gamma_0}(\mathcal{K}), l\Gamma_0)$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive.

2. Subcategoria spaţiilor semireflexive $\mathcal{S}r$ este $\mathcal{S}$-semireflexivă, $\mathcal{S}r = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0$. Astfel pentru $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ $(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}r}(\mathcal{K}), \mathcal{S}r)$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive şi $t(i\mathcal{R}) \subset q\Gamma_0$, unde $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_{\varepsilon i\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ este functorul coreflector.

3. Subcategoria spaţiilor inductiv semireflexive $i\mathcal{R}$ este $\mathcal{S}h$-semireflexivă, unde $\mathcal{S}h$ este subcategoria spaţiilor Schwartz şi $i\mathcal{R} = \mathcal{S}h *_{sr} \Gamma_0$. $(\mathcal{C}h, \mathcal{S}h)$ formează o pereche de subcategorii conjugate. Astfel, dacă $\mathcal{P} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{C}h \subset \mathcal{P}$, atunci $(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}), i\mathcal{R})$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive şi $t(i\mathcal{R}) \subset \Gamma_0$, unde $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_{\varepsilon i\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ este functorul coreflector.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ o TTR. Atunci $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

$\downarrow \mathcal{T} \in \mathbb{K}^s(\varepsilon\mathcal{R})$. Fie $X \in |\mathcal{T}|$ Şi $B : Y \to X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deoarece $X \in |\mathcal{T}|$ şi $\mathcal{T}, \mathcal{R})$ este o TTR, atunci $t^X \in \mathcal{I}so$ şi $t^{rX} \in \mathcal{I}so$. Astfel $rX \in |\mathcal{T}|$. Mai departe, $rX = rY$ şi $t^Y \in \mathcal{I}so$.

$\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{R})$. Fie $X \in |\mathcal{T}|$ şi $b : X \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci $rX = rY \in |\mathcal{T}|$ şi $Y \in |\mathcal{T}|$ în virtutea celor demonstrate mai sus: $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{T})$. Demonstraţie duală.

12.9.10. Propoziţie. *Fie $K \in \mathbb{K}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Dacă $X \in |\mathcal{R}|$, atunci $kX = tX$.

2. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

3. $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$.

4. Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}, X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *şi*

$$k^X = p^X \cdot b^X \tag{1}$$

$(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$*-factorizarea* $\mathcal{K}$*-coreplicii* $k^X : kX \to X$*. Atunci* $p^X : pX \to X$ *este* $\mathcal{T}$*-coreplica obiectului* X*.*

5. Fie $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}, X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *şi*

$$k^X = p^X \cdot b^X \tag{2}$$

$(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$*-factorizarea lui* k^X*. Atunci* $p^X : pX \to X$ *este* $\mathcal{T}$*-coreplica obiectului* X*.*

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\mathcal{R}|, k^X : kX \to X$ şi $t^X : tX \to X$ $\mathcal{K}$-şi $\mathcal{T}$-coreplicile. Există $A \in |\mathcal{K}|$ şi $b : tX \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci

$$t^X = f \cdot b \tag{3}$$

pentru un f şi avem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[r, "k^{tX}"] \arrow[rr, bend left, "k^X"] & tX \arrow[r, "t^X"] \arrow[d, "b"'] & X \\
& A \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.13

Astfel $X \in |\mathcal{R}|$ şi $t^X \in \mu\mathcal{K}$. Deci $tX \in |\mathcal{R}|$ şi $b \in \mathcal{I}so$, sau $tX \in |\mathcal{K}|$. Rezultă că $tX = kX$.

2. Să verificăm incluziunea $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Fie $X \in |\mathcal{T}|$. Există $A \in |\mathcal{K}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Dacă $r^X : X \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica lui X, atunci $r^X \cdot b : A \to rX$ este $\mathcal{R}$=replica lui X şi $r^X \cdot b \in \varepsilon\mathcal{R}$. Astfel $rX = rA \in |\mathcal{K}|$ sau $rX \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$. Aşadar, $X \in \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend left, "r^X"] & A \arrow[r, "r^A"] & rA{=}rX
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.14

3. Fie $A \in |\mathcal{K}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{R}$. Dacă $r^X : X \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica lui X, atunci $r^X \cdot b : A \to rX$ este $\mathcal{R}$-replica lui A. Deci $rA = rA \in |\mathcal{K}|$ şi $X \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend left, "r^Y"] & X \arrow[r, "r^X"] & rX=rA
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.15

4. Deoarece $p^X \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$ şi $p^X \in \mathcal{E}_u$, rezultă că $k^X, p^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deoarece $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, avem $k^X, b^X \in \mathcal{M}_u$. Astfel $b^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{R}) \cap \mathcal{M}_u = ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p) \cap \mathcal{M}_u = \varepsilon\mathcal{R}$ şi $pX \in |\mathcal{T}|$.

Fie $Y \in |\mathcal{T}|$ şi $f : Y \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Există obiectul $A \in |\mathcal{K}|$ şi morfismul $b : A \to Y \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci

$$f \cdot b = k^X \cdot g$$

pentru un g. Sau

$$f \cdot b = p^X \cdot (b^X \cdot g)$$

cu $b \in \varepsilon\mathcal{R} \subset \mathcal{P}''(\mathcal{R})$ şi $p^X \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$. Astfel $b \perp p^X$ şi

$$b^X \cdot g = h \cdot b,$$

$$f = p^X \cdot h$$

pentru un h. Aşadar f se factorizează pentru p^X

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "b \in \varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[d, dashed, "g"'] & & Y \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
kX \arrow[rr, "k^X"] \arrow[dr, dashed, "b^X"'] & pX \arrow[dr, phantom] & X \\
 & pX \arrow[ur, dashed, "p^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.16

5. Deoarece $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, rezultă că $k^X, p^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci $p^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$ şi $pX \in |\mathcal{T}|$. Mai departe se repetă demonstraţia p.4.

12.9.10*. Propiziţie. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{K} \in \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{R}))$ şi $\mathcal{F} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Dacă $X \in |\mathcal{K}|$, atunci $rX = fX$.

2. $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

3. $\mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{R})$.

4. Fie $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}, X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *şi*

$$r^X = m^X \cdot e^x$$

$(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K}))$*-factorizarea* $\mathcal{R}$*-replicii* $r^X : X \to rX$. *Atunci* $e^X : X \to eX$ *este* $\mathcal{F}$*-replica obiectului* X.

5. Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}, X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *şi*

$$r^X = i^X \cdot p^X$$

este $((\mu\mathcal{K})^\top, \mu\mathcal{K})$*-factorizarea* $\mathcal{R}$*-replicii* $r^X : X \to rX$. *Atunci* $p^X : X \to pX$ *este* $\mathcal{F}$*-replica obiectului* X. $\uparrow$

12.9.11. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathcal{T} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. *Atunci:*

1. $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ *este o TTR.*

2. $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. *În particular,* $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{R}))$ *şi* $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ *este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

3. $t \cdot r = r \cdot t = k \cdot r = r \cdot k$.

$\downarrow$ 1. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|, k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coreplica şi $rkX : kX \to rkX$ $\mathcal{R}$-replica obiectelor respective. Pe morfismele k^X şi r^{kX} construim pătratul cocartezian

$$p^X \cdot k^X = h^X \cdot r^{kX}. \tag{1}$$

Deoarece $r^{kX} \in \varepsilon\mathcal{R}$, rezultă că $p^X \in \varepsilon\mathcal{R}$. De asemenea, $k^X \in \mu\mathcal{K}$, deci $h^X \in \mu\mathcal{K}$. În plus, $rkX \in |\mathcal{K}|$. Astfel $h^X : rkX \to P$ este $\mathcal{K}$-coreplica lui P şi $P \in |\mathcal{R}|$. Aşadar $p^X : X \to P \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $P \in |\mathcal{R}|$. Deci p^X este $\mathcal{R}$-replica lui X. Avem $krX = kP = rkX$ şi functorii k şi r comută.

Fie

$$r^X \cdot w^X = k^{rX} \cdot f^X \tag{2}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele $r^X(= p^X)$ şi $k^{rX}(= h^X)$. Atunci

$$k^X = w^X \cdot v^X, \tag{3}$$

$$r^{kX} = f^X \cdot v^X \tag{4}$$

pentru un v^X, care aparţine clasei $\varepsilon\mathcal{R}$. Deci $f^X \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $wX \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})|$. În plus, $v^X \in \mathcal{E}pi$, şi pătratul (1) este cocartezian, astfel şi pătratul (2) este cocartezian.

$$
\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "r^{kX}\in\varepsilon\mathcal{R}"] \arrow[dr, dashed, "v^X"] \arrow[dd, dashed, "k^X"'] & & rkX=krX=trX \arrow[dd, dashed, "h^X=k^{rX}=t^{rX}\in\mu\mathcal{K}"] \\
& wX \arrow[ur, dashed, "f^X"] \arrow[dl, dashed, "w^X"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "p^X=r^X"] & & P=rX
\end{tikzcd}
$$

Figura 12.9.17

Se verifică uşor că egalitatea (3) este $(\varepsilon\mathcal{R}, (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp})$-factorizarea morfismului k^X. În virtutea Propoziţiei 12.9.10 p.5 $w^X : wX \to X$ este $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$-coreplica obiectului X.

Mai departe, $k^{rX} : rkX \to rX \in (\varepsilon\mathcal{R})^{\perp}$. Astfel k^{rX} este $\mathcal{T}$-coreplica obiectului rX şi $f^X : wX \to rkX$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului wX.

Fie $w : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$ functorul coreflector. Atunci $rwX = rkX, wrX = rkX$.

Astfel funcrorii w şi r comută şi $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ este o TTR.

2. În virtutea p.3 al Propoziţiei 12.9.10 este suficient de verificat că $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{K})$. Fie $A \in |\mathcal{K}|$ şi $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Atunci

$$r^X = f \cdot b$$

pentru un f,

$$f = k^{rX} \cdot g$$

pentru un g. Avem

$$k^{rX} \cdot g \cdot b = f \cdot b = r^X,$$

i.e.

$$k^{rX} \cdot g \cdot b = r^X \cdot 1.$$

Există $h : X \to wX$ astfel încât

$$1 = w^X \cdot h,$$

$$g \cdot b = f^X \cdot h,$$

de unde rezultă că $w^X = h^{-1}$. Deci $v^X, k^X \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $X \in |\mathcal{T}|$.

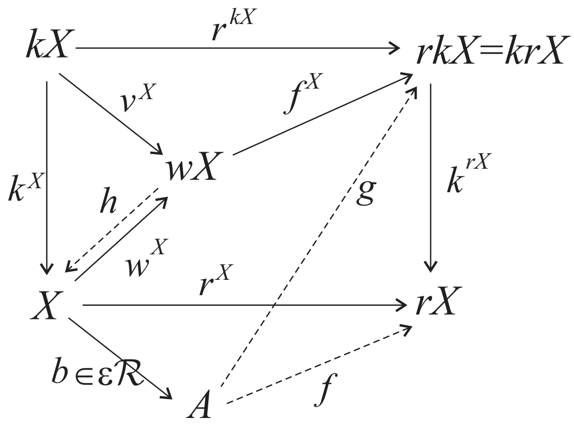


Figura 12.9.18

Deoarece $rkX \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}| \subset |\mathcal{T}|$ şi $h^X \in \mu\mathcal{K}$, deducem că h^X est $\mathcal{T}$-coreplica lui rX : $h^X = t^{rX}$. Mai departe, $f^X \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $rkX \in |\mathcal{K}|$, deci $wX \in |\mathcal{T}|$. În pătratul cartezian (2) $h^X \in \mu\mathcal{T}$, deci $w^X \in \mu\mathcal{T}$ şi w^X este $\mathcal{T}$-coreplica lui X.

Astfel pătratul (2) arată că functorii t şi r comută şi este pătrat cartezian şi cocartezian. Aşadar $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ este o TTR. $\uparrow$

12.9.11*. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ *şi* $\mathcal{F} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{L})$. *Atunci*

1. $(\mathcal{T}, \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{L}))$ *este o TTR.*

2. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{L})$. *În particular,* $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *este o pereche de subcategorii bisemireflexive.*

3. $f \cdot t = t \cdot f = l \cdot t = t \cdot l$.

4. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ *şi*

$$r^X = b^X \cdot p^X$$

este $((\mu\mathcal{K}^\top), \mu\mathcal{K})$*-factorizarea* $\mathcal{R}$*-replicii* $r^X : X \to rX$. *Atunci* $p^X : X \to pX$ *este* $\mathcal{F}$*-replica obiectului* X.

Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{P}), \mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$

12.9.12. Teoremă. *Fie* $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$. *Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_1(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi_p(\mathcal{V}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{V} \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$.

3. Aplicaţiile φ_1 *şi* ψ_1 *sunt reciproc inverse, unde* ψ_1 *este restricţia aplicaţiei* ψ_p *pe subclasa* $\mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P}) \arrow[dr, "\psi_p"] & \\
\mathbb{R}(\mathcal{P}) \arrow[r, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P}) \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\psi_1"] & \mathbb{R}(\mathcal{P})
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.19

$\downarrow$ 1.$\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}$. Să verificăm că subcategoria $\varphi_1(\mathcal{U})$ este închisă în raport cu produsele şi $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $A_i \in |\varphi_1(\mathcal{U})|, i \in \mathcal{J}$. Există obiectele $Z_i \in |\mathcal{U}|$ şi morfismele $b_i : Z_i \to A_i \in \mu\mathcal{P}, i \in \mathcal{J}$. Atunci b_i este $\mathcal{P}$-coreplica lui A.

Fie $b = \Pi b_i : Z \to A$. Atunci b este $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Deoarece $Z \in |\mathcal{U}|$ avem $A \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$.

Fie $A \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$ şi $m : X \to A \in \mathcal{M}_f$. Există $b : Z \to A \in \mu\mathcal{P}$ şi b este $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Fie

$$m \cdot b' = b \cdot m' \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele m şi b. Atunci $b' \cdot p^T : pT \to X$ este $\mathcal{P}$-replica lui X. Dacă $u^{p^T} : pT \to upT$ este $\mathcal{U}$-replica lui pT, atunci

$$m' \cdot p^T = f \cdot u^{pT} \tag{2}$$

pentru un f. Deoarece $u^{pT} \in \mathcal{E}pi$ şi $m' \in \mathcal{M}_f$ ($u^{pT} \perp m'$), atunci

$$p^T = h \cdot u^{pT}, \tag{3}$$

$$f = m' \cdot h \tag{4}$$

pentru un h. Există un morfism $w : upT \to pT$ astfel încât

$$h = p^T \cdot w. \tag{5}$$

Se verifică că $u^{pT} = w^{-1}, p^T \in |\mathcal{U}|$ şi $X \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$.

$$
\begin{tikzcd}
pX{=}pT \arrow[r, shift left, "u^{pT}"] \arrow[d, "p^T"'] & upT \arrow[l, dashed, shift left, "w"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, dashed, "f"] \\
T \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & Z \arrow[d, "b \in \mu\mathcal{P}"] \\
X \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
$$

Figura 12.9.20

$\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Evident.

$\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$. Fie $A \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$ şi $b : A \to X \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $pA \in |\mathcal{U}$ şi $b \cdot p^A : pA \to X$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui X şi $pX \in |\mathcal{U}|$. Deci $X \in |\varphi_1\mathcal{U}|$.

2. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Atunci $p(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ şi $v(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.

3. $\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. Atunci $\psi_1\varphi_1(\mathcal{U}) = \psi_1(\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})$.

$\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})$. Evident.

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Fie $A \in |\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})|$. Atunci $A \in |\mathcal{P}|$ şi $\mathcal{P}$-coreplica lui A (egală cu A) aparţine subcategoriei $\mathcal{U}$ sau $A \in |\mathcal{U}|$.

$\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$. Atunci $\varphi_1\psi_1(\mathcal{V}) = \varphi_1(\mathcal{P} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})$.

$\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})$. Fie $A \in |\mathcal{V}|$ şi $p^A : pA \to A$ este $\mathcal{P}$-replica lui A. Atunci $pA \in |\mathcal{P} \cap \mathcal{V}| \subset |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})|$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P}\cap\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P}\cap\mathcal{V})|$ şi $p^A : pA \to A$ $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Atunci $pA \in |\mathcal{P}\cap\mathcal{V}|$ şi $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})|$.

12.9.12*. Teoremă.*Fie $\mathcal{F} \in \mathbb{R}_s$. Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \bar{\varphi}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{U}) \ \textit{pentru}\ \mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{T})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{T})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\psi}_s(\mathcal{V}) = \mathcal{T} \cap \mathcal{V} \ \textit{pentru}\ \mathcal{V} \in \mathbb{K}_s(\varepsilon\mathcal{T})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{T})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}_1$ şi $\bar{\psi}_1$ sunt reciproc inverse, unde $\bar{\psi}_1$ este restricţia aplicaţiei $\bar{\psi}_s$ pe subclasa $\mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{T})$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{T}) \arrow[dr, "\psi_s"] & \\
\mathbb{K}(\mathcal{T}) \arrow[r, "\overline{\varphi}_1"] & \mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{T}) \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\overline{\psi}_1"] & \mathbb{K}(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

Figura 12.9.21

12.9.13. Probleme. *1. Examinăm perechea de subcategorii conjugate* $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ *şi* $\mathcal{R}$ *una din subcategoriile* $(\varepsilon\mathcal{S})$*-semireflexive:* $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}, \mathcal{S}r$ *sau* $l\Gamma_0$. *De descris subcategoriile* $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{M}})$.

2. Pentru perechea de subcategprii conjugate $(\mathcal{C}h, \mathcal{S}h)$ *de descris subcategoria* $\mathcal{S}_{\varepsilon i\mathcal{R}}(\mathcal{C}h)$.

Capitolul 13. Nucleele subcategoriilor $\mathcal{L}$-semireflexive

13.1. Definiţiile nucleelor

13.1.1. Lemă. *Fie* $\mathcal{L}, \bar{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}$, *şi* $\bar{\Gamma}_1 = \mathcal{R} \vee \bar{\Gamma}_0$. *Examinăm următoarele afirmaţii:*

1. $\bar{g}_0(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

2. $\bar{g}_0(\mathcal{L}) \subset \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{R}$.

4. $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

5. $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \bar{\Gamma}_1)$.

6. $\bar{\Gamma}_0 \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

7. $\mathcal{R} \vee \bar{\Gamma}_0 \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

Sunt adevărate următoarele implicaţii:

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, Rightarrow] & 3 \arrow[r, Leftrightarrow] & 4 & 5 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 6 \arrow[r, Leftrightarrow] & 7 \\
(1+3) \arrow[r, Leftrightarrow] & (1+4) \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[u, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

$\downarrow$ $2 \Rightarrow 3$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0|$. Atunci $A \in |\mathcal{L}|$, şi $A = \bar{g}_0 A \in |\mathcal{R}|$. Deci $A \in |\mathcal{R}|$.

$3 \Leftrightarrow 4$. Evident.

$5 \Rightarrow 4$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0|$. Atunci $A \in |\mathcal{L}|$. Deci $rA = \bar{g}_1 A$. Dar $A \in |\bar{\Gamma}_0|$. Astfel $A = \bar{g}_0 A = \bar{g}_1 A = rA$. Definitiv $A \in |\mathcal{R}|$ şi $A \in |\mathcal{L}|$, sau $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$.

$5 \Rightarrow 6$. Fie $A \in |\mathcal{L}|$. Atunci $\bar{g}_1^A = r^A$. Deci $\bar{\Gamma}_0$-replica obiectului A se extinde prin morfismul r^A. Aceasta-i suficient ca $\bar{\Gamma}_0 \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

$6 \Leftrightarrow 7$. Evident.

$6 \Rightarrow 5$. Fie $A \in |\mathcal{L}|$, $r^A : A \to rA$ şi $\bar{g}_0 : A \to \bar{g}_0 A$ - $\mathcal{R}$- şi Γ_0-replicile obiectului A. Din condiţia 6 rezultă că $\bar{g}_0^A$ se extinde prin morfismul r^A :

$$g_0^A = u \cdot r^A \tag{1}$$

pentru un morfism u. Atunci $r^X = \tilde{g}_1^X$.

$(1+3) \Rightarrow (1+4)$. Rezultă din faptul că condiţiile 3 şi 4 sunt echivalente.

$(1+4) \Rightarrow 2$. Fie $A \in |\mathcal{L}|$. Atunci în baza condiţiei $\bar{g}_0 A \in |\mathcal{L}|$ şi $\bar{g}_0 A \in |\mathcal{L}|$. Deci $\bar{g}_0 A \in |\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0|$, şi $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Astfel $\bar{g}_0 A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$, şi $\bar{g}_0(\mathcal{L}) \subset \mathcal{R}$.

$2 \Rightarrow 5$. Fie $A \in |\mathcal{L}|$. Atunci $\bar{g}_0 A \in |\mathcal{R}|$. Deci $\bar{g}_0^A$ se extinde prin morfismul r^A. $\uparrow$

13.1.2. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ *o structură de factorizare cu clasa* $\mathcal{P}$ $\mathcal{M}_u$*-ereditară,* $\mathcal{H}, \mathcal{L}$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$, *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Examinăm următoarele condiţii:*

1. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

3. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$.

4. $\mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{T})$.

5. $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}$.

6. $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}$.

Atunci $1 \Leftrightarrow 2, 3 \Leftrightarrow 4$ *şi* $3 \Rightarrow 5$.

Fie că există $\bar{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}(\mathcal{I})$, *astfel încât* $\bar{g}_0(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{R}$, *şi* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. *Atunci* $3 \Rightarrow 6$.

$\downarrow 1 \Rightarrow 2$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, iar $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă că $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Deci $lA \in |\mathcal{H}|$, iar $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Deci $lA \in |\mathcal{R}|$, iar cu el şi $A \in |\mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Atunci $A \in |\mathcal{R}|$. Deci $lA \in |\mathcal{H}|$. Dar $lA = A$. Astfel $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Deoarece $\mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Deci $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$.

$3 \Rightarrow 4$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, $l^A : A \to lA$ şi $t^A : A \to tA$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{T}$-replica lui A. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}| \subset |\mathcal{T}|$. Deci

$$l^A = v \cdot t^A \tag{1}$$

pentru un v. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $v \in \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $tA \in |\mathcal{R}|$. Astfel $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Atunci

$$t^A = u \cdot l^A \tag{2}$$

pentru un u. Se verifică că $v = u^{-1}$. Deci $\mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{L}, \mathcal{T})$.

$4 \Rightarrow 3$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Deoarece $A \in |\mathcal{R}|$, rezultă că $t^A = l^A = 1$. Deci $A \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|$.

$\mathcal{T} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Asemănător.

$3 \Rightarrow 5$. Fie $A \in |\mathcal{R}|, l^A : A \to lA$ şi $t^A : A \to tA$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{T}$-replicile lui A. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|$. Deci

$$l^A = v \cdot t^A \tag{3}$$

pentru un v. Deoarece $l^A \in \varepsilon\mathcal{L}$, rezultă că $v \in \varepsilon\mathcal{L}$, şi $tA \in |\mathcal{R}|$.

$3 \Rightarrow 6$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}$. Vezi $3 \Rightarrow 5$.

$\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}|$, şi $t^A : A \to tA$ $\mathcal{T}$-replica lui A. Atunci $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Astfel

$$t^A = f \cdot l^A \tag{4}$$

pentru un morfism f. Mai departe, fie $r^{lA} : lA \to rlA$ $\mathcal{R}$-replica lui lA. Atunci

$$f = u \cdot r^{lA}, \tag{5}$$

$$t^A = u \cdot r^{lA} \cdot l^A \tag{6}$$

pentru un f şi în virtutea Lemei 13.1.1 (implicaţia 2 $\Rightarrow$ 5) $r^{lA} = \bar{g}_1^{lA} \in \mathcal{I}$. Din (6) rezultă că $r^{lA} \in \mathcal{P}$. Astfel $r^{lA} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}so$, şi $lA \in |\mathcal{R}|$. Din condiţia $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t^A"] \arrow[d, "l^A"'] & tA \\
lA \arrow[r, "r^{lA} = \bar{g}_1^{lA}"] \arrow[ur, dashed, "f"] & rlA \arrow[u, dashed, "u"']
\end{tikzcd}$$

Figura 13.1.1

13.1.3. Corolar. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Pentru orice element $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ are loc egalitatea $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

2. Dacă $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$, atunci $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H}$.

$\downarrow$ 1. Într-adevăr, $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$. Deci $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.

2. Avem $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. $\uparrow$

13.1.4. Lemă. *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

3. $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $l^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1 $\Leftrightarrow$ 2. Evident.

2 $\Rightarrow$ 3. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $lA \in |\mathcal{R}|$. De asemenea, dacă $lA \in |\mathcal{R}|$, atunci $A \in |\mathcal{R}|$.

3 $\Rightarrow$ 2. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $lA \in |\mathcal{R}|$. Astfel $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

Fie $lA \in |\mathcal{R}|$. Atunci $A \in |\mathcal{R}|$, şi $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$. $\uparrow$

13.1.5. Notaţii. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Definim următoarele nuclee ale elementului $\mathcal{R}$.*

- Nucleul maximal (m-nucleul):

$$N_m(\mathcal{R}) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})\}.$$

Pentru $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R})$ defnim următoarele nuclee:

- Nucleul de stânga (s-nucleul):

$$N_s(\mathcal{R},\mathcal{L}) = \{\mathcal{T} \in N_m(\mathcal{R}) | \mathcal{T} \subset \mathcal{L}\}.$$

- u-Nucleul

$$N_u(\mathcal{R},\mathcal{L}) = N_s(\mathcal{R},\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u).$$

- Nucleul de dreapta (d-nucleul):

$$N_d(\mathcal{R},\mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}\}.$$

- λ-Nucleul

$$N_\lambda(\mathcal{R},\mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})\}.$$

- Pentru $\bar{\Gamma_0} \in \mathbb{R}$, în particular, pentru $\bar{\Gamma_0} = \Gamma_0$, definim nucleul completărilor ($\bar{g}$-nucleul şi g-nucleul):

$$N_{\bar{g}}(\mathcal{R},\mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R},\mathcal{L}) | \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{H}\}.$$

$$N_g(\mathcal{R},\mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R},\mathcal{L}) | \Gamma_0 \subset \mathcal{H}\}.$$

- Pentru $\mathcal{L}, \bar{\Gamma_0} \in \mathbb{R}$ fie

$$\mathbb{R}^s_{f\bar{g}}(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) | N_d(\mathcal{R},\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\varepsilon\bar{\Gamma_0}) \neq \oslash\}.$$

$$\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) | N_d(\mathcal{R},\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\varepsilon\Gamma_0) \neq \oslash\}.$$

13.1.6. Remarcă. *1. Cel mai des o să considerăm $\bar{\Gamma_0} = \Gamma_0$ - subcategria spaţiilor complete.*

2. Nu se exclude ca clasele $\mathcal{N}_g(\mathcal{R},\mathcal{L})$ sau $\mathbb{R}_{f\bar{g}}(\varepsilon\mathcal{L})$ să fie vide .

13.2. Nucleele m, s şi u

13.2.1. Execiţii. *1. $N_s(\mathcal{R},\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = N_m(\mathcal{R})$.*

2. $N_d(\mathcal{R},\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \{\mathcal{R}\}$.

13.2.2 Propoziţie. *Fie $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R}), \mathcal{T} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$. Atunci:*

1. $\mathcal{T} \in N_m(\mathcal{R})$.

2. $N_s(\mathcal{R},\mathcal{L}) \subset N_s(\mathcal{R},\mathcal{T})$.

3. $N_\lambda(\mathcal{R},\mathcal{L}) \subset N_d(\mathcal{R},\mathcal{L})$.

4. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ este cel mai mic element al clasei $N_d(\mathcal{R},\mathcal{L})$.

5. Fie $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$, $\mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$. Atunci $\mathcal{H}_1 \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

6. $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{T}) \subset N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

$\downarrow$ 1 − 5. Evident.

6. Fie $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. Atunci $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H}$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, iar $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă că $lA \in |\mathcal{R}|$. Astfel $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| \subset |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{H}|$. Aşadar $lA \in |\mathcal{H}|$, iar $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| \subset |\mathcal{T} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|$. Astfel $lA \in |\mathcal{R}|$ şi de asemenea $A \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

13.2.3. Nucleul $N_s(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Menţionăm, cu cât subcategoria $\mathcal{L}$ este mai mare, cu atât nucleul $N_s(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ este mai mare, şi nucleul $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ este mai mic.

Nucleul $N_u(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Notăm

$\mathcal{A} = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}\}$,

$\mathcal{A}_u = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) | \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}\}$.

$\mathcal{B} = \cap\{\mathcal{T} | \mathcal{T} \in \mathcal{A}\}$,

$\mathcal{B}_u = \cap\{\mathcal{T} | \mathcal{T} \in \mathcal{A}_u\}$.

Atunci $\mathcal{B} \cap \mathcal{R} = \cap\{\mathcal{T} \cap \mathcal{R} | \mathcal{T} \in \mathcal{A}\} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

$\mathcal{B}_u \cap \mathcal{R} = \cap\{\mathcal{T} \cap \mathcal{R} | \mathcal{T} \in \mathcal{A}_u\} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

Astfel $\mathcal{B}$ este cel mai mic element al clasei $\mathcal{A}$, şi $\mathcal{B}_u$ cel mai mic element al clasei $\mathcal{A}_u$.

Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u), \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. Atunci $\mathcal{B}_u$ este cea mai mică subcategorie $\mathcal{E}_u$-reflectivă pentru care $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{B}_u)$, şi*

$N_u(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{B}_u \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}\}$.

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}, \mathcal{B}_u \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ şi o să verificăm că $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, iar $l^A : A \to lA$ şi $t^A : A \to tA$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{T}$-replicile lui A. Atunci $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|$. Astfel

$$l^A = f \cdot t^A \tag{1}$$

pentru un f ce aparţine clasei $\varepsilon\mathcal{L}$. Deci $tA \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{R}|$. Dacă $t^A : A \to tA$ şi $l^A : A \to lA$ sunt $\mathcal{T}$- şi $\mathcal{L}$-replicile lui A, atunci $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Deci

$$t^a = u \cdot l^A \tag{2}$$

pentru un u. Mai departe, fie $r^{lA} : lA \to rlA$ $\mathcal{R}$-replica lui lA. În virtutea Lemei 13.1.1 $rlA \in |\mathcal{L}|$.

Astfel $rlA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|$.

$$r^{lA} \cdot l^A = v \cdot t^A \tag{3}$$

pentru un v, şi

$$u = w \cdot r^{lA} \tag{4}$$

pentru un w. Se verifică că $w = u^{-1}$. Deoarece $t^A \in \mathcal{E}_u$, rezultă că $u \in \mathcal{E}_u$, şi $r^{lA} \in \mathcal{M}_p$ sau $u \in \mathcal{M}_p$. Definitiv $u \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$, şi $lA \in |\mathcal{R}|$. Cum $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deducem că $\in |\mathcal{R}|$. Am demonstrat că $\{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{B}_u \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}\} \subset N_u(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Incluziunea inversă este evidentă. $\uparrow$

13.2.4. Problemă. *În ce condiţii $\mathcal{B}$ este cel mai mic element al clasei $\mathcal{N}_s(\mathcal{R}, \mathcal{L})$?*

13.3. Nucleele d, λ şi g. Teorema despre nuclee

13.3.1. Lemă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ în fiecare din următoarele cazuri:*

A. $\mathcal{L}$ este o $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-varietate.

B. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{R})$.

C. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}))$.

D. Există $\bar{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\bar{\Gamma}_0)$ şi $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma}_0 \subset \mathcal{R}$.

E. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex},\ h(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ şi $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{H} = \mathcal{I}so$.

F. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. În particular, dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

$\downarrow$ A. $\rho(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ este subcategoria plină a tuturor obiectelor categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ pentru care $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile sunt izomorfe.

Fie $A \in |\mathcal{L}|$, şi $r^A : A \to rA$ şi $h^A : A \to hA$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A. În virtutea faptului că $\mathcal{L}$ este o $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-varietate, $rA, hA \in |\mathcal{L}|$. Deci $rA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ şi $hA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Deoarece $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$ (Teorema 13.1.2), deducem că rA şi hA aparţin subcategoriei $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{H}$. Există deci două morfisme $v : rA \to hA$ şi $u : hA \to rA$ astfel încât

$$h^A = v \cdot r^A, \tag{1}$$

$$r^A = u \cdot h^A. \tag{2}$$

Se verifică că $v = u^{-1}$.

B. Fie $A \in |\mathcal{L}|, r^A : A \to rA$ şi $h^A : A \to hA$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A. Deoarece $r^A \in \varepsilon\mathcal{R}$, rezultă că $rA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Atunci

$$r^A = u \cdot h^A \tag{3}$$

pentru un u. Din egalitatea scrisă deducem, că $h^A \in \varepsilon\mathcal{R}$. Deci $hA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Astfel

$$h^A = v \cdot r^A \tag{4}$$

penru un v. Se verifică că $u = v^{-1}$.

$C \Rightarrow B$. Deoarece $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, rezultă că $\varepsilon\mathcal{R} \subset \varepsilon(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

D. Din condiţiile $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{R}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\bar{\Gamma_0})$ rezultă că $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \bar{\Gamma_1})$, unde $\bar{\Gamma_1} = \mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0}$ (vezi Lema 13.1.1).

Fie $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}), A \in |\mathcal{L}|, r^A : A \to rA$ şi $h^A : A \to hA$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A. Atunci $r^A = \bar{g}_1^A \in \varepsilon\bar{\Gamma_0}$. Astfel $rA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$.

Deci

$$r^A = u \cdot h^A \tag{1}$$

pentru un u. Din egalitatea scrisă rezultă că $h^A \in \varepsilon\bar{\Gamma_0}$. Astfel $hA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$, şi

$$h^A = v \cdot r^A \tag{2}$$

pentru un v. Se verifică că $u = v^{-1}$.

E. Deoarece $h(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, deducem că functorul reflector $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$ poate fi scris $t = h \cdot l$.

Fie $A \in |\mathcal{L}|$, $r^A : A \to rA, h^A : A \to hA$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A, şi $l^{rA} : rA \to lrA$ $\mathcal{L}$-replica lui rA. Atunci $hA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Deci

$$h^A = v \cdot r^A \tag{3}$$

pentru un v. Deoarece $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$, $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Deci $lrA \in |\mathcal{H}|$. şi

$$l^{rA} \cdot r^A = w \cdot h^A \tag{4}$$

pentru un w. Din aceste egalităţi obţinem

$$l^{rA} = w \cdot v. \tag{5}$$

Din (3) rezultă că $v \in \varepsilon\mathcal{H}$, şi din (5) că $v \in \varepsilon\mathcal{L}$. Astfel $f \in \varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{H} = \mathcal{I}so$.

$F \Rightarrow E$. Evident. $\uparrow$

13.3.2. Propoziţie. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R})$, şi $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{H} \in N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

2. Pentru orice obiect $A \in |\mathcal{L}|$ $r^A \geq h^A$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Fie $A \in |\mathcal{L}|$, $r^A : A \to rA$ şi $h^A : A \to hA$ $\mathcal{R}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A. Deoarece $hA \in |\mathcal{H}| \subset |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})|$,

$$h^A = v \cdot r^A \tag{1}$$

pentru un v. Deci $r^A \geq h^A$.

2 $\Rightarrow$ 1. Fie $Z \in |\mathcal{H}|, A \in |\mathcal{L}|, r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica lui A, şi $f : A \to Z$.

Atunci

$$h^A = v \cdot r^A \tag{2}$$

pentru un v, şi

$$f = w \cdot h^A \tag{3}$$

pentru un w. Astfel

$$f = w \cdot v \cdot r^A. \uparrow \tag{4}$$

13.3.3. Teorema. *Fie $\mathcal{L}, \bar{\Gamma_0} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\bar{g_0}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^s_{f\bar{g}}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{R}$.

3. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0})$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^s_{f\bar{g}}(\varepsilon\mathcal{L})$, rezultă că există $\Gamma \in \mathbb{R}$, $\bar{\Gamma_o} \subset \Gamma$ astfel încât $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. Atunci

$$\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{L} \cap \Gamma = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}.$$

Egalitatea este scrisă în virtutea Teoremei 13.1.2.

2 $\Rightarrow$ 3. Fie $\bar{\Gamma_1} = \mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0}$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \bar{\Gamma_1}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \bar{\Gamma_1}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ $lA \in |\mathcal{R}| \subset |\mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0}| = |\bar{\Gamma_1}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \bar{\Gamma_1} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \bar{\Gamma_1}|$, şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui A. Atunci $lA \in |\bar{\Gamma_1}|$.

Deoarece se îndeplinesc toate condiţiile Lemei 13.1.1 din implicaţia 2 $\Rightarrow$ 5 $\mathcal{L} \in \rho(\mathcal{R}, \bar{\Gamma_1})$. Astfel $lA \in |\mathcal{R}|$, deci $A \in |\mathcal{R}|$. Astfel am demomstrat că $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0})$.

3 $\Rightarrow$ 1. Evident. $\uparrow$

13.3.4. Teoremă. *Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Fie că subcategoriile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{R}$ verifică una din condiţiile B-D ale Lemei 13.3.1. Atunci $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

2. Fie că $\mathcal{L}$ este o $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$-varietate. Atunci $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

3. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. Atunci $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. $\uparrow$

13.3.5. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R}, \bar{\Gamma_0} \in \mathbb{R}, \mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\bar{\Gamma_0})$ *şi* $\mathcal{L} \cap \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{R}$. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

2. Functorii $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $l \cdot r = r \cdot l$.

3. Fie $\varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\bar{\Gamma_0} = \mathcal{I}so$. *În particular, dacă* $\bar{\Gamma_0} \in \mathbb{R}(\mathcal{I}''(\mathcal{L}))$, *atunci*

$$N_{\bar{g}}(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})\}.$$

4. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Atunci:*

a) functorii k *şi* r *comută:* $k \cdot r = r \cdot k$, *iar* $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ *este o TTRD;*

b) dacă $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \in \mathbb{P}_c$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$, *atunci functorii* t *şi* r *comută:* $t \cdot r = r \cdot t$, *şi* $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ *este o TTRD.*

$\downarrow$ 1. Deoarece $\bar{g_0}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, atunci $\bar{g_0}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \cap \bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{R}$, şi din Lema 13.1.1 (implicaţia $2 \Rightarrow 5$) $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \bar{\Gamma_1})$. Astfel $Q_{\varepsilon\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \subset Q_{\varepsilon\bar{\Gamma_0}}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, sau $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Am verificat condiţia B a Lemei 13.3.1. În virturea Teoremei 13.3.4 p. 1 $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

2. Conform Teoremei 10.2.1 este suficient de verificat că $l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

$l(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Deoarece $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

$r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Deoarece $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \bar{\Gamma_1})$ avem $r(\mathcal{L}) = \bar{g}_1(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

3. Avem $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0})$, şi în virtutea Lemei 13.1.1 $\mathcal{R} \vee \bar{\Gamma_0} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$.

Fie $\mathcal{H} \in N_{\bar{g}}(\mathcal{R}, \mathcal{L})$. Atunci $\bar{\Gamma_0} \subset \mathcal{H}$. Să verificăm, că $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$, şi $l^A : A \to lA$ şi $h^A : A \to hA$ $\mathcal{L}$- şi $\mathcal{H}$-replicile lui A. Deoarece $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$

$$lA = v \cdot h^A \tag{1}$$

pentru un v. Din egalitatea scrisă obţinem

$$l^A \in \varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\mathcal{H} \subset \varepsilon\mathcal{L} \cap \varepsilon\bar{\Gamma_0} = \mathcal{I}so.$$

Incluziunea $\mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ este adevărată în virtutea Teoremei 13.3.4 p.1.

4a. În virtutea Teoremei 10.2.2 functorii k şi r comută. Mai departe, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, deci $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$, sau $(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ este TTRD.

4b. În virtutea Teoremei 11.1.11.

13.3.6. Corolar. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, *iar* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ *pentru orice* $\mathcal{T} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

2. $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$.

3. $N_g(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = \{\Gamma \in \mathbb{R} | \mathcal{R} \vee \Gamma_0 \subset \Gamma \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})\}$.

4. Functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}, l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *şi* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *comută:* $k \cdot r = r \cdot k$ *şi* $l \cdot r = r \cdot l$.

5. Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ functorii $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ şi r comută: $t \cdot r = r \cdot t$. $\uparrow$

13.3.7. Teoremă. Fie $\mathcal{S}$ subcateoria spaţiilor cu topologie slabă, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Atunci:

1. $\mathcal{S} \subset \rho(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ pentru orice $\mathcal{T} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.
2. $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.
3. $N_g(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = \{\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p) | \mathcal{R} \vee \Gamma_0 \subset \Gamma \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})\}$.
4. $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) = \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{S})$.
5. $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.
6. Functorul $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$, $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ şi $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută: $m \cdot r = r \cdot m$ şi $s \cdot r = r \cdot s$.
7. Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ functorii $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ şi r comută: $t \cdot r = r \cdot t$.
8. $\mathcal{S}$ este unica subcategorie c-reflectivă $\mathcal{L}$ pentru care $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$.
9. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{T} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. Atunci $\mathcal{R} \vee \Gamma_0 \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. $\uparrow$

13.3.8. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. Atunci $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \Gamma_0)$ este cel mai mic element al clasei $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$.*

$\downarrow$ Vezi 9.4. $\uparrow$

13.3.9. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $(E, t) \in |\mathcal{R}|$. Atunci pentru orice topologie u local convexă cu proprietatea $l(t) \leq u \leq m(t)$, unde $(E, l(t))$ este $\mathcal{L}$-replica şi $(E, m(t))$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului (E, t), avem $(E, u) \in |\mathcal{R}|$. În particular, $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$.*

$\downarrow$ Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L}), A \in |\mathcal{R}|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{S}$, iar $l^X : X \to lX$ şi $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$l^A \cdot b = l(b) \cdot l^X. \tag{1}$$

Avem $l^A \cdot b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Deci $l(b) \in \mathcal{E}_u$. Mai departe, $l^A \cdot b \in \mathcal{M}_u$ şi $l^X \in \mathcal{E}pi$, deci $l(b) \in \mathcal{M}_u$. Astfel $l(b) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Există un $\Gamma \in N_g(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ ce ne conduce la faptul că $lA \in |\Gamma|$, iar în virtutea Teoremei 12.4.4 şi $lX \in |\Gamma|$, sau $X \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

13.3.10. Corolar. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Aplicaţia $\mathcal{R} \mapsto \varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{R})$ definită pe clasa $\mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$ ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$*

$$\varphi : \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}).$$

$\downarrow$ În virtutea Teoremelor 13.3.9 şi 9.4.11 $\uparrow$

13.3.11. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci pentru orice $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ are loc egalitatea*

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{H}).$$

↓ În virtutea Teoremei 12.3.9 avem $\mathcal{R} = \mathcal{K} *_d (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$, şi în baza Teoremei 13.1.2 $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. ↑

13.3.12. Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, şi $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R})$. Atunci pentru orice două elemente $\mathcal{T} \in N_s(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ şi $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ are loc egalitatea*

$$\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H}.$$

↓ Menţionăm, că $\mathcal{T} \in N_s(\mathcal{R}, \mathcal{L}) \Leftrightarrow (\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{T}))$, şi $\mathcal{H} \in N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) \Leftrightarrow \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H}$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{H}| \subset |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Deci $tA \in |\mathcal{H}|$.

$\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Fie $A \in |\mathcal{T} *_{sr} \mathcal{H}|$. Atunci $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{H}| \subset |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Deci $tA \in |\mathcal{R}|$, şi $A \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{T})$. ↑

13.3.13. Indicăm schematic Teorema 13.3.4 pentru $\mathcal{L}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$.

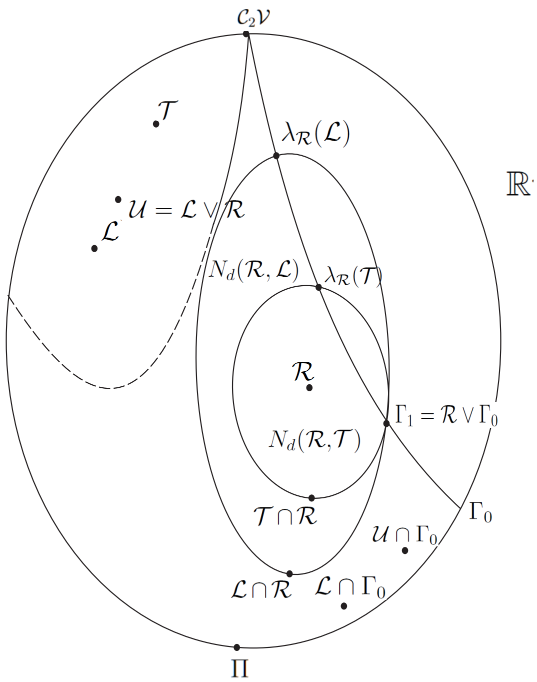


Figura 13.3.1

13.3.14. Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi două elemente $\mathcal{L}, \mathcal{T} \in N_m(\mathcal{R})$ cu condiţia că $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$ indicăm nucleele lor.

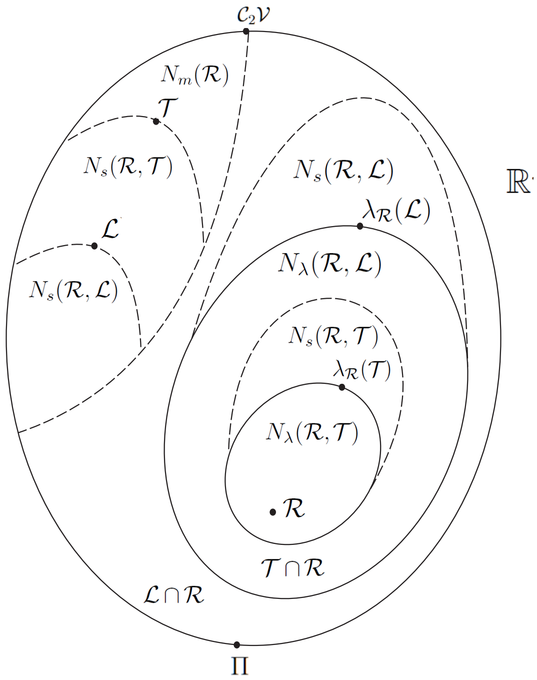


Figura 13.3.2

13.3.15. Referitor la teorema 13.3.8. a) Cazul $\mathcal{L} = \mathcal{S}$. b) Cazul general.

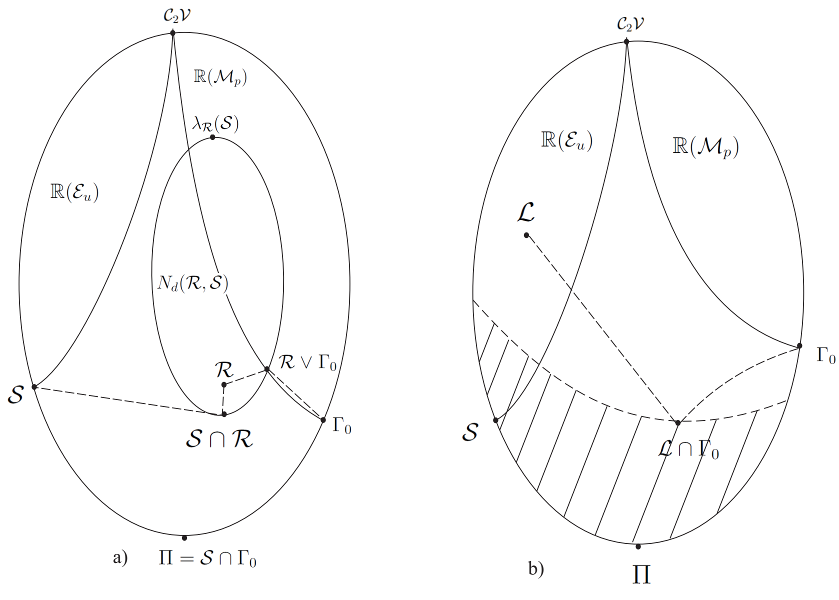


Figura 13.3.4

Domeniul haşurat constă din elementele ce nu conţin elementul $\mathcal{L}\cap\Gamma_0$.

13.3.16. Interpretăm schematic rezultatele acestui paragraf:

a) $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. b) $\mathcal{L}\cap\Gamma_0 \subset \mathcal{R}$. c) $\mathcal{L} = \mathcal{S}$.

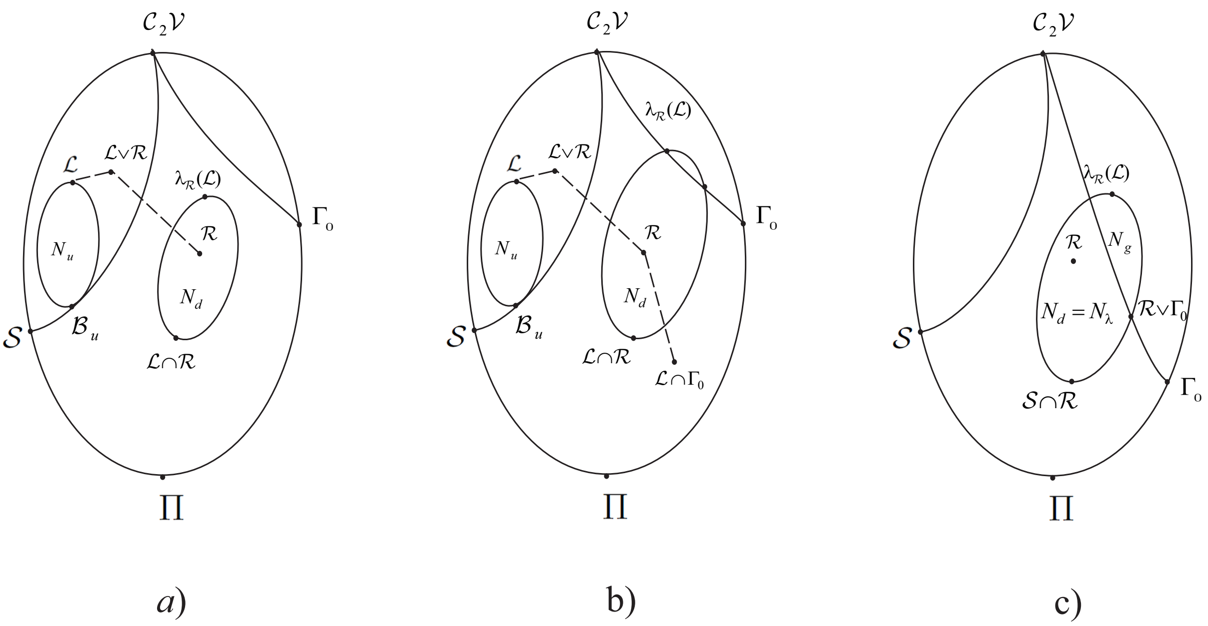


Figura 13.3.5

13.4. Subcategoria $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}, \mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R})$

13.4.1. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R}), (\mathcal{P}'', \mathcal{I}'') = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$, $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{I}'')$, $\mathcal{R} = \mathcal{T} *_{sr} \Gamma$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}, g(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, *şi* $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$. *Atunci:*

1. $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$.

2. $\mathcal{R} \subset \Gamma \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$.

3. $\mathcal{T} \subset \rho(\mathcal{R}, \Gamma)$. *În particular,*

$$N_d(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{T}).$$

$\downarrow$ 1. Fie $t^X : X \to tX, r^X : X \to rX$ şi $u^X : X \to uX$ $\mathcal{T}$- $\mathcal{R}$-replicile lui X. Atunci

$$r^X = r^{uX} \cdot u^X. \tag{1}$$

Dacă $g^{tX} : tX \to gtX$ este Γ-replica lui tX, apoi $gtX \in |\mathcal{T} \cap \Gamma| \subset |\mathcal{R}|$. Astfel

$$g^{tX} \cdot t^X = f \cdot r^X \tag{2}$$

pentru un f. Egalitatea (2) poate fi scrisă

$$(f \cdot r^{uX}) \cdot u^X = g^{tX} \cdot t^X, \tag{3}$$

unde $u^X \in \mathcal{P}''$, iar $g^{tX} \in \mathcal{I}''$. Deci

$$t^X = h \cdot u^X, \tag{4}$$

$$f \cdot r^{uX} = g^{tX} \cdot h \tag{5}$$

pentru un h. Egalitatea (4) arată că $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u^X"] \arrow[dr, "r^X"] \arrow[dd, "t^X"'] & uX \arrow[d, "r^{uX}"] \arrow[ddl, "h"] \\
 & rX \arrow[d, dashed, "f"] \\
tX \arrow[r, "g^{tX}"] & gtX
\end{tikzcd}$$

Figura 13.4.1

2. $\mathcal{R} \subset \Gamma$. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Atunci $tA \in |\mathcal{R} \cap \Gamma|$. Deoarece $t^A \in \mathcal{P}''$ $A \in |\Gamma|$ (vezi Teorema 12.4.1 p.4). Astfel $\mathcal{R} \subset \Gamma$.

$\Gamma \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{T}|, r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica, şi $f : A \to Z$, unde $Z \in |\Gamma|$. Deoarece $r^A = g^A$, f se extinde prin r^A.

3. Fie $A \in |\mathcal{T}|$. Atunci $g^A \in |\mathcal{T} \cap \Gamma| \subset |\mathcal{R}|$. Deci condiţia $\mathcal{R} \subset \Gamma$ rezultă că $rA \in |\Gamma|$. Deci $r^A = g^A$. $\uparrow$

13.5. Exemple şi probleme

13.5.1. Notaţii. *Fie $\mathbb{P}$ şi $\mathbb{T}$ două subclase ale clasei $\mathbb{R}$. Notăm*

$$\mathbb{P}^d = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \forall \mathcal{R} \in \mathbb{T} \textit{ avem } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{H})\},$$

$$\mathbb{T}^s = \{\mathcal{H} \in \mathbb{R} | \forall \mathcal{R} \in \mathbb{T} \textit{ avem } \mathcal{H} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{R})\}.$$

13.5.2. Exerciţii. *Pentru orice subclase nevide $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1$ şi $\mathbb{T}, \mathbb{T}_1$ ale clasei $\mathbb{R}$ sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{P}^d$.

2. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{T}^s$.

3. Dacă $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_1$, *atunci* $\mathbb{P}_1^d \subset \mathbb{P}^d$.

4. Dacă $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}_1$, *atunci* $\mathbb{T}_1^s \subset \mathbb{T}^s$.

5. $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{ds}$.

6. $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}^{sd}$.

7. $\mathbb{P}^d = \mathbb{P}^{dsd}$.

8. $\mathbb{T}^s = \mathbb{T}^{sds}$.

9. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci* $\{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{L} \subset \mathcal{T}\} \subset \mathcal{L}^s$.

10. $\mathcal{C}_2\mathcal{V}^d = \mathbb{R}$.

11. $\mathbb{R}^s = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

12. $\mathcal{C}_2\mathcal{V}^s = \mathbb{R}$.

13. $\mathbb{R}^d = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

14. $\{l\Gamma_0\}^d \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

13.5.3. Exerciţii. Fie $\mathcal{L} \in N_m(\mathcal{R}), \mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}''(\mathcal{L})}(\mathcal{R})$. Atunci:

1. $\mathcal{R} = \mathcal{B} *_{sr} \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$.

2. $\mathcal{R} = \mathcal{B} *_{sr} \mathcal{R}$.

13.5.4. Notaţii. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, şi $\mathbb{R}_{fg}^s(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$. Atunci

$$\mathbb{R}_f^{sm}(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}).$$

13.5.5. Exerciţii. *1. Fie* $\mathbb{R}_{fg}^s(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\Gamma_0)$. *Atunci* $\mathbb{R}_{fg}^{sm}(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}_f^{sm}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\varphi : \mathbb{R}_f^{sm}(\varepsilon\mathcal{L}) \to \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}),$$

unde $\varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{R})$ *pentru* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^{sm}(\varepsilon\mathcal{L})$, *este monotonă.*

13.5.6. Definiţie. *Fie* $\mathbb{P}$ *şi* $\mathbb{T}$ *două subclase ale clasei* $\mathbb{R}$. *Se spune că* $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$ *formează o pereche de clase saturate, dacă* $\mathbb{P} = \mathbb{T}^s$ *şi* $\mathbb{T} = \mathbb{P}^d$.

13.5.7. Exemple. $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathbb{R})$ *şi* $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ *formează perechi de clase saturate.*

13.5.8. Probleme. *1. Fie* $\mathcal{B}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ *şi* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Intotdeauna* $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) = N_\lambda(\mathcal{R}, \mathcal{L})$?

2. În ce condiţii clasa $N_m(\mathcal{R})$ *posedă cel mai mic element?*

3. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Este adevărat oare că* $N_m(\Gamma) \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$?

4. Fie $\mathcal{B}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. *În ce condiţii* $(N_s(\mathcal{R}, \mathcal{B}), N_d(\mathcal{R}, \mathcal{B}))$ *formează o pereche de clase saturate?*

5. Ipoteză. Fie $\mathcal{L}_1$ *şi* $\mathcal{L}_2$ *două elemente diferite ale laticei* $\mathbb{R}$. *Atunci* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}_1)$ *şi* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}_2)$ *sunt diferite.*

Capitolul 14. Teoreme de izomorfism

14.1. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{L}), (\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$

14.1.1. În cap. 14 apar deseori clasele $\mathbb{K}(\mathcal{K}), \mathbb{R}(\mathcal{K}), \mathbb{K}(\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ (sau subclase ale acestor clase) pentru $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Clasele $\mathbb{K}(\mathcal{K})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ au următoarele descrieri:

$\mathbb{K}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{K} | \mathcal{T} \subset \mathcal{K}\}, \mathbb{R}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{R} | \mathcal{U} \subset \mathcal{L}\}$.

Exemple simple de elemente ale clasei $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ ne indică Propoziţia 6.5.11.

Fie $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci $\mathcal{K} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.

Notaţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathbb{A}(\mu\mathcal{K})$ *(respectiv:* $\mathbb{B}(\varepsilon\mathcal{L})$*) clasa subcategoriilor* $\mathcal{U}$ *(respectiv:* $\mathcal{V}$*) a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *cu proprietăţile:*

1. $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$ *(respectiv:* $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V})$*).*

2. $\mathcal{K} \cap \mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ *(respectiv:* $\mathcal{L} \cap \mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$*).*

Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{T} \mapsto \varphi_1(\mathcal{T}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{T}) \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{A}(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \psi_1(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{U} \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{A}(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile φ_1 *şi* ψ_1 *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{R}(\mathcal{K}).$$

$\downarrow$ 1-2. Evident.

3. $\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Evident.

$\varphi_1 \cdot \psi_1 = 1$. Fie $\mathcal{U} = \mathbb{A}(\mu\mathcal{K})$. Atunci $\varphi_1\psi_1(\mathcal{U}) = \varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{U})$.

$\varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Fie $A \in |\varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{U})|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{U}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mu\mathcal{K}$. Astfel $Z \in |\mathcal{U}|, b \in \mu\mathcal{K}$ şi $\mathcal{U} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$. Deci $A \in |\mathcal{U}|$.

$\mathcal{U} \subset \varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{U})$. Fie $A \in |\mathcal{U}|$ şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $kA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{U}|$ şi $k^A \in \mu\mathcal{K}$. Deci $A \in |\varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{U})|$. $\uparrow$

14.1.1* Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}(\mathcal{V}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V}) \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{B}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \bar{\psi}(\mathcal{T}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \textit{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{B}(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}$ *şi* $\bar{\psi}$ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{K}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathbb{B}(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbb{K}(\mathcal{L}). \uparrow$$

14.1.2. Notaţii. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}(\mu\mathcal{K})$ *(respectiv:* $\mathbb{D}(\varepsilon\mathcal{L})$*) clasa subcategoriilor* $\mathcal{U}$ *(respectiv:* $\mathcal{V}$*) a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *cu următoarele proprietăţi:*

1. $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$ *(respectiv:* $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V})$*).*

2. $\mathcal{K} \cap \mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$ *(respectiv:* $\mathcal{L} \cap \mathcal{V} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$*).*

Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}_1(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{V}) \textit{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{C}(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \bar{\psi}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{T} \textit{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{C}(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}_1$ *şi* $\bar{\psi}_1$ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{K}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \mathbb{C}(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \mathbb{K}(\mathcal{K}).$$

$\downarrow 1 - 2$. Evident.

3. $\bar{\psi}_1 \cdot \bar{\varphi}_1 = 1$. Evident.

$\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\psi}_1 = 1$. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{C}(\mu\mathcal{K})$. Atunci $\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\psi}_1(\mathcal{V}) = \bar{\varphi}_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{V})$.

$\bar{\varphi}_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. Fie $A \in |\bar{\varphi}_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{V})|$. Există $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{V}|$ şi $b : Z \to A \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $A \in |\mathcal{V}|$.

$\mathcal{V} \subset \bar{\varphi}_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{V})$. Fie $A \in |\mathcal{V}|$ şi $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A. Atunci $kA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{V}|$ şi $A \in |\mathcal{V}|$. $\uparrow$

14.1.2*. Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{T} \mapsto \varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \textit{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{D}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi(\mathcal{V}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{V} \textit{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{D}(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ *şi* ψ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}(\mathcal{L}). \uparrow$$

14.1.3. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. Atunci $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$ şi în virtutea Teoremei 11.3.16 deducem: pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ avem: $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{K} \cap \bar{\mathcal{V}})$. Astfel aplicaţia φ_1 ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{A}(\mu\mathcal{K}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$

$$\varphi_1 : \mathbb{R}(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}).$$

Dacă ne referim la Teorema duală, atunci pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$ avem:

$$\mathcal{W} = \mathcal{T} *_{sc} \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\bar{\mathcal{W}} \cap \mathcal{L}).$$

Astfel aplicaţia $\bar{\varphi}$ ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ şi $\mathbb{B}(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$

$$\bar{\varphi} : \mathbb{K}(\mathcal{L}) \to \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}).$$

Din Teorema 9.4.17 şi duala sa deducem: Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$ avem $\bar{\varphi}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} *_{sc} \mathcal{L}$ şi $\mathbb{C}(\mu\mathcal{K}) = \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ (Teorema 9.4.17* p.1).

Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ avem $\varphi(\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{R}) = \mathcal{K} *_d \mathcal{R}$ şi $\mathbb{D}(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ (Teorema 9.4.17 p.1).

$$\bar{\varphi}_1 : \mathbb{K}(\mathcal{K}) \to \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}), \quad \varphi : \mathbb{R}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}).$$

14.1.4. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_1(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U}) \textit{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_1(\mathcal{R}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{R} \textit{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile φ_1 *şi* ψ_1 *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{R}(\mathcal{K}).$$

4. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{H}) \text{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

5. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{L})$.

6. Aplicaţiile φ *şi* ψ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}(\mathcal{L}).$$

7. Pentru orice element $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *categoriile* $\psi_1(\mathcal{R})$ *şi* $\psi(\mathcal{R})$ *formează o pereche de subcategorii conjugate a categoriei* $\mathcal{R}$. *În particular, categoriile* $\psi_1(\mathcal{R})$ *şi* $\psi(\mathcal{R})$ *sunt izomorfe. În particular, categoriile* $\psi_1(\mathcal{T})$ *şi* $\psi(\mathcal{T})$ *sunt izomorfe.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \mathbb{R}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Deoarece $\mathbb{R}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$, $\psi\varphi_1(\mathcal{U})$ *este o subcategorie reflectivă a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\uparrow$

14.1.4*. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}_1(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{V}) \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \bar{\psi}_1(\mathcal{T}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{T} \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}_1$ *şi* $\bar{\psi}_1$ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{K}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \mathbb{K}(\mathcal{K}).$$

4. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \bar{\varphi}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \text{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

5. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \bar{\psi}(\mathcal{T}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{L})$.

6. Aplicaţiile $\bar{\varphi}$ şi $\bar{\psi}$ sunt reciproc inverse.

$$\mathbb{K}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbb{K}(\mathcal{L}).$$

7. Pentru orice element $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$ subcategoriile $\bar{\psi}_1(\mathcal{T})$ şi $\bar{\psi}(\mathcal{T})$ formează o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{T}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\overline{\varphi}_1"] & \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K}) \arrow[l, shift left, "\overline{\psi}_1"] \arrow[r, shift right, "\overline{\psi}"'] & \mathbb{K}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

$\uparrow$

14.1.5. *$\psi\varphi_1(\mathcal{U})$-replica pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Avem $\psi\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Atunci $\psi\varphi_1(\mathcal{U}) = \psi(\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})) = \mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})$. Fie $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica, $u^{kA} : kA \to ukA$ $\mathcal{U}$-replica, şi $l^{ukA} : ukA \to lukA$ $\mathcal{L}$-replica obiectelor respective. Mai departe,*

$$l^{ukA} \cdot u^{kA} = v^A \cdot k^A \tag{1}$$

pentru un $v^A : A \to lukA$. Atunci

$$v^A = f^A \cdot l^A$$

pentru un morfism f^A şi

$$f^A = v^{lA}.$$

$$\begin{tikzcd} kA \arrow[rr, "u^{kA}"] \arrow[dd, "k^A"'] & & ukA \arrow[dd, "l^{ukA}"] \\ & lA \arrow[dr, dashed, "f^A = v^A"] & \\ A \arrow[ur, "l^A"] \arrow[rr, dashed, "v^A"] & & lukA=luklA \end{tikzcd}$$

Figura 14.1.2

Teoremă. *Fie $A \in |\mathcal{L}|$. Atunci $v^A : A \to lukA$ este $\psi\varphi_1(\mathcal{U})$-replica lui A pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.* $\uparrow$

14.1.5*. *$\bar{\psi}_1\bar{\varphi}(\mathcal{U})$-coreplica pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$. Avem $\bar{\psi}_1\bar{\varphi}(\mathcal{U}) = \bar{\psi}_1\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{Q}_\mu(\mathcal{U})$.*

Fie $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica, $u^{lA} : ulA \to lA$ $\mathcal{U}$-replica lui lA, iar $k^{ulA} : kulA \to ulA$ $\mathcal{K}$-coreplica lui ulA. Atunci

$$u^{lA} \cdot k^{ulA} = l^A \cdot v^A \tag{1}$$

pentru un $v^A : kulA \to lA$.

$$\begin{tikzcd}
kulkA{=}kulA \arrow[rr, "k^{ulA}"] \arrow[dd, dashed, "v^A"'] \arrow[dr, dashed, "v^{kA}"] & & ulA \arrow[dd, "u^{lA}"] \\
& kA \arrow[dl, "k^A"] & \\
A \arrow[rr, "l^A"] & & lA
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.3

Teoremă. *$v^A : kulA \to A$ este $\bar{\psi}_1\bar{\varphi}(\mathcal{U})$-coreplica lui A pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$.* $\uparrow$

14.1.6. *$\psi_1\varphi(\mathcal{V})$-replica pentru $\mathcal{V} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Atunci $\psi_1\varphi(\mathcal{V}) = \psi_1\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{V})$.* Fie $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-replica lui $A, v^{lA} : lA \to vlA$ $\mathcal{V}$-replica lui lA, iar $k^{vlA} : kvlA \to vlA$ $\mathcal{K}$-coreplica lui vlA. Atunci

$$v^{lA} \cdot l^A = k^{vlA} \cdot u^A \tag{1}$$

pentru un $u^A : A \to kvlA$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"'] & lA \arrow[d, "v^{lA}"] \\
kvlA \arrow[r, "k^{vlA}"] & vlA
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.4

Teoremă. *$u^A : A \to kvlA$ este $\psi_1\varphi(\mathcal{V})$-replica lui A pentru $\mathcal{V} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$.* $\uparrow$

14.1.6*. *$\bar{\psi}\bar{\varphi}_1(\mathcal{U})$-coreplica pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$.* Avem $\bar{\psi}\bar{\varphi}_1(\mathcal{U}) = \bar{\psi}\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$.

Fie $A \in |\mathcal{L}|$. $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coreplica lui A, $u^{kA} : ukA \to kA$ $\mathcal{U}$-corpelica lui kA, şi $l^{ukA} : ukA \to lukA$ $\mathcal{L}$-replica lui ukA. Atunci

$$k^A \cdot u^{kA} = v^A \cdot l^{ukA} \tag{1}$$

pentru un $v^A : lukA \to A$.

$$\begin{tikzcd}
ukA \arrow[r, "u^{kA}"] \arrow[d, "l^A"'] & kA \arrow[d, "k^A"] \\
lukA \arrow[r, dashed, "v^A"] & A
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.5

Teoremă. *Fie $A \in |\mathcal{L}|$. Atunci $v^A : lukA \to A$ este $\bar{\psi}\bar{\varphi}_1(\mathcal{U})$-coreplica lui A pentru $\mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$.* $\uparrow$

Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}(\mathcal{P})$ şi $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P}), \mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$

14.1.7. Notaţii. *1. Fie $\mathbb{K}_p$ clasa subcategoriilor coreflective $\mathcal{P}$ pentru care functorul coreflector $p : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{P}$ comută cu produsele (vezi 6.1.9).*

1^*. *Fie $\mathbb{R}_s$ clasa subcategoriilor reflective $\mathcal{R}$ pentru care functorul reflector $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ comută cu sumele.*

2. Fie $\mathbb{K}_r^c$ clasa tuturor perechilor $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, unde $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$ şi perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ verifică una din condiţiile echivalente ale Propoziţiei 11.1.14: $p(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R} \Leftrightarrow r(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$..

2^*. *Fie $\mathbb{R}_r^c$ clasa tuturor perechilor $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, unde $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_s$ şi perechea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ verifică una din condiţiile echivalente ale Propoziţiei 11.1.14.*

14.1.8. Teoremă. *Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$.

2. $tA = rA$ pentru orice obiect $A \in |\mathcal{P}|$.

3. $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \in \mathbb{R}_r^c \Leftrightarrow (\mathcal{P}, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}_r^c$.

$\downarrow$ 1. $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$. Să verificăm că subcategoria $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu produse şi $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $X_i \in |\mathcal{T}|, i \in \mathcal{I}$. Există obiectele $A_i \in |\mathcal{R}|$ şi morfismele $b_i : A_i :\to X_i \in \mu\mathcal{P}, i \in \mathcal{I}$. Examinăm $\mathcal{P}$-coreplicile $t_i : pA_i \to A_i$. Atunci $b_i \cdot t_i : pA_i \to X_i$ sunt $\mathcal{P}$-coreplicile obiectelor $X_i, i \in \mathcal{J}$. Fie $t = \Pi t_i : B \to A$ şi $b = \Pi b_i : A \to X$. Atunci $B \in |\mathcal{P}|$ şi $b \cdot t : B \to X$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui X. Deoarece $b \in \mathcal{M}ono$, rezultă că $b \in \mu\mathcal{P}$ şi $A \in |\mathcal{R}|$. Deci $\Pi X_i \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})|$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "t=\Pi t_i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "b=\Pi b_i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
pA_i \arrow[r, "t_i"] & A_i \arrow[r, "b_i"] & X_i
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.6

Să verificăm că $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $Y \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})|$ şi $m : X \to Y \in \mathcal{M}_f$. Există un obiect $A \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b : A \to Y \in \mu\mathcal{P}$. Fie

$$m \cdot b' = b \cdot m'$$

pătratul cartezian construit pe morfismele m şi b.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "b'"'] & A \arrow[d, "b"] \\
X \arrow[r, "m"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.7

Atunci $m' \in \mathcal{M}_f$. Deci $Z \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $b' \in \mu\mathcal{P}$, deducem că $X \in |\mathcal{T}|$.

$\mathcal{T} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$. Evident.

2. Fie $A \in |\mathcal{P}|, t^A : A \to tA$ şi $r^A : A \to rA$ $\mathcal{T}$- şi $\mathcal{R}$-replica obiectului A. Exsită $Z \in |\mathcal{R}|$ şi $b : Z \to tA \in \mu\mathcal{P}$. Atunci

$$t^A = b \cdot f$$

pentru un f. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$

$$f = g \cdot t^A$$

pentru un g. Atunci $b = f^{-1}$ şi $tA \in |\mathcal{R}|$. În acest caz

$$t^A = u \cdot r^A$$

pentru un u. Deoarece $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, apoi

$$r^A = v \cdot t^A$$

pentru un v. Astfel $u = v^{-1}$ şi $t^A = r^A$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, shift left, "b"] & \\
A \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "t^A"] \arrow[dr, "r^A"'] & & tA \arrow[ul, dashed, shift left, "g"] \arrow[dl, dashed, shift left, "v"] \\
 & rA \arrow[ur, dashed, shift left, "u"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.8

3. Rezultă din p.2. $\uparrow$

14.1.9. Teoremă. *Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p, \mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_p$.

2. Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$ *şi* $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \in \mathbb{P}_r^c$*, avem* $(\mathcal{T}, \mathcal{R}) \in \mathbb{K}_r^c$.

$\downarrow$ 1. $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_p$. Fie $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $p^X : pX \to X$ $\mathcal{P}$-coreplica lui X şi

$$p^X = t^X \cdot b^X$$

$(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{\perp})$-factorizarea lui p^X. Atunci $tX \in |\mathcal{T}|$.

Să verificăm că $t^X : tX \to X$ este $\mathcal{T}$-coreplica lui X. Fie $A \in |\mathcal{T}|$ şi $f : A \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{P}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mathcal{B}$. Atunci

$$f \cdot b = p^X \cdot u$$

pentru un u. Avem

$$f \cdot b = t^X \cdot (b^X \cdot u)$$

cu $b \in \mathcal{B}$ şi $t^X \in \mathcal{B}^{\perp}$. Deci $b \perp t^X$. Astfel

$$b^X \cdot u = v \cdot b,$$

$$f = t^X \cdot v$$

pentru un v. Deci f se factorizează prin t^X.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "b \in \mathcal{B}"] \arrow[dd, dashed, "u"'] & & A \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[dd, "f"] \\
& tX \arrow[dr, "t^X"] & \\
pX \arrow[ur, "b^X"] \arrow[rr, "p^X"] & & X
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.9

Condiţia că $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu produsele rezultă din faptul că atât subcategoria $\mathcal{P}$ cât şi clasa $\mathcal{B}$ sunt închise în raport cu produsele.

2. $r(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ cu condiţia că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Fie $X \in |\mathcal{T}|$. Există $A \in |\mathcal{P}|$ şi $b : A \to X \in \mathcal{B}$. Fie $r^A : A \to rA$ $\mathcal{R}$-replica lui A şi

$$b' \cdot r^A = t \cdot b$$

pătratul cocartezian construit pe morfismele b şi r^A. Atunci $b' \in \mathcal{B}$. Deci $T \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $t \in \varepsilon\mathcal{R}$ şi $T \in |\mathcal{R}|$, deducem că t este $\mathcal{R}$-replica lui $X : T = rX$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b \in \mathcal{B}"] \arrow[d, "r^A"'] & X \arrow[d, dashed, "t \in \varepsilon R"] \\ rA \arrow[r, dashed, "b' \in \mathcal{B}"] & T = rX \end{tikzcd}$$

Figura 14.1.10

Astfel $A \in |\mathcal{P}|$. Deci $rA \in |\mathcal{P}|$ şi $rX \in |\mathcal{T}|$. $\uparrow$

14.1.10. Corolar. *1. Pentru $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}})$ cu $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ avem:*

a) $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}}) \in \mathbb{K}_p$.

b) Deoarece $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}})$ pentru $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ $g(\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}})) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}})$. Deci $(\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}}), \Gamma) \in \mathbb{K}_r^c$.

2. Pentru $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}on)$ cu $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ avem:

a) $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}on) \in \mathbb{K}_p$.

b) $l\Gamma_0 \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ (vezi 16.2). Astfel pentru orice $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic, g_l(\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}on)) \subset \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}on)$, unde $g_l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to l\Gamma_0$ este functorul reflector. Deci $(\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}on), l\Gamma_0) \in \mathbb{P}_r^c$. $\uparrow$

14.1.11. Teoremă. *Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \in \mathbb{P}_r^c$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$. Atunci:*

1. $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P})$.

2. $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$.

3. $\mathcal{T}$ este cel mai mic element al clasei $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P})$ ce conţine subcategoria $\mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1. $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{P})$. Fie $Y \in |\mathcal{T}|$ şi $b : X \to Y \in \mu\mathcal{P}$. Există obiectul $A \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b_1 : A \to Y \in \mu\mathcal{P}$. Dacă $p^A : pA \to A$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui A, atunci $b_1 \cdot p^A : pA \to Y$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui Y şi

$$b_1 \cdot p^A = b \cdot f$$

pentru un f. În virtutea ipotezei $p(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ avem $pA \in |\mathcal{R}|$ şi $f \in \mu\mathcal{P}$. Deci $X \in |\mathcal{T}|$.

$$\begin{tikzcd} pA \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "p^A"'] & X \arrow[d, "b \in \mu\mathcal{P}"] \\ A \arrow[r, "b_1 \in \mu\mathcal{P}"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 14.1.11

2. $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{T}|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mu\mathcal{P}$. Dacă $p^Z : pZ \to Z$ este $\mathcal{P}$-replica lui Z, atunci $b \cdot p^Z : pZ \to A$ este $\mathcal{P}$-replica lui A şi $pZ \in |\mathcal{T}|$, deoarece $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Astfel $A \in \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{T})$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{T})|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{T}|$ şi un morfism $b : Z \to A$. Pentru obiectul Z există un obiect $T \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b_1 : T \to Z \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $b \cdot b_1 : T \to A \in \mu\mathcal{P}$ şi $T \in |\mathcal{R}|$. Deci $A \in |\mathcal{T}|$.

3. În primul rând, menţionăm că $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{R})$. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$. O să verificăm, că şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Într-adevăr, fie $A \in |\mathcal{T}|$. Există $Z \in |\mathcal{R}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $Z \in |\mathcal{U}|$ şi, deoarece $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$, rezultă că şi $A \in |\mathcal{U}|$ $\uparrow$

14.1.12. Teoremă. *Fie $\mathcal{P} \in \mathbb{K}_p$. Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_1(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi_1(\mathcal{V}) = \mathcal{P} \cap \mathcal{V} \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{P})$.

3. Aplicaţiile φ_1 şi ψ_1 sunt reciproc inverse.

$$\mathbb{R}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P}) \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{R}(\mathcal{P}).$$

$\downarrow$ 1. $\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}$. Să verificăm că subcategoria $\varphi_1(\mathcal{U})$ este închisă în raport cu produse şi $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Fie $A_i \in |\varphi(\mathcal{U})|, i \in \mathcal{J}$. Există obiectele $Z_i \in |\mathcal{U}|$ şi morfismele $b_i : Z_i \to A_i \in \mu\mathcal{P}$, $i \in \mathcal{J}$. Atunci b_i este $\mathcal{P}$-coreplica lui A_i. Fie $b = \Pi b_i : Z \to A$. Atunci b este $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Se verifică, că $Z \in |\mathcal{U}|$. Astfel $A \in \varphi_1(\mathcal{U}|$.

Fie $A \in \varphi_1(\mathcal{U}|$ şi $m : X \to A \in \mathcal{M}_f$. Atunci există $b \in Z \to A \in \mu\mathcal{P}$ şi b este $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Fie

$$m \cdot b' = b \cdot m' \tag{1}$$

pătratul cartezian construit pe morfismele m şi b, şi $p^T : p^T \to T$ $\mathcal{P}$-coreplica lui T. Atunci $b' \cdot p^T : pT \to X$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui X. Dacă $u^{pT} : p^T \to upT$ este $\mathcal{U}$-replica lui pT, atunci

$$m' \cdot p^T = f \cdot u^{pT} \tag{2}$$

pentru un f. Avem

$$(b \cdot f) \cdot u^{pT} = m \cdot (b' \cdot p^T) \tag{3}$$

cu $u^{pT} \in \mathcal{E}pi$ şi $m \in \mathcal{M}_f : u^{pT} \perp m$. Astfel

$$m \cdot g = b \cdot f, \tag{4}$$

$$b' \cdot p^T = g \cdot u^{pT} \tag{5}$$

pentru un g. Din egalitatea (4), deoarece (1) este un pătrar cartezian, există un morfism $b : up^T \to T$, astfel încât

$$p^T = h \cdot u^{pT}, \tag{6}$$

$$f = m' \cdot h. \tag{7}$$

Există morfismul $w : upT \to pT$, astfel încât

$$h = p^T \cdot w. \tag{8}$$

Se verifică uşor că $u^{pT} = w^{-1}, pT \in |\mathcal{U}|$ şi $X \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$.

$$\begin{tikzcd}
pX{=}pT \arrow[r, shift left, "u^{pT}"] \arrow[d, "p^T"'] & upT \arrow[l, dashed, shift left, "w"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, dashed, "g"] \\
T \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & Z \arrow[d, "b \in \mu\mathcal{P}"] \\
X \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

Figura 14.1.12

$\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{P})$. Evident.

$\varphi_1(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{P})$. Fie $A \in |\varphi_1(\mathcal{U})$ şi $b : A \to X \in \mu\mathcal{P}$. Atunci $pA \in |\mathcal{U}|$ şi $b \cdot p^A : pA \to X$ este $\mathcal{P}$-coreplica lui X şi $pA \in |\mathcal{U}|$. Deci $X \in |\varphi_1(\mathcal{U})|$.

2. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$. Atunci $p(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ şi în virtutea Lemei 1 $v(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$. Astfel pentru orice obiect $X \in |\mathcal{P}|$ $\mathcal{V}$-replica vX aparţine subcategoriei $\mathcal{P}$.

3. $\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{P})$. Atunci $\psi_1\varphi_1(\mathcal{U}) = \psi_1(\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})$.

$\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})$. Evident.

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Fie $A \in |\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{U})|$. Atunci $A \in |\mathcal{P}|$ şi $\mathcal{P}$-coreplica lui A (egală cu A) aparţine lui $\mathcal{U}$, sau $A \in |\mathcal{U}|$.

$\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{P})$. Atunci $\psi_1\varphi_1(\mathcal{V}) = \varphi_1(\mathcal{P} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})$.

$\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})$. Fie $A \in |\mathcal{V}|$ şi $p^A : pA \to A$ $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Atunci $pA \in |\mathcal{P} \cap \mathcal{V}|$ şi $A \in \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})|$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P}\cap\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P}\cap\mathcal{V})|$ şi $p^A : pA \to A$ $\mathcal{P}$-coreplica lui A. Atunci $pA \in |\mathcal{P}\cap\mathcal{V}|$ şi $A \in \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{P}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{V})|$. $\uparrow$

14.1.12*. Teoremă. *Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_s$. Atunci*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{K}(\mathcal{T})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{T})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\psi}(\mathcal{V}) = \mathcal{T} \cap \mathcal{V} \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{T})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{T})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}$ şi $\bar{\psi}$ sunt reciproc inverse. $\uparrow$

$$\mathbb{K}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{T}) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbb{K}(\mathcal{T}).$$

14.2. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}), (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$

14.2.1. O să examinăm cazul când $\mathcal{L}$ este o subcategorie arbitrară a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ cu functorul $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$. Pentru $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ $\mathcal{L}$ este $\mathcal{E}$-reflectivă atunci şi numai atunci, când $\mathcal{P}'(\mathcal{L}) \subset \mathcal{E}$ (vezi 6.6.11). În acest caz $(\mathcal{L} \cap \mathcal{E}, \mathcal{L} \cap \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{L})$.

Dacă $f : X \to Y \in \mathcal{L}$, şi

$$f = m \cdot e \tag{1}$$

este $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizarea lui f, atunci

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "l^Z"'] & lZ \arrow[u, dashed, "l(m)"'] \end{tikzcd}$$

Figura 14.2.1

$$m = l(m) \cdot l^Z \tag{2}$$

şi

$$f = l(m) \cdot (l^Z \cdot e) \tag{3}$$

cu $l(m) \in l(\mathcal{M})$ şi $l^Z \cdot e \in \mathcal{E}$.

Lemă. *Fie* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$ *şi* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$. *Atunci:*

1. $(l(\mathcal{E}), l(\mathcal{M})) = (\mathcal{L} \cap \mathcal{E}, l(\mathcal{M}))$.

2. $(\mathcal{L} \cap \mathcal{E}, \mathcal{L} \cap \mathcal{M}) \in \mathbb{B}(\mathcal{L})$.

3. $l(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}ono$ *în următoarele cazuri:*

a) $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$;

b) $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_u$;

c) $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \subset \mathcal{E}$;

d) l *este un monofunctor.* $\uparrow$

14.2.2. Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$ şi $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M})$. Atunci $l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_u$ şi $k(\mathcal{E}_f) \subset \mathcal{E}_u$. De asemenea, dacă $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ (respectiv $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$), atunci $l(\mathcal{M}ono) \subset \mathcal{M}ono$ (respectiv: $k(\mathcal{E}pi) \subset \mathcal{E}pi$).

Vom considera că $l(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}ono$ (respectiv: $k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}pi$).

Notaţii. $\mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{L}) | \mathcal{R}$ *este închisă în raport cu* $l(\mathcal{M})$ *subobiecte* $\}$.

- $\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K}) | \mathcal{T}$ *este închisă în raport cu* $k(\mathcal{E})$*=factorobiecte* $\}$.

Întotdeauna $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ *şi* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$.

14.2.3. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. *Atunci* $\mathbb{R}_{\mathcal{M}_f}(\mathcal{L}) = \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

2. $\mathbb{R}_{\mathcal{M}_f}(\Gamma_0) = \mathbb{R}(\Gamma_0)$.

3. Fie $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *un functor reflector exact la stânga. Atunci* $\mathbb{R}_{\mathcal{M}_f}(\mathcal{L}) = \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

14.2.4. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$ *şi functorul* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *comută cu produsele. În particular, dacă* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, *atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ *şi* ψ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\ \psi\ } \mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}).$$

$\downarrow$ 1. Să verificăm că $\varphi(\mathcal{T})$ este închisă în raport cu produse şi $\mathcal{M}$-subobiecte. Fie $X \in |\varphi(\mathcal{T})|$. Atunci există un obiect $A \in |\mathcal{T}|$ şi un morfism $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deoarece $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$, rezultă că b este $\mathcal{L}$-replica lui X. Functorul $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ comută cu produsele şi subcategoria $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu produsele. Deci $\varphi(\mathcal{T})$ este închisă în raport cu produsele.

Să verificăm că $\varphi(\mathcal{T})$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}$-subobiecte. Fie $m : X \to A \in \mathcal{M}$, unde $lA \in |\mathcal{T}|$ şi $l^X : X \to lX$ este $\mathcal{L}$-replica lui X. Atunci:

$$l^A \cdot m = l(m) \cdot l^X, \tag{1}$$

unde $lA \in |\mathcal{T}|$ şi $l(m) \in l(\mathcal{M})$. Deci $lX \in |\mathcal{T}|$ şi $X \in \varphi(\mathcal{T})|$.

$\varphi(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Evident.

$\varphi(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Fie $lX \in |\mathcal{T}|$ şi $b : X \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci

$$l^X = f \cdot b \tag{2}$$

pentru un f. Deoarece $f = l^Z$, rezultă că $Z \in |\mathcal{T}|$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}), \mathcal{T} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, m : X \to Y \in \mathcal{M}$ şi $lY \in |\mathcal{T}|$. Astfel $lY \in |\mathcal{R}|$ şi $Y \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E})$, rezultă că şi $X \in |\mathcal{R}|$. Atunci $lX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{T}|$. Astfel am arătat că $\mathcal{T}$ este închisă în raport cu $l(\mathcal{M})$-subobiecte.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m\in\mathcal{M}"] \arrow[d, "l^X"'] & Y \arrow[d, "l^Y"] \\
lX \arrow[r, "l(m)\in l(\mathcal{M})"] & lY
\end{tikzcd}$$

Figura 14.2.2

3. $\psi \cdot \varphi = 1$. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$. Atunci $\psi\varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{L} \cap \varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T})$. Este evident că $\mathcal{T} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T})$. Dacă $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T})|$, atunci $A \in |\mathcal{T}|$.

$\varphi \cdot \psi = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\varphi \cdot \psi(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Deci $\mathcal{R} \subset \varphi\psi(\mathcal{R})$. Fie $X \in \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})|$. Deoarece $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, rezultă că $X \in |\mathcal{R}|$. $\uparrow$

14.2.4*. Teoremă. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \in \mathbb{B}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{E})$ şi fie că functorul coreflector $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ comută cu sumele. În particular, fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$. Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \bar{\varphi}_1(\mathcal{H}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \textit{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{M})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \bar{\psi}_1(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{U} \textit{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \cap \mathbb{K}(\mathcal{M})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}_1$ *şi* $\bar{\psi}_1$ *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}). \uparrow$$

14.2.5. Corolar. *În cazul structurii de factorizare* $(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ *avem* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}pi) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Astfel avem aplicaţiile reciproc inverse* φ *şi* ψ. $\uparrow$

$$\mathbb{R}_{\mathcal{M}_f}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}_{\mathcal{M}_f}(\mathcal{L})$$

14.2.6. Corolar. *Fie* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Atunci aplicaţiile* φ *şi* ψ, *respectiv,* $\bar{\varphi}_1$ *şi* $\bar{\psi}_1$, *sunt reciproc inverse (Teoremele 14.1.1 p.6 şi 14.1.1* p.3).*

1.

$$\mathbb{R}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}(\mathcal{L}).$$

2.

$$\mathbb{K}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \mathbb{K}(\mathcal{K})$$

14.2.7. Remarcă. *1. Dacă* $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{L}) = \mathbb{R}(\mathcal{L})$, *atunci aplicaţia* ψ *este restricţia aplicaţiei* $\psi_p : \mathcal{R} \mapsto \psi_p(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ *pentru* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

1. Dacă* $\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) = \mathbb{K}(\mathcal{K})$, *atunci aplicaţia* $\bar{\psi}_1$ *este restricţia aplicaţiei* $\bar{\psi}_p : \mathcal{U} \mapsto \bar{\psi}_p(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{U}$ *pentru* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}$.

14.2.8. Corolar. *Fie* $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Gamma)$ *conţine o clasă proprie de elemente.*

$\downarrow$ *Deoarece* $\mathbb{R}(\Gamma_0) \subset \mathbb{R}(\Gamma)$, *şi* $\mathbb{R}(\Gamma_0)$ *conţine o clasă proprie de elemente (vezi 10.1.8).* $\uparrow$

14.3. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$

14.3.1. Notaţii. *Fie* $\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \vee \Gamma_0 | \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})\}$.

14.3.2. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

1. Aplicaţia

$$\Gamma \mapsto \varphi_g(\Gamma) = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \ \textit{pentru} \ \Gamma \in \mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \Gamma = \psi_g(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \vee \Gamma_0 \ \textit{pentru} \ \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ_g *şi* ψ_g *sunt reciproc inverse*

$$\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_g} \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_g} \mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L}).$$

$\downarrow$ 1. În virtutea definiţiei clasei $\Gamma_1(\mathcal{L})$.

2. În virtutea Teoremei 13.3.4

3. $\psi_g \cdot \varphi_g = 1$. Fie $\Gamma = \mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L})$. Atunci

$$\psi_g\varphi_g(\Gamma) = \psi_g(\mathcal{L} *_{sr} (\Gamma) = (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma) \vee \Gamma_0.$$

Deoarece $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$ şi $\Gamma_0 \subset \Gamma$, rezultă că $(\mathcal{L} *_{sr} \Gamma) \vee \Gamma_0 \subset \Gamma$.

Să demonstrăm, că $\Gamma \subset (\mathcal{L} *_{sr} \Gamma) \vee \Gamma_0$. Deoarece $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L})$, există un $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$ astfel încât $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. Atunci $\mathcal{R} \vee \Gamma_0 \subset \Gamma$ (Corolarul 13.3.5 p.3).

$\varphi_g \cdot \psi_g = 1$. Avem $\varphi_g\psi_g(\mathcal{R}) = \varphi_g(\mathcal{R} \vee \Gamma_0) = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0) = \mathcal{R}$. $\uparrow$

14.3.3. Corolar. *Aplicaţiile* φ_g *şi* ψ_g *stabilesc un izomorfism al laticelor* $\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{S})$ *şi* $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{S})$

$$\mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi_g} \mathbb{R}^s_f(\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi_g} \mathbf{\Gamma}_1(\mathcal{L}). \uparrow$$

14.4. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$

14.4.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, *şi*

$$\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L}) = \{\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p) | \Gamma = \lambda_{\mathcal{L}\cap\Gamma}(\mathcal{L})\}.$$

14.4.2. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

1. Aplicaţia

$$\Gamma \mapsto \mathcal{R} = \varphi_\lambda(\Gamma) = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma \ \textit{pentru} \ \Gamma \in \mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \Gamma = \psi_\lambda(\mathcal{R}) = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ_λ *şi* ψ_λ *sunt reciproc inverse*

$$\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_\lambda} \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_\lambda} \mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L}).$$

$\downarrow$ 1. În virtutea Teoremei 12.2.4 $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{A}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, şi în virtutea Teoremei 12.2.5 $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}$. Astfel $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \in \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ în virtutea notaţiilor 13.1.5.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\mathcal{L})$. Atunci $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Să demonstrăm că $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \in \mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L})$ sau că $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) = \lambda_{\mathcal{L}\cap\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})}(\mathcal{L})$. Deoarece $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ şi $\mathcal{L}$ este închisă în raport cu extensiile, se verifică uşor că $(\mathcal{L} \cap \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}))$-replica unui obiect din $\mathcal{L}$ este şi $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$-replica. Astfel trebuie de verificat egalitatea $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) = \lambda_{\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})}(\mathcal{L})$. Odată ce $\mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$, rezultă că $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) \subset \lambda_{\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})}(\mathcal{L})$. Incluziunea inversă rezultă din faptul că $\mathcal{L} \subset \rho(\mathcal{R}, \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}))$.

3. $\psi_\lambda \cdot \varphi_\lambda = 1$. Fie $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{L})$. Atunci

$$\psi_\lambda\varphi_\lambda(\Gamma) = \psi_\lambda(\mathcal{L} *_{sr} \Gamma) = \lambda_{\mathcal{L}*_{sr}\Gamma}(\mathcal{L}).$$

Trebuie de demonstrat că $\Gamma = \lambda_{\mathcal{L}*_{sr}\Gamma}(\mathcal{L})$. Fie $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \Gamma$. Atunci $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \Gamma$ (Teorema 13.1.2). Pentru un obiect al subcategoriei $\mathcal{L}$ se verifică uşor că $\mathcal{R}$- şi $(\mathcal{L} *_{sr} \Gamma)$- şi $(\mathcal{L} \cap \Gamma)$-replicile coincid. Astfel

$$\lambda_{\mathcal{L}*_{sr}\Gamma}(\mathcal{L}) = \lambda_{\mathcal{L}\cap\Gamma}(\mathcal{L}) = \Gamma.$$

$\varphi_\lambda \cdot \psi_\lambda = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci

$$\varphi_\lambda\psi_\lambda(\mathcal{R}) = \varphi_\lambda(\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})) = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}).$$

Astfel trebuie demonstrat că $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$, lucru evident, deoarece $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

14.4.3. Corolar. *Aplicaţiile* φ_λ *şi* ψ_λ *stabilesc un izomorfism al laticelor* $\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{S})$ *şi* $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{S})$.

$$\mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{S}) \xrightarrow{\varphi_\lambda} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_\lambda} \mathbf{\Gamma}_\lambda(\mathcal{S}). \uparrow$$

14.5. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$

14.5.1. Pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ avem $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

Notaţii. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}), \mathbb{A}(\mathcal{R})$ *clasa elementelor* $\mathcal{T}$ *din* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *cu următoarele proprietăţi:*

A. $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$.

B. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{T})$.

C. $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{T})$.

Mai departe, fie

$$\psi_m(\mathcal{R}) = \cap\{\mathcal{T}|\mathcal{T} \in \mathbb{A}(\mathcal{R})\},\ \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\psi_m(\mathcal{R})|\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})\}.$$

14.5.1*. Întotdeauna pentru $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ avem $\mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

Notaţii. *Fie* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}), \mathbb{B}(\mathcal{U})$ *clasa elementelor* $\mathcal{V}$ *din* $\mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$ *cu următoarele proprietăţi:*

A^*. $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

B^*. $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V})$.

C^*. $\mathcal{U} = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V})$.

Mai departe, fie

$$\bar{\psi_m}(\mathcal{U}) = \cap\{\mathcal{V}|\mathcal{V} \in \mathbb{B}(\mathcal{U})\},\ \mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K}) = \{\bar{\psi}_m(\mathcal{U})|\mathcal{U} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})\}.$$

Lemă. *1.* $\mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

1^*. $\mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K}) \subset \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

$\downarrow$ 1. Deoarece $\mathbb{A}(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. $\uparrow$

14.5.2. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \varphi_m(\mathcal{H}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) \text{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_m(\mathcal{R}) \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în $\mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile ψ_m *şi* φ_m *sunt reciproc inverse*

$$\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi_m} \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_m} \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$$

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L})$. În primul rând, menţionăm că $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H})$ este o subcategorie reflectivă (Teorema 9.4.15).

Să verificăm că $\varphi_m(\mathcal{H})$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{S})$-subobiecte. Avem $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\varphi_m(\mathcal{H})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H})$ =(în virtutea Teoremei 9.4.15))= $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H})$ = (în virtutea proprtietăţii B)= $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = \varphi_m(\mathcal{H})$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi o să verificăm că $\psi_m(\mathcal{R}) \in \mathbb{A}(\mathcal{R})$. Fie $A \in |\psi_m(\mathcal{R})|$, şi $\mathcal{T}$ un element arbitrar al clasei $\mathbb{A}(\mathcal{R})$. Atunci $A \in |\mathcal{T}|$. Mai departe, orice $(\varepsilon\mathcal{S})$-subobiect şi orice $(\varepsilon\mathcal{L})$-factorobiect al obiectului A aparţin subcategoriei $\mathcal{T}$, deci şi subcategoriei $\psi_m(\mathcal{R})$. Astfel $\psi_m(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\psi_m(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R}))$.

Să verificăm că $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R}))$ (condiţia C). Deoarece $\psi_m(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, rezultă că $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R})) \subset \mathcal{R}$. Să demonstrăm că $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R}))$. Fie $Z \in |\mathcal{R}|$. Atunci $mZ \in |\mathcal{R}|$, unde mZ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui Z. Din condiţia C pentru subcategoria $\mathcal{T}$, deducem că $mZ \in |\mathcal{T}|$. Deoarece $\mathcal{T}$ este un element arbitrar din clasa $\mathbb{A}(\mathcal{R})$, obţinem că $mZ \in |\psi_m(\mathcal{R})|$, şi în virtutea condiţiei C, că $Z \in |\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R}))|$.

3. $\varphi_m \cdot \psi_m = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Trebuie să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_m(\mathcal{R}))$, ceea ce rezultă din p.2.

$\psi_m \cdot \varphi_m = 1$. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci există $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ astfel încât $\mathcal{H} = \psi_m(\mathcal{R})$. Avem

$$\psi_m\varphi_m(\mathcal{H}) = \psi_m\varphi_m\psi_m(\mathcal{R}) = \psi_m(\mathcal{R}) = \mathcal{H}. \uparrow$$

14.5.2*. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}_m(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V}) \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \bar{\psi}_m(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}_m$ şi $\bar{\psi}_m$ sunt reciproc inverse

$$\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\bar{\psi}_m} \mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_m} \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}). \uparrow$$

14.6. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L}), \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$

14.6.1. Notaţii. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{A}_j(\mathcal{R})$ clasa elementelor $\mathcal{T}$ din $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ cu următoarele proprietăţi:*

A_1. $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$.

B_1. $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{T})$.

C_1. $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{T})$.

Mai departe, fie $\psi_j(\mathcal{R}) = \cap\{\mathcal{T}|\mathcal{T} \in \mathbb{A}_j(\mathcal{R})\}$, şi $\mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L}) = \{\psi_j(\mathcal{R})|\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})\}$.

14.6.1*. Fie $\mathcal{K} \subset \mathbb{K}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$.

Notaţii. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}), \mathbb{B}_j(\mathcal{U})$ clasa elementelor $\mathcal{V}$ din clasa $\mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$ cu următoarele proprietăţi:

A_1^0. $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

B_1^0. $\mathcal{V} = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V})$.

C_1^0. $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V})$.

Mai departe, fie $\bar{\psi}_j(\mathcal{U}) = \cap\{\mathcal{V}|\mathcal{V} \in \mathbb{B}_j(\mathcal{U})\}$, şi $\mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K}) = \{\bar{\psi}_j(\mathcal{U})|\mathcal{U} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})\}$.

Lemă.*1.* $\mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

1.* $\mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K}) \subset \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$. $\uparrow$

14.6.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \varphi_j(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) \textit{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_j(\mathcal{R}) \textit{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ_j şi ψ_j sunt reciproc inverse

$$\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}) \xrightarrow{\psi_j} \mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$$

$\downarrow$ 1. În primul rând, menţionăm că $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H})$ este o subcategorie reflectivă (Propoziţia 9.4.15 p.1). Să verificăm că $\varphi_j(\mathcal{H})$ este închisă în raport cu $(\varepsilon\mathcal{S})$-factorobiecte. Avem

$$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\varphi_j(\mathcal{H})) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = (\text{în virtutea Teoremei } 9.4.15 \text{ p.3}) =$$

$$\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = (\text{în virtutea condiţiei } \mathrm{B}_1) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = \varphi_j(\mathcal{H}).$$

2. Să verificăm că $\psi_j(\mathcal{R}) \in \mathbb{A}_j(\mathcal{R})$. Fie $A \in |\psi_j(\mathcal{R})|$, şi $\mathcal{T}$ un element arbitrar al clasei $\mathbb{A}_j(\mathcal{R})$. Atunci $A \in |\mathcal{T}|$. Mai departe orice $(\varepsilon\mathcal{L})$-subobiect şi orice $(\varepsilon\mathcal{S})$-factorobiect al obiectului A aparţin subcategoriei $\mathcal{T}$, deci şi subcategoriei $\psi_i(\mathcal{R})$. Astfel $\psi_j(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\psi_j(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_j(\mathcal{R}))$.

Deoarece $\psi_j(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, rezultă că $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_j(\mathcal{R})) \subset \mathcal{R}$. Să demonstrăm că $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_j(\mathcal{R}))$. Fie $Z \in |\mathcal{R}|$. Atunci $sZ \in |\mathcal{R}|$, unde sZ este $\mathcal{S}$-replica lui Z. Din condiţia C_1 deducem că $sZ \in |\mathcal{T}|$. Deoarece $\mathcal{T}$ este un element arbitrar din clasa $\mathbb{A}_j(\mathcal{R})$, obţinem că $sZ \in |\psi_j(\mathcal{R})|$, şi în virtutea condiţiei C_1, că $Z \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_j(\mathcal{R}))|$.

3. $\varphi_j \cdot \psi_j = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Trebuie să demonstrăm că $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\psi_j(\mathcal{R}))$, ceia ce rezultă din p.2.

$\psi_j \cdot \varphi_j = 1$. Fie $\mathcal{H} \in \mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci există $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ astfel încât $\mathcal{H} = \psi_j(\mathcal{R})$. Avem

$$\psi_j\varphi_j(\mathcal{H}) = \psi_j\varphi_j\psi_j(\mathcal{R}) = \psi_j(\mathcal{R}) = \mathcal{H}. \uparrow$$

14.6.2*. Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}_u)$. Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar{\varphi}_j(\mathcal{V}) = \mathcal{S}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{V}) \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \bar{\psi}_j(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\psi}_j$ şi $\bar{\varphi}_j$ sunt reciproc inverse

$$\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\bar{\psi}_j} \mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\bar{\varphi}_j} \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}). \uparrow$$

14.7. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_{fu}(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$

14.7.1. Notaţii. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{L}$ şi*

$$\mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R} | \mathcal{V} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}\},\ \mathbb{R}^s_{fu}(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{P}''(\mathcal{V})).$$

Teoremă. *1. Aplicaţia*

$$\mathcal{T} \mapsto \varphi_u(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_{fu}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_u(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fu}(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ_u *şi* ψ_u *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_u} \mathbb{R}^s_{fu}(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_u} \mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L}).$$

4. Fie $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \in \mathbb{B}$, *şi* $\mathcal{T}$ *o* $\mathcal{P}$*-varietate. Atunci* $\varphi_u(\mathcal{T})$ *este de asemenea o* $\mathcal{P}$*-viarietate.* $\uparrow$

$\downarrow$ 1-2 Evident.

3. A se vedea Teorema 14.1.1 p.3

4. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{V}, \mathcal{L})$ şi $\mathcal{T}$ o $\mathcal{P}$-varietate. Mai departe, fie $A \in |\varphi_u(\mathcal{T})|$ şi $p : A \to X \in \mathcal{P}$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{T}|$ şi morfismul $b : A \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Fie

$$b' \cdot p = p' \cdot b$$

pătratul cocartezian. Atunci $p' \in \mathcal{P}$ şi $T \in |\mathcal{T}|, b' \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $X \in |\varphi_u(\mathcal{T})|$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "b"'] & X \arrow[d, dashed, "b'"] \\ Z \arrow[r, dashed, "p'"] & T \end{tikzcd}$$

14.8. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}_g(\mathcal{L}), \mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}$

14.8.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}$, *şi*

$$\mathbb{R}_g(\mathcal{L}) = \{\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{L}) | \mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}\}.$$

Restricţia aplicaţiei $\varphi : \mathbb{R}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *pe subclasa* $\mathbb{R}_g(\mathcal{L})$ *o vom nota-o* φ_{gl}, *şi restricţia aplicaţiei* $\psi : \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \to \mathbb{R}(\mathcal{L})$ *pe subclasa* $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ *o vom nota-o* ψ_{gl}.

14.8.2. Teoremă. *1. Apicaţia*

$$\mathcal{T} \mapsto \varphi_{gl}(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{R}_g(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Apicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_{gl}(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \textit{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}).$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_g(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile φ_{gl} *şi* ψ_{gl} *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}_g(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_{gl}} \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_{gl}} \mathbb{R}_g(\mathcal{L}).$$

$\downarrow$ În virtutea Teoremelor 14.1.1 şi 13.3.4. p.1. $\uparrow$

14.9. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{N}_d(\mathcal{L})$

14.9.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, *şi*

$$\mathbb{N}_d(\mathcal{L}) = \{\mathbb{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L}) | \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})\}.$$

14.9.2. Propoziţie. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_1 \neq \mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2$.

Atunci clasele $\mathbb{N}_d(\mathcal{R}_1, \mathcal{L})$ şi $\mathbb{N}_d(\mathcal{R}_2, \mathcal{L})$ sunt disjuncte.

$\downarrow$ Demonstrăm afirmaţia de la contrariu. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{N}_d(\mathcal{R}_1, \mathcal{L}) \cap \mathbb{N}_d(\mathcal{R}_2, \mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2 = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ (Teorema 13.1.2). Deci $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2$. $\uparrow$

14.9.3. Remarcă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$. *Atunci* $\mathbb{N}_d(\mathcal{L})$ *divizează clasa* $\mathbb{R}$ *în clase disjuncte două câte două. Într-adevăr pentru* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$, *avem* $\mathcal{T} \in \mathbb{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$, *unde* $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$. $\uparrow$

14.9.4. Teoremă. *Laticele* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathbb{N}_d(\mathcal{L})$ *sunt izomorfe.*

$\downarrow$ Aplicaţia $\mathcal{R} \mapsto \varphi_n(\mathcal{R}) = \mathbb{N}_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ este surjectivă. Să verificăm că ia este injectivă. Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{N}_d(\mathcal{R}_1, \mathcal{L}) = \mathbb{N}_d(\mathcal{R}_2, \mathcal{L})$. Deoarece $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ este cel mai mic element în clasa $\mathbb{N}_d(\mathcal{R}_1, \mathcal{L})$, şi $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2$ este cel mai mic element în clasa $\mathbb{N}_d(\mathcal{R}_2, \mathcal{L})$ (Corolarul 13.1.3), rezultă că $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2$. Atunci

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_1) = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_2.$$

Aplicaţia inversă o notăm $\psi_n : \mathbb{N}_d(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

$$\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{N}_d(\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_n} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}). \uparrow$$

14.10. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{T})$ şi $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K}), \mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$

14.10.1. Pentru o subcategorie coreflectivă $\mathcal{K}$ a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ vom examina clasa $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ a subcategoriilor reflective a categoriei $\mathcal{K}$. Unele elemente ale acestei clase pot fi obţinute ca intersecţia elementelor clasei $\mathbb{R}$ cu $\mathcal{K}$.

Exemple. *1. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ (vezi Corolarul 12.5.17).*

2. Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. Atunci $\mathcal{K} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ (vezi Propoziţia 6.5.11).

3. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$ şi $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}'(\mathcal{K}))$. Atunci $\mathcal{K} \cap \Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ (vezi Propoziţia 6.5.11).

4. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_{fg}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$ (vezi Teorema 13.3.9).

5. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$ şi $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$. Atunci $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$.

6. Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$ şi $\mathcal{H}$ este o subcategorie închisă în raport cu $(\mathcal{M}_f \circ (\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u))$-subobiecte. Atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$.

14.10.2. Notaţii. *Fie $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$.*

- $\mathcal{B}_k(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \cap \mu\mathcal{K}$.

- $\mathbb{R}(\mathcal{T})$ *clasa subcategoriilor reflective a categoriei* $\mathcal{T}$.

- $\mathbb{R}^k(\mathcal{T})$ *clasa elementelor din* $\mathbb{R}(\mathcal{T})$ *închise în raport cu* $\mathcal{B}_k(\mathcal{T})$*-subobiecte.*

- $\mathbb{R}_k(\mathcal{T})$ *clasa elementelor din* $\mathbb{R}(\mathcal{T})$ *închise în raport cu* $\mathcal{B}_k(\mathcal{T})$*-factorobiecte.*

- $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{T}) = \mathbb{R}^k(\mathcal{T}) \cap \mathbb{R}_k(\mathcal{T})$.

14.10.2*. Notaţii. *Fie $\mathcal{H}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$.*

- $\mathcal{B}_l(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cap \varepsilon\mathcal{L}$.

- $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ *clasa subcategoriilor coreflective a categoriei* $\mathcal{H}$.

- $\mathbb{K}^l(\mathcal{H})$ *clasa elementelor din* $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ *închise în raport cu* $\mathcal{B}_l(\mathcal{H})$*-subobiecte.*

- $\mathbb{K}_l(\mathcal{H})$ *clasa elementelor din* $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ *închise în raport cu* $\mathcal{B}_l(\mathcal{H})$*-factorobiecte.*

- $\mathbb{K}_l^l(\mathcal{H}) = \mathbb{K}^l(\mathcal{H}) \cap \mathbb{K}_l(\mathcal{H})$

14.10.3. Lemă. *Fie $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, şi $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_k^k(\mathcal{T})$, Atunci:*

1. $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})| \Leftrightarrow tA \in |\mathcal{U}|$.

2. $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$.

$\downarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{U}|$ şi un morfism $b : Z \to A \in \mu\mathcal{T}$. Atunci

$$t^A = b \cdot f \tag{1}$$

pentru un f. Astfel $f \in \mathcal{T} \cap \mu\mathcal{T}$ şi f este $\mathcal{T}$-coreplica lui Z. Deoarece $Z \in |\mathcal{T}|$, rezultă că $f \in \mathcal{I}so$, iar $tA \in |\mathcal{U}|$. Afirmaţia reciprocă este evidentă.

2. Deoarece $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, rezultă că $\mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K}$, şi $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})$. Fie $Z \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U})|$. Atunci există $A \in |\mathcal{U}|$ şi $b : A \to Z \in \mu\mathcal{K}$. Fie $t^Z : tZ \to Z$ $\mathcal{T}$-coreplica lui Z. Deoarece $A \in |\mathcal{T}|$, rezultă că

$$b = t^Z \cdot f \tag{2}$$

pentru un f. Avem $f \in \mathcal{T} \cap \mu\mathcal{K}$ şi $A \in |\mathcal{U}|$. Deci $tZ \in |\mathcal{U}|$. Conform p.1 $Z \in |\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})$. $\uparrow$

14.10.3* Lemă. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{H} \in \mathbb{R}, \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, *şi* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}_l^l(\mathcal{H})$. *Atunci:*

1. $A \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})| \Leftrightarrow hA \in |\mathcal{U}|$.

2. $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{H}}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})$. $\uparrow$

14.10.4. Teoremă. *Fie* $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}$ *şi* $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$.

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_t^t(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U}) \textit{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}_t^t(\mathcal{T})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi_t^t(\mathcal{V}) = \mathcal{T} \cap \mathcal{V} \textit{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_t^t(\mathcal{T})$.

3. Aplicaţiile φ_t^t *şi* ψ_t^t *sunt reciproc inverse.*

$$\mathbb{R}_t^t(\mathcal{T}) \xrightarrow{\varphi_t^t} \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K}) \xrightarrow{\psi_t^t} \mathbb{R}_t^t(\mathcal{T}).$$

4. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$. *Atunci* $v(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$.

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_t^t(\mathcal{T})$, şi $\mathcal{V} = \varphi_t^t(\mathcal{U})$. O să demonstrăm că $A \in |\mathcal{V}|$ atunci şi numai atunci, când $tA \in |\mathcal{U}|$. Dacă $tA \in |\mathcal{U}|$ evident $A \in |\mathcal{V}|$. Fie $A \in |\mathcal{V}|$. Există un obiect $Z \in |\mathcal{U}|$ şi $b : Z \to A \in \mu\mathcal{T}$. Atunci

$$t^A = b \cdot f \tag{1}$$

pentru un f. Astfel $tA \in |\mathcal{U}|$.

Să verificăm că $\mathcal{V}$ este închisă în raport cu produse. Fie $\{A_i | i \in \mathcal{I}\}$ o familie de obiecte a subcategoriei $\mathcal{V}, t^{A_i} : tA_i \to A_i$ $\mathcal{T}$-coreplicile obiectelor $A_i, i \in \mathcal{I}, A = \prod\{A_i | i \in \mathcal{J}\}, P = \prod\{tA_i | i \in \mathcal{J}\}$ cu proiecţiile canonice $p_i : A \to A_i, q_i : P \to tA_i, i \in \mathcal{J}$. Mai departe, fie $t^P : tP \to P$ $\mathcal{T}$-coreplica lui P, iar $f = \Pi\{t^{A_i} | i \in \mathcal{J}\}$. Se verifică uşor că $f \cdot t^P$ este $\mathcal{T}$- coreplica lui A.

Fie $u^{tP} : tP \to utP$ $\mathcal{U}$-replica lui tP. Deoarece $A_i \in |\mathcal{V}|$, deducem că $tA_i \in |\mathcal{U}|, i \in \mathcal{J}$. Atunci

$$\begin{tikzcd}
tP \arrow[r, "t^P"] \arrow[d, shift right, "u^{tP}"'] & P = \prod tA_j \arrow[r, "f = \prod t^{A_j}"] \arrow[d, "q_i"'] & A = \prod A_j \arrow[d, "p_i"'] \\
utP \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, dashed, "h_i"] & tA_i \arrow[r, "t^{A_i}"] & A_i
\end{tikzcd}$$

Figura 14.10.1

$$q_i \cdot t^P = h_i \cdot u^{tP}, i \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

pentru un h_i. Astfel

$$h_i = q_i \cdot h \tag{3}$$

pentru un h. Deoarece $utP \in |\mathcal{T}|$, rezultă că

$$h = t^P \cdot g \tag{4}$$

pentru un g. Se verifică că $u^{tP} = g^{-1}$.

Subcategoria $\mathcal{V}$ este închisă în raport cu $\mathcal{M}_f$-subobiecte. Într-adevăr, fie $A \in |\mathcal{V}|, m : X \to A \in \mathcal{M}_f$, şi $t^X : tX \to X$ şi $t^A : tA \to A$ $\mathcal{T}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$m \cdot t^X = t^A \cdot t(m) \tag{5}$$

Fie $u^{tX} : tX \to utX$ $\mathcal{U}$-replica lui tX. Deoarece $tA \in |\mathcal{U}|$, avem

$$t(m) = f \cdot u^{tX} \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
tX \arrow[rr, "t(m)"] \arrow[dd, "t^X"'] \arrow[dr, shift left, "u^{tX}"] & & tA \arrow[dd, "t^A"] \\
& utX \arrow[ul, dashed, shift left, "h"] \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"] & \\
X \arrow[rr, "m \in \mathcal{M}_f"] & & A
\end{tikzcd}$$

Figura 14.10.2

pentru un f. Atunci

$$(t^A \cdot f) \cdot u^{tX} = m \cdot t^X \tag{7}$$

cu $u^{tX} \in \mathcal{E}pi$ şi $m \in \mathcal{M}_f : u^{tX} \perp m$. Astfel

$$t^X = g \cdot u^{tX}, \tag{8}$$

$$t^A \cdot f = m \cdot g \tag{9}$$

pentru un g. Deoarece $utX \in |\mathcal{T}|$

$$t^X \cdot h = g \tag{10}$$

pentru un h. Se verifică că $u^{tX} = h^{-1}$.

$\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$. Fie $A \in |\mathcal{V}|, b : X \to A \in \mu\mathcal{K}$, iar $t^X : tX \to X$ şi $t^A : tA \to A$ $\mathcal{T}$-coreplicile obiectelor respective. Atunci

$$b \cdot t^X = t^A \cdot t(b). \tag{11}$$

Avem $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$, deci $\mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K}$. Astfel $b \cdot t^X \in \mu\mathcal{K}$, sau $t^A \cdot t(b) \in \mu\mathcal{K}$ şi $t^A \in \mu\mathcal{K}$. Atunci $t(b) \in \mu\mathcal{K}$, sau $t(b) \in \mathcal{T} \cap \mu\mathcal{K}$ şi $t(A) \in |\mathcal{U}|$. Deci $tX \in |\mathcal{U}|$, şi $X \in |\mathcal{V}|$.

$\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f(\mu\mathcal{K})$. În diagrama precedentă, dacă $X \in |\mathcal{U}|$, atunci $tX \in |\mathcal{U}|$, şi $t(b) \in \mathcal{T} \cap \mu\mathcal{K}$. Deci $tA \in |\mathcal{U}|$, şi $A \in |\mathcal{V}|$.

2. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, $\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap \mathcal{V}$ şi o să demonstrăm că $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^t_t(\mathcal{T})$. Să verificăm, în primul rând, că $\mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{T}|$, $v^A : A \to vA$ $\mathcal{V}$-replica lui A, şi $t^{vA} : tvA \to vA$ $\mathcal{T}$-replica lui vA. Atunci

$$v^A = t^{vA} \cdot f \tag{12}$$

pentru un f. Deoarece $t^{vA} \in \mu\mathcal{T} \subset \mu\mathcal{K}$ şi $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$, rezultă că $tvA \in |\mathcal{V}|$. Astfel

$$f = g \cdot v^A \tag{13}$$

pentru un g. Se verifică uşor că $t^{vA} = g^{-1}$.

3. $\psi^t_t \cdot \varphi^t_t = 1$. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^t_t(\mathcal{T})$, şi $\mathcal{V} = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})$. Deoarece $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ şi $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, rezultă că $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{V}$.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$. Fie $A \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{V}|$. Atunci $tA \in |\mathcal{U}|$ şi, deoarece $tA = A$, rezultă că $\mathcal{T} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

$\varphi^t_t \cdot \psi^t_t = 1$. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\mu\mathcal{K})$, şi $\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap \mathcal{V}$. Dacă $A \in |\mathcal{V}|$, atunci $tA \in |\mathcal{U}|$. Deci $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})$.

$\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Fie $A \in \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{T}}(\mathcal{U})$. Atunci $tA \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{U}|$.

4. Reiese din demonstraţia p.2. $\uparrow$

Teorema 14.10.4*. *Fie $\mathcal{H}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$.*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_\ell^\ell(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{H}}(\mathcal{U}) \textit{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi_\ell^\ell(\mathcal{V}) = \mathcal{H} \cap \mathcal{V} \textit{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H})$.

3. Aplicaţiile φ_ℓ^ℓ *şi* ψ_ℓ^ℓ *sunt reciproc inverse*

$$\mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H}) \xrightarrow{\varphi_\ell^\ell} \mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi_\ell^\ell} \mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H}).$$

4. Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Atunci* $v(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. $\uparrow$

14.10.5. Să examinăm un caz particular al Teoremei precedente. Dacă $\mathcal{T} = \mathcal{K}$, atunci $\mathcal{B}_k(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cap \mu\mathcal{K} = \mathcal{I}so$. Astfel $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{K}) = \mathbb{R}(\mathcal{K})$.

Teoremă. *Fie* $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$.

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_1(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}(\mathcal{U}) \textit{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \psi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{V} \textit{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{K})$.

3. Aplicaţiile φ_1 *şi* ψ_1 *sunt reciproc inverse, unde* ψ_1 *este restricţia aplicaţiei* ψ_i *pe subclasa* $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}(\mathcal{K}) \arrow[r, "\varphi_1"] & \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K}) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{R}(\mathcal{K}) \\
& \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K}) \arrow[ur, "\psi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 14.10.3

4. Pentru $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$ $\varphi_1\psi_i(\mathcal{V})$ *este cel mai mic element al clasei* $\mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$ *ce-l conţine pe* $\mathcal{V}$.

$\downarrow$ Menţionăm că în demonstraţia p.2 al Teoremei 14.10.4 se apelează doar la faptul că $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s(\mu\mathcal{K})$.

Punctul 4 este evident. $\uparrow$

14.10.5*. Teoremă. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. *Atunci*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{H} \mapsto \bar{\varphi}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{H}) \text{ pentru } \mathcal{H} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{T} \mapsto \bar{\psi}_i(\mathcal{T}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{T} \text{ pentru } \mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}(\mathcal{L})$.

3. Aplicaţiile $\bar{\varphi}$ *şi* $\bar{\psi}$ *sunt reciproce inverse, unde* $\bar{\psi}$ *este restricţia aplicaţiei* $\bar{\psi}_i$ *pe clasa* $\mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{K}(\mathcal{L}) \\
& \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[ur, "\bar{\psi}_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 14.10.4

4. Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ $\bar{\psi}_i\bar{\varphi}(\mathcal{T})$ *este cel mai mic element al clasei* $\mathbb{K}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ *ce-l conţine pe* $\mathcal{T}$. $\uparrow$

14.10.6. Corolar. *1. Fie* $\mathcal{K}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{K}$, *şi* $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. *Atunci laticele* $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{T}_1)$ *şi* $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{T}_2)$ *sunt izomorfe.*

1^0. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathbb{R}$, *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$. *Atunci laticele* $\mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H}_1)$ *şi* $\mathbb{K}_\ell^\ell(\mathcal{H}_2)$ *sunt izomorfe.*

2. Fie $\mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci* $\mathbb{R}(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}$, *şi* $\mathbb{R}_k^k(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K})$ *şi obţinem izomorfismul identic*

$$\varphi_k^k : \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K}) \to \mathbb{R}_f^s(\mu\mathcal{K}). \uparrow$$

14.11. Izomorfismul laticelor $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T}), \mathcal{L}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$

14.11.1. Notaţii. *Fie* $\mathcal{L}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$. *Atunci* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T})$ *este clasa tuturor* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{T})$ *cu următoarea proprietate:*

pentru orice $A \in |\mathcal{R}|$, *orice* $(\varepsilon\mathcal{T})$*-factorobiect este un* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-factorobiect sau, ce-i acelaşi lucru,* $\mathcal{R} \subset \rho(\mathcal{T}, \mathcal{L})$.

d^* : Fie $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Atunci $\mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{U}, \mu\mathcal{V})$ este clasa tuturor $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{U})$ cu următoarea proprietate: pentru orice $A \in |\mathcal{K}|$ orice $(\varepsilon\mathcal{V})$-subobiect este $(\mu\mathcal{U})$-subobiect.

14.11.2. Teoremă. *Fie $\mathcal{L}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$ şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}$. Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{U} \mapsto \varphi_{lt}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U}) \text{ pentru } \mathcal{U} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{R} \mapsto \psi_{lt}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \text{ pentru } \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$$

ia valori în clasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T})$.

3. Restricţia aplicaţiei $\varphi_{lt} : \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}) \to \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ pe subclasa $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T})$ $\varphi_{lt} : \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T}) \to \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi aplicaţia ψ_{lt} sunt reciproc inverse.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L},\varepsilon\mathcal{T}) \arrow[rr, "\varphi_{lt}"] \arrow[dr, "id"'] & & \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[r, "\psi_{lt}"] & \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L},\varepsilon\mathcal{T}) \\
& \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[ur, "\varphi_{lt}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 14.11.1

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})$. Deoarece $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, în virtutea Teoremei 9.4.11, rezultă că $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

2. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ şi $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Deoarece $\mathcal{T} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$ este o structură de factorizare de dreapta şi $\varepsilon\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_u$, $\mathcal{U}$ este o subcategorie reflectivă.

Este evident că $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Să verificăm că $\mathcal{U} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T})$. Fie $A \in |\mathcal{U}|$ şi $b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{T}$. Atunci $t^A : A \to tA \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi

$$t^A = b_1 \cdot b \tag{1}$$

pentru un b_1. Este clar că $b, b_1 \in \varepsilon\mathcal{L}$.

Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Pentru $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ examinăm replicile obiectelor respective.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[drr, dashed, "u^X"] \arrow[dd, "f"'] & & rX \arrow[rr, "t^{rX}"] & & trX \arrow[dd, dashed, "g"] \\
& & uX \arrow[urr, dashed, "b^X"'] \arrow[dll, dashed, "h"'] & & \\
A \arrow[rrrr, "b"] & & & & B
\end{tikzcd}$$

Figura 14.11.2

Mai departe, fie

$$t^{rX} \cdot r^X = b^X \cdot u^X \tag{2}$$

$((\varepsilon\mathcal{L})^\top, \varepsilon\mathcal{L})$-factorizarea morfismului respectiv. Să demonstrăm că u^X este $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T} \cap \mathcal{R})$-replica lui X. Într-adevăr, fie $B \in |\mathcal{T} \cap \mathcal{R}|, b : A \to B \in \varepsilon\mathcal{L}$ şi $f : X \to A$. Atunci

$$b \cdot f = g \cdot t^{rX} \cdot r^X \tag{3}$$

pentru un g. Sau

$$(g \cdot b^X) \cdot u^X = b \cdot f \tag{4}$$

cu $u^X \in (\varepsilon\mathcal{L})^\top$ şi $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Deci

$$f = h \cdot u^X, \tag{5}$$

$$g \cdot b^X = b \cdot h \tag{6}$$

pentru un h. Astfel f se extinde prin u^X.

3. $\psi_{lt} \cdot \varphi_{lt} = 1$. Fie $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T})$. Atunci $\psi_{lt}\varphi_{lt}(\mathcal{U}) = \psi_{lt}(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U}))$.

Să verificăm egalitatea $\mathcal{U} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{U}))$.

Avem $\mathcal{T} \cap \mathcal{U} = \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{U})$ şi $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T} \cap \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{U})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{T} \cap \mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

$\varphi_{lt} \cdot \psi_{lt} = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Atunci $\varphi_{lt}\psi_{lt}(\mathcal{R}) = \varphi_{lt}(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{T}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{R}$. ↑

14.11.2*. Teoremă. *Fie $\mathcal{U}, \mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$. Atunci:*

1. Aplicaţia

$$\mathcal{W} \mapsto \bar\varphi_{uk}(\mathcal{W}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{U}}(\mathcal{W}) \text{ pentru } \mathcal{W} \in \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$.

2. Aplicaţia

$$\mathcal{V} \mapsto \bar\varphi_{uk}(\mathcal{V}) = \mathcal{Q}_{\mu\mathcal{V}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{K}) \text{ pentru } \mathcal{V} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$$

ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{U}, \mu\mathcal{K})$.

3. Restricţia aplicaţiei $\bar\varphi_{uk} : \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{V}) \to \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{V})$ pe subclasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{V})$ $\bar\varphi_{uk} : \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{U}, \mu\mathcal{V}) \to \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ şi aplicaţia $\bar\psi_{uk}$ sunt reciproc inverse. ↑

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}, \mu\mathcal{U}) \arrow[rr, "\bar\varphi_{uk}"] \arrow[dr, "id"'] & & \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \arrow[rr, "\bar\Psi_{uk}"] & & \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}, \mu\mathcal{U}) \\
& \mathbb{K}^s(\mu\mathcal{K}) \arrow[ur, "\bar\varphi_{uk}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 14.11.3

14.11.3. Exemple. *1. Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$ *şi* $\mathcal{L} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Atunci* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}, \varepsilon\mathcal{T}) = \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \varepsilon\mathcal{T})$. *Avem* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}$.

Mai departe, orice $(\varepsilon\mathcal{T})$*-factorobiect al unui obiect este un iso, atunci şi numai atunci, când acest obiect aparţine subcategoriei* $\mathcal{T}$. *Deci* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \varepsilon\mathcal{T}) = \mathbb{R}(\mathcal{T})$. *Astfel aplicaţiile reciproc inverse din Teorema 14.11.2 coincid cu aplicaţiile reciproc inverse din p. 14.1.5*

$$\mathbb{R}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}(\mathcal{T}).$$

2. Fie $\mathcal{L}, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{R}_c, \mathcal{L} \subset \mathcal{U}, \mathcal{L} \subset \mathcal{V}$. *Atunci clasele* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{U}, \varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{V}, \varepsilon\mathcal{L})$ *sunt izomorfe.*

2^*. *Fie* $\mathcal{K}, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbb{K}_c, \mathcal{K} \subset \mathcal{U}, \mathcal{K} \subset \mathcal{V}$. *Atunci clasele* $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}, \mu\mathcal{K})$ *şi* $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}, \mu\mathcal{V})$ *sunt izomorfe.*

Capitolul 15. Dualităţi semireflexive

15.1. Functorii d_σ şi d_τ.

În acest paragraf se construiesc doi functori contravarianţi $d_\sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ şi $d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ şi se studiază unele proprietăţi ale lor.

15.1.1. Fie $f : (E, u) \to (F, v)$ un operator liniar şi continuu, adică $f \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Examinăm spaţiile conjugate E' şi F'. Acest operator defineşte operatorul conjugat $f' : F' \to E'$, care se defineşte conform regulii:

$$f'(g) = g \cdot f, \ \forall g \in F',$$

$$(E, u) \xrightarrow{f} (F, v) \xrightarrow{g} K.$$

$$F' \xrightarrow{f'} E'$$

15.1.2. Teoremă ([Sh, 1966], cap. IV, Teorema 7.4). *Fie $f : E \to F \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Atunci:*

1. Operatorul f rămâne continuu, dacă spaţiile E şi F sunt înzestrate cu topologiile slabe $\sigma(E, E')$ şi $\sigma(F, F')$.

$$s(f) : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F')).$$

2. Operatorul f rămâne continuu, dacă spaţiile E şi F sunt înzestrate cu topologiile Mackey $\tau(E, E')$ şi $\tau(F, F')$.

$$m(f) : (E, \tau(E, E')) \to (F, \tau(F, F')).$$

3. Operatorul conjugat $f' : F' \to E'$ devine continuu, dacă spaţiile F' şi E' sunt înzestrate cu topologiile slabe $\sigma(F', F)$ şi $\sigma(E', E)$

$$f' = d_\sigma(f) : (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E)).$$

4. Operatorul conjugat $f' : F' \to E'$ devine continuu, dacă spaţiile F' şi E' sunt înzestrate cu topologiile Mackey $\tau(F', F)$ şi $\tau(E', E)$.

$$f' = d_\tau(f) : (F', \tau(F', F)) \to (E', \tau(E', F)).$$

15.1.3. Remarcă. *1. Spaţiul $(E, \sigma(E, E'))$ este $\mathcal{S}$-replica obiectului (E, u), şi $s(f)$ este imaginea morfismului f pentru functorul reflector $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$.*

2. Spaţiul $(E, \tau(E, E'))$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului (E, u), şi $m(f)$ este imaginea morfismului f pentru functorul coreflector $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$.

15.1.4. Teoremă ([Sh, 1966], cap. IV, Teorema 2.2). *Fie*

$$(E,u) \xrightarrow{f} (F,v) \xrightarrow{g} (G,w)$$

doi opeatori liniari şi continui. Atunci conjugatul operatorului $g \cdot f$ este operatorul $f' \cdot g'$.

$$(g \cdot f)' = f' \cdot g'.$$

15.1.5. Astfel cele expuse le putem formula în modul următor:

Teoremă. *Fie $f : (E,u) \to (F,v)$ un morfism al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

1. Corespondenţa

$$f : (E,u) \to (F,v) \mapsto f' : (F', \sigma(F',F)) \to (E', \sigma(E',E))$$

defineşte un functor contravariant

$$d_\sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S},\ d_\sigma(f) = f',$$

unde $\mathcal{S}$ este subcategoria spaţiilor cu topologie slabă.

2. Corespondenţa

$$f : (E,u) \to (F,v) \mapsto f' : (F', \tau(F',F)) \to (E', \tau(E',E))$$

defineşte un functor contravariant

$$d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}},\ d_\tau(f) = f',$$

unde $\tilde{\mathcal{M}}$ este subcategoria spaţiilor cu topologie Mackey. $\uparrow$

15.1.6. Fie F şi F_1 spaţii vectoriale peste corpul K, şi $f : F \to F_1$ o aplicaţie liniară. Notăm cu F^* şi F_1^* mulţimea funcţionalilor liniare definite pe spaţiile F şi F_1. Atunci pentru orice element $y^* \in F_1^*$ aplicaţia $y^* \cdot f : x \to y^* f(x)$ este un funcţional pe spaţiul $F : y^* f \in F^*$. Aplicaţia $y^* \mapsto y^* \cdot f$, de obicei, se notează $f^* \cdot y^*$ este o aplicaţie liniară, se numeşte conjugatul algebric f^* al aplicaţiei f :

$$f^* : F_1^* \to F^*.$$

Teoremă ([Sh, 1966], cap. IV, Teorema 2.1). *Fie (F,G) şi (F_1,G_1) două perechi de spaţii conjugate peste corpul K. Aplicaţia liniară $f : F \to F_1$ este continuă în raport cu topologiile $\sigma(F,G)$ şi $\sigma(F_1,G_1)$ atunci şi numai atunci, când $f^*(G_1) \subset G$. În acest caz restricţia f' a aplicaţiei f^* pe spaţiul G_1 o să fie continuă pentru topologiile $\sigma(G_1,F_1)$ şi $\sigma(G,F)$ şi $f'' = f$.*

15.1.7. Restricţia unui functor pe o subcategorie o vom nota-o cu acelaşi simbol, ţinând cont de sursa lui. Astfel obţinem functorii

$$d_\sigma : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}, d_\sigma : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{S}, d_\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S},$$

$$d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}, d_\tau : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}, d_\tau : \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{M}}.$$

În baza Teoremelor formulate mai sus, putem enunţa următorul rezultat.

15.1.8. Teoremă. *1. Functorii $m : \mathcal{S} \to \tilde{\mathcal{M}}$ şi $s : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{S}$ stabilesc un izomorfism al categoriilor $\tilde{\mathcal{M}}$ şi $\mathcal{S}$.*

2. Categoria $\mathcal{S}$ este autoduală:

$$d_\sigma \cdot d_\sigma \sim 1_{\mathcal{S}},$$

$$\mathcal{S} \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S} \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S}.$$

3. Categoria $\tilde{\mathcal{M}}$ este autoduală:

$$d_\tau \cdot d_\tau \sim 1_{\tilde{\mathcal{M}}},$$

$$\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}}.$$

4. Categoriile $\tilde{\mathcal{M}}$ şi $\mathcal{S}$ sunt dual izomorfe:

$$\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S} \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}},$$

$$d_\tau \cdot d_\sigma \sim 1_{\tilde{\mathcal{M}}},$$

$$\mathcal{S} \xrightarrow{d_\tau} \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{d_\sigma} \mathcal{S},$$

$$d_\sigma \cdot d_\tau \sim 1_{\mathcal{S}}.$$

5. Mai sunt adevărate şi următoarele echivalenţe:

a)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "d_\tau"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[dl, "d_\tau"] \\ \tilde{\mathcal{M}} & \end{tikzcd} \quad d_\tau \cdot m \sim d_\tau$$

b)
$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "d_\sigma`"'] & \mathcal{S} \arrow[dl, "d_\sigma"] \\ \mathcal{S} & \end{tikzcd} \quad d_\sigma \cdot s \sim d_\sigma$$

c)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "d_\sigma"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[dl, "d_\sigma"] \\ \tilde{\mathcal{M}} & \end{tikzcd} \quad d_\sigma \cdot m \sim d_\sigma$$

d)
$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "d_\tau"'] & \mathcal{S} \arrow[dl, "d_\tau"] \\ \tilde{\mathcal{M}} & \end{tikzcd} \quad d_\tau \cdot s \sim d_\tau$$

Figura 15.1.1

$\downarrow$ 1. Fie $f : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ un morfism al categoriei $\mathcal{S}$. Atunci

$$m(f) = f : (E, \tau(E, E')) \to (F, \tau(F, F')),$$

adică se schimbă doar topologiile pe spaţiile E şi F', aplicaţia liniară rămânând aceeaşi. De asemenea

$$(s \cdot m)(f) = f : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F')).$$

În acelaşi mod se verifică şi echivalenţa $m \cdot s \sim 1_{\tilde{\mathcal{M}}}$.

2. Fie $f : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F')) \in \mathcal{S}$. Atunci

$$d_\sigma(f) = f' : (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E)).$$

În baza Teoremei 15.1.6 avem $d_\sigma(f') = f'' = f$.

Cazurile 3-5 se demonstrează la fel. $\uparrow$

15.1.9. Teoremă. *Fie $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ o pereche de subcategorii conjugate a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ cu functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$. Atunci restricţiile acestor functori $k : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ şi $l : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ stabilesc un izomorfism al categoriilor $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$.* $\uparrow$

15.1.10. Fie $\mathcal{I}$ o mulţime parţial ordonată, şi $\mathcal{S}$ un I-spectru (vezi 1.5):

$$g_{\alpha\beta} : E_\beta \longrightarrow E_\alpha,\ \alpha \leq \beta,$$

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma},\ \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Notăm $h_{\beta\alpha}$ aplicaţiile conjugate la aplicaţiile $g_{\alpha\beta}$ în raport cu dualităţile (E_α, E'_α) şi $(E_\beta, E'_\beta), \alpha \leq \beta$. Deoarece $g_{\alpha\beta}$ sunt slab continui, rezultă că $g_{\beta\alpha}$ sunt slab continui, şi continui în topologia Mackey pe spaţiile E'_β şi E'_α. În plus, egalitatea

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma},\ \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

implică egalitatea

$$h_{\gamma\alpha} = h_{\gamma\beta} \cdot h_{\beta\alpha},\ \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Propoziţie ([Sh, 1966], cap. IV, Propoziţia 4.4). *Fie $E = \varprojlim(E_\beta, g_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \mathcal{I})$. Atunci*

$$(E', \tau(E', E)) = \varinjlim((E'_\alpha, \tau(E'_\alpha, E_\alpha)), h_{\beta\alpha}, \alpha, \beta \in \mathcal{I}).$$

15.1.11. Propoziţie ([Sh, 1966], cap. IV, Propoziţia 4.5). *Fie $E = \varinjlim(E_\alpha, g_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \mathcal{I})$. Atunci $(E', \sigma(E', E)) = \varprojlim((E'_\alpha, \sigma(E'_\alpha, E_\alpha), h_{\beta,\alpha}, \alpha, \beta \in \mathcal{I})$.*

15.1.12. Exerciţii.

Fie

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{k} F \xrightarrow{q} F/M \longrightarrow 0 \tag{1}$$

şir exact în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*. Atunci:*

1. Şirul

$$0 \longrightarrow d_\sigma(F/M) \xrightarrow{d_\sigma(q)} d_\sigma(F) \xrightarrow{d_\sigma(k)} d_\sigma(M) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

este exact în categoriile $\mathcal{S}$ *şi* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*.*

2. Şirul

$$0 \longrightarrow d_\tau(F/M) \xrightarrow{d_\tau(q)} d_\tau(F) \xrightarrow{d_\tau(k)} d_\tau(M) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

este exact în categoria $\tilde{\mathcal{M}}$ *a spaţiilor cu topologia Mackey.*

3. Şirul (3) este exact la dreapta:

$$d_\tau(k) = cokd_\tau(q)$$

în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$*.*

4. Avem următoarea diagramă comutativă,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & d_\tau(F/M) \arrow[r, "d_\tau(q)"] \arrow[d] & d_\tau(F) \arrow[r, "d_\tau(k)"] \arrow[d] & d_\tau(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & d_\sigma(F/M) \arrow[r, "d_\sigma(q)"] & d_\sigma(F) \arrow[r, "d_\sigma(k)"] & d_\sigma(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figura 15.1.2

unde morfismele verticale sunt $\mathcal{S}$*-replicile obiectelor din şirul de sus şi* $\tilde{\mathcal{M}}$*-coreplicile obiectelor din şirul de jos.*

5. Fie F *un factorspaţiu al spaţiului* $E \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$*. Atunci topologia Mackey* $\tau(F, F')$ *este factortopologia topologiei* $\tau(E, F')$ *(vezi* [Sh, 1966], cap. IV, Corolar 4).

Functorii d_σ *şi* d_τ *posedă următoarele proprietăţi:*

6. $(d_\sigma(\mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), d_\sigma(\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V})) = (\mathcal{E}pi(\mathcal{S}), \mathcal{M}_f(\mathcal{S}))$.

7. $(d_\tau(\mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), d_\tau(\mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V})) = (\mathcal{E}pi(\tilde{\mathcal{M}}), \mathcal{M}_f(\tilde{\mathcal{M}})) = (\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{E}pi(\mathcal{C}_2\mathcal{V}), \mathcal{M}_f(\tilde{\mathcal{M}}))$.

15.1.13. Remarcă. *Deoarece subcategoria* $\tilde{\mathcal{M}}$ *nu este închisă în raport cu subspaţii închise (*$\mathcal{M}_f$*-subobiecte), avem*

$$\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{M}_f(\mathcal{C}_2\mathcal{V}) \subset \mathcal{M}_f(\tilde{\mathcal{M}}),$$

dar aceste clase nu sunt egale (vezi [R,R, 1964], cap.IV, Completări).

15.1.14. Exerciţii. *Fie $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ un functor coreflector. Notăm $d_k = k \cdot d_\sigma$. Cu astfel de notaţii putem scrie $d_\tau = m \cdot d_\sigma$ şi $d_\sigma = s \cdot d_\tau$.*

1. Fie $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ exact la stânga (respectiv: exact la dreapta). Atunci şi functorul $d_k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ este la exact stânga (respectiv: la dreapta).

2. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$. Atunci functorul $d_k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ este exact la stânga: $d_k(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{E}_f$.

3. $d_\tau(\mathcal{E}pi) \subset \mathcal{M}ono$.

4. $d_\tau(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u) \subset \mathcal{I}so$.

5. $d_\tau(\mathcal{M}_u) \subset \mathcal{E}_u$.

6. Fie $f \in \mathcal{M}ono$. Atunci $d_\tau(f) \in \mathcal{E}_u \Leftrightarrow f \in \mathcal{M}_u$.

15.1.15. Propoziţie. *Fie $b : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $b \in \mathcal{E}pi$.

2. $d_\sigma(b) \in \mathcal{M}ono$.

3. $d_\tau(b) \in \mathcal{M}ono$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Avem

$$X \xrightarrow{\quad b \quad} Y, \qquad\qquad d_\sigma Y \xrightarrow{d_\sigma(b)} d_\sigma X.$$

Fie $u \in Y'$ şi $d_\sigma(b)(u) = 0$, adică $u \cdot b = 0$, sau $u = 0$.

2 $\Rightarrow$ 1. Dacă b nu este un epi, atunci $\overline{b(X)} \neq Y$. Deci există un $u \in Y', u \neq 0$, astfel încât

$$u \cdot b = 0 \tag{1}$$

sau

$$d_\sigma(b)(u) = 0 \tag{2}$$

2 $\Leftrightarrow$ 3. Examinăm următoarea diagramă comutativă,

$$\begin{tikzcd}
d_\tau Y \arrow[r, "d_\tau(b)"] \arrow[d, "m^{d_\sigma Y} = s^{d_\tau Y}"'] & d_\tau X \arrow[d, "m^{d_\tau Y} = s^{d_\sigma Y}"] \\
d_\sigma Y \arrow[r, "d_\sigma(b)"] & d_\sigma X
\end{tikzcd}$$

Figura 15.1.3

ţinând cont că $s^{d_\sigma X}$ şi $s^{d_\tau Y}$ sunt aplicaţii bijective. $\uparrow$

15.1.16. Propoziţie. *Fie $b : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $b \in \mathcal{M}_u$.

2. $d_\sigma(b) \in \mathcal{E}_u$.

3. $d_\tau(b) \in \mathcal{E}_u$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Fie $u \in d_\sigma X$, sau $u \in X'$. Deoarece $b \in \mathcal{M}_u$,

$$u = v \cdot b \tag{1}$$

pentru un $v \in Y'$ (vezi 5.8). Deci

$$d_\sigma(b)(v) = v \cdot b = u. \tag{2}$$

2 $\Rightarrow$ 1. Trebuie de verificat că $b \in \mathcal{M}_u$, sau că orice $u \in X'$ se extinde prin b. Deoarece $d_\sigma(b) \in \mathcal{E}_u$, deci $d_\sigma(b)$ este o aplicaţie surjectivă. Există un $v \in Y'$ astfel încât

$$d_\sigma(b)(v) = u \tag{3}$$

sau

$$v \cdot b = u. \tag{4}$$

2 $\Leftrightarrow$ 3. A se vedea Figura 15.1.3. $\uparrow$

15.1.17. Corolar. *Fie $b : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $b \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

2. $d_\sigma(b) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$.

3. $d_\tau(b) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. $\uparrow$

15.1.18. Corolar. *Fie $b : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $b \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.

2. $d_\sigma(b) \in \mathcal{I}so$.

3. $d_\tau(b) \in \mathcal{I}so$. $\uparrow$

15.2. Perechi de subcategorii (τ, σ)-conjugate

15.2.1. Faptul că pentru o pereche de subcategorii conjugate $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ functorii $l : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ şi $k : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ stabilesc un izomorfism al acestor categorii a permis construirea aplicaţiilor reciproc inverse $\bar{\psi} \cdot \bar{\varphi}_1, \bar{\psi}_1 \cdot \varphi_1$ şi $\psi \cdot \varphi_1, \psi_1 \cdot \varphi$. În cazul perechii $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ aceste categorii sunt şi dual izomorfe, proprietate care permite de-a costrui încă câteva aplicaţii reciproc inverse.

15.2.2. Notaţii. *Pentru* $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ *fie* $\delta_\tau(\mathcal{A})$ *subcategoria plină a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *definită de clasa de obiecte*

$$\{d_\tau X | X \in |\mathcal{A}|\}.$$

Pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$, *notăm cu* $\gamma(\mathcal{A})$ *subcategoria plină a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *generată de clasa de obiecte*

$$\{X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}| | d_\tau X \in |\mathcal{A}|\}.$$

Pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ *fie* $\delta_\sigma(\mathcal{A})$ *subcategoria plină a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *definită de clasa de obiecte*

$$\{d_\sigma X | X \in |\mathcal{A}|\}.$$

Pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$, *notăm cu* $\bar{\gamma}(\mathcal{A})$ *subcategoria plină a categoriei* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ *generată de clasa de obiecte*

$$\{X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|\ |d_\sigma X \in |\mathcal{A}|\}.$$

Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *fie* $\varphi_2(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{R})$.

Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$ *fie* $\bar{\varphi}_2(\mathcal{T}) = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{T})$.

Restricţia aplicaţiei $\delta_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$ *pe subclasa* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ *o notăm* $\delta : \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$.

Restricţia aplicaţiei $\delta_\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{R}(\mathcal{S})$ *pe subclasa* $\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$ *o notăm* $\bar{\delta} : \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbb{R}(\mathcal{S})$.

15.2.3. Propoziţie. 1. Aplicaţia δ_τ ia valori în clasa $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$, şi aplicaţia γ ia valori în clasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. Aplicaţia δ_σ ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{S})$, şi aplicaţia $\bar{\gamma}$ ia valori în clasa $\mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$.

$\downarrow$ În virtutea Propoziţiilor 15.1.10 şi 15.1.11. Astfel $\delta_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}), \gamma : \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\delta_\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{R}(\mathcal{S})$. $\uparrow$

15.2.4 Mai introducem următoarele notaţii:

$\delta_1 = \delta \cdot \varphi_1, \quad \gamma_1 = \psi_1 \cdot \gamma, \quad \delta_c = \bar{\varphi}_1 \cdot \delta, \quad \gamma_c = \varphi \cdot \bar{\delta},$

$\bar{\delta_1} = \bar{\delta} \cdot \bar{\varphi}, \quad \bar{\gamma_1} = \bar{\psi} \cdot \bar{\gamma},$

$\bar{\alpha} = \bar{\psi} \cdot \bar{\varphi}_1, \quad \bar{\beta} = \bar{\psi}_1 \cdot \bar{\varphi}, \quad \alpha = \psi \cdot \varphi_1, \quad \beta = \psi_1 \cdot \varphi.$

15.2.5. Teoremă. *Sunt adevărate următoarele egalităţi:*

1. $\bar{\varphi}_1 \cdot \delta = \bar{\delta} \cdot \psi$.

2. $\gamma \cdot \bar{\psi}_1 = \varphi \cdot \bar{\delta}$.

$\downarrow$ 1. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. Atunci $\bar{\varphi}_1\delta(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\delta\mathcal{R})$, şi $\bar{\gamma}\psi(\mathcal{R}) = \bar{\gamma}(\mathcal{S} \cap \mathcal{R})$. Avem $A \in |\mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\delta\mathcal{R})| \Leftrightarrow mA \in |\delta\mathcal{R}| \Leftrightarrow d_\tau A \in |\mathcal{R}| \Leftrightarrow d_\sigma A \in |\mathcal{S} \cap \mathcal{R}| \Leftrightarrow A \in |\bar{\gamma}(\mathcal{S} \cap \mathcal{R})|$.

2. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$. Atunci $\gamma\bar{\psi}_1(\mathcal{T}) = \gamma(\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{T})$, şi $\varphi\bar{\delta}(\mathcal{T} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\bar{\delta}(\mathcal{T}))$. Avem $A \in |\gamma(\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{T})| \Leftrightarrow d_\tau A \in |\mathcal{T}| \Leftrightarrow d_\sigma A \in \mathcal{T}| \Leftrightarrow A \in \bar{\delta}(\mathcal{T})| \Leftrightarrow A \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\bar{\delta}(\mathcal{T}))|$. $\uparrow$

15.2.6. Lemă. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}), A \in |\tilde{\mathcal{M}}|$ *şi* $t^A : tA \to A$ $\mathcal{T}$*-coreplica lui* A*. Atunci* $d_\tau(t^A) \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$.

$\downarrow d_\tau(t^A) \in \mathcal{E}pi$. Fie

$$u \cdot d_\tau(t^A) = v \cdot d_\tau(t^A). \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} d_\tau A \arrow[r, "d_\tau(t^A)"] & d_\tau tA \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & X \end{tikzcd}$$

Aplicăm functorul d_τ pentru egalitatea (1).

$$\begin{tikzcd} d_\tau X \arrow[r, shift left, "d_\tau(u)"] \arrow[r, shift right, "d_\tau(v)"'] & d_\tau d_\tau tA \arrow[r, "d_\tau d_\tau(t^A)"] & d_\tau d_\tau A \end{tikzcd}$$

Ţinem cont că $d_\tau d_\tau tA = mtA = tA$, deoarece $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, $d_\tau d_\tau(t^A) = t^A$, deoarece $t^A \in \tilde{\mathcal{M}}$ şi $d_\tau d_\tau = mA = A$ odată ce $A \in |\tilde{\mathcal{M}}|$.

$$\begin{tikzcd} d_\tau X \arrow[r, shift left, "d_\tau(u)"] \arrow[r, shift right, "d_\tau(v)"'] & tA \arrow[r, "t^A"] & A \end{tikzcd}$$

Din egalitatea (1) deducem că

$$t^A \cdot d_\tau(u) = t^A \cdot d_\tau(v) \tag{2}$$

sau

$$d_\tau(u) = d_\tau(v) \tag{3}$$

deoarece $t^A \in \mathcal{M}ono$. Din egalitatea (3) rezultă că $u = v$. Astfel am demonstrat că $d_\tau(t^A) \in \mathcal{E}pi$.

$d_\tau(t^A) \in \mathcal{M}ono$. Deoarece $t^A \in \mathcal{E}pi$.

$d_\tau(t^A) \in \mathcal{M}_u$. Fie $f : d_\tau A \to K$ şi o să demonstrăm că f se extinde prin $d_\tau(t^A)$, unde K este corpul numerelor reale sau complexe (vezi 2.4.8).

$$\begin{tikzcd} d_\tau A \arrow[r, "d_\tau(t^A)"] \arrow[dr, "f"'] & d_\tau tA \\ & K \end{tikzcd}$$

Aplicăm la diagrama dată functorul d_τ, ţinând cont că $d_\tau d_\tau tA = mtA = tA$ $(A \in |\tilde{\mathcal{M}}|)$, $d_\tau K = K$ şi $d_\tau K \in |\mathcal{T}|$.

$$\begin{tikzcd}
tA \arrow[rr, "t^A"] & & A \\
& K = d_\tau K \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[ur, "d_\tau(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 15.2.1

Deoarece t^A este $\mathcal{T}$-coreplica lui A avem

$$d_\tau(f) = t^A \cdot g \tag{4}$$

pentru un g. Aplicăm functorul d_τ pentru diagrama obţinută, ţinând cont că $d_\tau d_\tau(f) = m(f) = f$ $(f \in \tilde{\mathcal{M}})$.

$$\begin{tikzcd}
d_\tau A \arrow[rr, "d_\tau(t^A)"] \arrow[dr, "f"] & & d_\tau tA \arrow[dl, dashed, "d_\tau(g)"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Figura 15.2.2

Astfel

$$f = d_\tau(g) \cdot d_\tau(t^A). \uparrow \tag{5}$$

15.2.7. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi examinăm subcategoria $\delta_\tau(\mathcal{R})$. Obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ îi punem în corespondenţă obiectul $d_\tau X$. Fie $r^{d_\tau X} : d_\tau X \to r d_\tau X$ $\mathcal{R}$-replica lui $d_\tau X$, iar $d_\tau(r^{d_\tau X}) : d_\tau r d_\tau X \to d_\tau d_\tau X$ imaginea lui r^X. Deoarece $d_\tau d_\tau X = mX$, unde $m^X : mX \to X$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectuui X, putem scrie $d_\tau(r^{d_\tau X}) : d_\tau r d_\tau X \to mX$. Am efectuat următoarele operaţii

$$X \mapsto d_\tau X,\ r^{d_\tau X} : d_\tau X \to r d_\tau X,\ d_\tau(r^{d_\tau X}) : d_\tau r d_\tau X \to mX.$$

Spaţiile $d_\tau X$ şi $r d_\tau X$ au acelaşi dual. Unica deosebire este că topologia pe spaţiul $d_\tau r d_\tau X$ poate fi mai puternică ca cea pe spaţiul mX, deoarece spaţiul $d_\tau X$ este, în genere, un subspaţiu al spaţiului $r d_\tau X$. Astfel morfismele $d_\tau(r^{d_\tau X})$ şi m^X le vom considera ca aplicaţii identice pe spaţiile vectoriale.

$$d_\tau r d_\tau X \xrightarrow{d_\tau(r^{d_\tau X})} mX \xrightarrow{mX} X$$

Teoremă. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci:*

1. δ_τ examinată ca o aplicaţie definită pe clasa $\mathbb{R}$ este monotonă şi ia valori în clasa $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$:

$$\delta_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}).$$

2. $\delta_\tau(\mathcal{R})$-coreplica, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. $d_\tau \cdot r \cdot d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \delta_\tau(\mathcal{R})$ este functorul coreflector, iar

$$m^X \cdot d_\tau(r^{d_\tau X}) : d_\tau r d_\tau X \to X$$

este $\delta_\tau(\mathcal{R})$-coreplica obiectului $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$.

3. Restricţia δ a aplicaţiei δ_τ pe subclasa $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ stabileşte un izomorfism al laticelor $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$ cu inversa

$$\gamma : \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}).$$

$$\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$$

4. Pentru orice element $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ $\gamma\delta_\sigma(\mathcal{R})$ este cel mai mic element al laticei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ care îl conţine pe $\mathcal{R}$.

$\downarrow$ 1. În virtutea construcţiei pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ avem $\delta_\tau(\mathcal{R}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Restul afirmaţiei rezultă din Propoziţia 15.1.10.

2. Fie $f : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}, m^X : mX \to X$ şi $m^Y : mY \to Y\tilde{\mathcal{M}}$-coreplicile obiecteor respective. Atunci

$$f \cdot m^X = m^Y \cdot m(f). \tag{1}$$

Mai departe, fie $r^{d_\tau X} : d_\tau X \to r d_\tau X$ şi $r^{d_\tau Y} : d_\tau Y \to r d_\tau Y$ $\mathcal{R}$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$r d_\tau(f) \cdot r^{d_\tau Y} = r^{d_\tau X} \cdot d_\tau(f). \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
mX \arrow[r, "m(f)"] \arrow[d, "m^X"'] & mY \arrow[d, "m^Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d_\tau Y \arrow[r, "d_\tau(f)"] \arrow[d, "r^{d_\tau Y}"'] & d_\tau X \arrow[d, "r^{d_\tau X}"] \\
r d_\tau Y \arrow[r, "r d_\tau(f)"] & r d_\tau X
\end{tikzcd}$$

a) b)

Figura 15.2.3

La diagrama scrisă cu egalitatea (2) aplicăm functorul d_τ ţinând cont că

$$d_\tau d_\tau X = mX, d_\tau d_\tau Y = mY, d_\tau d_\tau(f) = m(f).$$

Avem

$$m(f) \cdot d_\tau(r^{d_\tau X}) = d_\tau(r^{d_\tau Y}) \cdot d_\tau r d_\tau(f). \tag{3}$$

Atunci

$$f \cdot m^X \cdot d_\tau(r^{d_\tau X}) = (\text{din}(1)) = m^Y \cdot m(f) \cdot d_\tau(r^{d_\tau X}) = (\text{din}(3)) = m^Y \cdot d_\tau(r^{d_\tau Y}) \cdot d_\tau r d_\tau(f)$$

$$\begin{tikzcd}
d_\tau d_\tau X = mX \arrow[rrr, "d_\tau d_\tau(f) = m(f)"] \arrow[dr, "m^X"] & & & mY = d_\tau d_\tau Y \arrow[dl, "m^Y"'] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & \\
d_\tau r d_\tau X \arrow[uu, "d_\tau(r^{d_\tau X})"] \arrow[rrr, "d_\tau r d_\tau(f)"] & & & d_\tau r d_\tau Y \arrow[uu, "d_\tau(r^{d_\tau Y})"']
\end{tikzcd}$$

Figura 15.2.4

i.e.

$$f \cdot (m^X \cdot d_\tau(r^{d_\tau X})) = (m^Y \cdot d_\tau(r^{d_\tau Y})) \cdot d_\tau r d_\tau(f). \tag{4}$$

Pentru functorul construit $t = d_\tau \cdot r \cdot d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}_2\mathcal{V}$ să arătăm că verifică relaţia $t \cdot t = t$. Avem

$$ttX = d_\tau r d_\tau d_\tau r d_\tau X = d_\tau r m r d_\tau X = (\text{obiectul } r d_\tau X \in |\mathcal{R}| \text{ şi } \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S}),$$

deci $mrd_\tau X \in |\mathcal{R}|) = d_\tau m r d_\tau X = d_\tau r d_\tau X = tX$.

Menţionăm, deoarece $r^{d_\tau X} \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că $d_\tau(r^{d_\tau X}) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$.

3. $\delta \cdot \gamma = 1$. Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Atunci $\delta\gamma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Fie $X \in |\mathcal{T}|$. Atunci $d_\tau d_\tau X = mX = X$. Deci $\delta \cdot \gamma = 1$.

$\gamma \cdot \delta = 1$. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$. Atunci $\mathcal{R} \subset \gamma\delta(\mathcal{R})$. Dacă $X \in |\gamma\delta(\mathcal{R})|$, apoi $d_\tau X \in |\delta(\mathcal{R})|$, sau $X \in |\mathcal{R}|$. Deci $\gamma \cdot \delta = 1$

4. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{R} \subset \gamma\delta_\tau(\mathcal{R})$. Dacă $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, atunci $\delta_\tau(\mathcal{R}) \subset d_\tau(\mathcal{L})$, iar $\gamma d_\tau(\mathcal{R}) \subset \gamma\delta_\tau(\mathcal{L}) = \gamma\delta(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. $\uparrow$

15.2.7*. Teoremă. *Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$. Atunci:*

1. δ_σ examinată ca o aplicaţie definită pe clasa $\mathbb{K}$ este monotonă şi ia valori în clasa $\mathbb{R}(\mathcal{S})$:

$$\delta_\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{R}(\mathcal{S}).$$

2. $\delta_\sigma \cdot t \cdot d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \delta_\sigma(\mathcal{T})$ este functorul reflector, iar

$$d_\sigma(t^{d_\sigma X}) \cdot s^X : X \to d_\sigma t d_\sigma X$$

este $\delta_\sigma(\mathcal{T})$-replica obiectului X.

3. Restricţia $\bar{\delta}$ a aplicaţiei δ_σ pe subclasa $\mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})$ stabileşte un izomorfism al claselor $\mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{S})$ cu inversa

$$\bar{\gamma} : \mathbb{R}(\mathcal{S}) \to \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}).$$

$$\mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathbb{R}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}}).$$

4. Pentru orice element $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$ $\bar{\gamma}\bar{\delta}(\mathcal{T})$ este cel mai mic element al laticei $\mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})$ care îl conţine pe $\mathcal{T}$. $\uparrow$

Remarcă. *Aplicaţiile δ şi γ au fost construite de M.M.Buneacov* [Bn, 1984].

15.2.8. *$\gamma(\mathcal{T})$-replica, $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$.*

$\downarrow$ Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}), \mathcal{R} = \gamma(\mathcal{T})$ şi o să construim $\mathcal{R}$-replica unui obiect arbitrar $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Dacă $t^{d_\tau X} : td_\tau X \to d_\tau X$ $\mathcal{T}$-coreplica lui $d_\tau X$, atunci $d_\tau(t^{d_\tau X}) : d_\tau d_\tau X \to d_\tau t d_\tau X$ sau $d_\tau(t^{d_\tau X}) : mX \to d_\tau t d_\tau X$. Pe morfismele m^X şi $d_\tau(t^{d_\tau X})$ construim pătratul cocartezian

$$\begin{tikzcd}
mX \arrow[r, "d_\tau(t^{d_\tau X})"] \arrow[d, "m^X"'] & d_\tau t d_\tau X \arrow[d, "u^X"] \\
X \arrow[r, dashed, "r_t^X"] & r_t X
\end{tikzcd}$$

Figura 15.2.5

$$r_t^X \cdot m^X = u^X \cdot d_\tau(t^{d_\tau X}). \tag{1}$$

Deoarece $mX \in |\tilde{\mathcal{M}}|$ în virtutea Lemei 15.2.6, deducem că $d_\tau(t^{d_\tau X})$, şi cu el şi r_t^X, este un epi. Mai departe,

$$d_\tau r_t^X = d_\tau d_\tau t X = mtX = tX.$$

Astfel $r_t X \in |\gamma(\mathcal{T})|$.

Fie acum $Y \in |\gamma(\mathcal{T})|, f : X \to Y$ şi o să demonstrăm că f se extinde prin r_t^X. Avem $d_\tau(f) : d_\tau Y \to d_\tau X$ şi, deoarece $d_\tau Y \in |\mathcal{T}|$, rezultă că

$$d_\tau(f) = t^{d_\tau X} \cdot g \tag{2}$$

pentru un g. Pentru egalitatea (2) aplicăm functorul d_τ

$$d_\tau d_\tau(f) = d_\tau(g) \cdot d_\tau(t^{d_\tau X}), \tag{3}$$

sau

$$m(f) = d_\tau(g) \cdot d_\tau(t^{d_\tau X}). \tag{4}$$

Astfel

$$f \cdot m^X = m^Y \cdot m(f) = (\text{din}(4)) = m^Y \cdot d_\tau(g) \cdot d_\tau(t^{d_\tau X}),$$

i.e.

$$f \cdot m^X = (m^Y \cdot d_\tau(g)) \cdot d_\tau(t^{d_\tau X}) \tag{5}$$

şi, deoarece (1) este un pătrat cocartezian, rezultă că

$$f = h \cdot r_t^X, \tag{6}$$

$$m^Y \cdot d_\tau(g) = h \cdot u^X \tag{7}$$

pentru un h.

Unicitatea morfismului h ce verifică egalitatea (6) rezultă din faptul că r_t^X este un epi. $\uparrow$

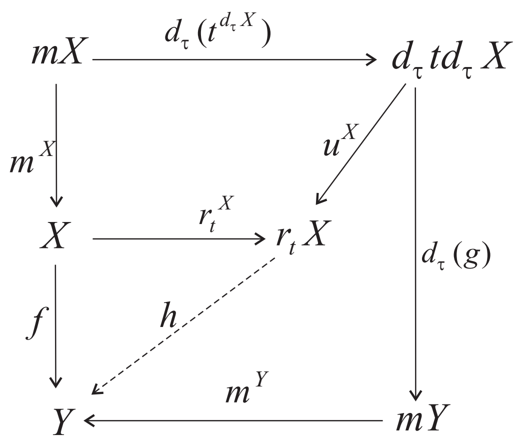


Figura 15.2.6

15.2.9. $\bar{\gamma}(\mathcal{R})$*-coreplica.* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$.

$\downarrow$ Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{S}), \mathcal{T} = \bar{\gamma}(\mathcal{R})$ şi o să construim $\mathcal{T}$-coreplica unui obiect arbitrar $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Dacă $r^{d_\sigma X} : d_\sigma X \to r d_\sigma X$ este $\mathcal{R}$-replica lui $d_\sigma X$, atunci avem morfismul $d_\sigma(r^{d_\sigma X}) : d_\sigma r d_\sigma X \to d_\sigma d_\sigma X$.

Deoarece $d_\sigma d_\sigma X = sX$, scriem

$$d_\sigma(r^{d_\sigma X}) : d_\sigma r d_\sigma X \to sX.$$

Pe morfismele s^X şi $d_\sigma(r^{d_\sigma X})$ construim pătratul cartezian

$$s^X \cdot \bar{v_r}^X = d_\sigma(r^{d_\sigma X}) \cdot b^X, \tag{1}$$

unde $\bar{v}_r^X : \bar{v}_r X \to X$.

Morfismul $\bar{v}_r^X : \bar{v}_r X \to X$ este $\bar{\gamma}(\mathcal{R})$-coreplica obiectului X.

$$\begin{tikzcd}
\bar{v}_r X \arrow[r, dashed, "b^X"] \arrow[d, dashed, "\bar{v}_r^X"'] & d_\sigma r d_\sigma X \arrow[d, "d_\sigma(r^{d_\sigma X})"] \\
X \arrow[r, "s^X"] & sX
\end{tikzcd}$$

Figura 15.2.7

Deoarece $r^{d_\sigma X} \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că $d_\sigma(r^{d_\sigma X}) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. Deci şi $\bar{v}_t^X \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono$. $\uparrow$

15.2.10. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$, *şi* $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $X \in |\mathcal{R}|$.

2. $\tilde{\mathcal{M}}$*-coreplica şi* $\delta(\mathcal{R})$*-coreplica obiectului* X_σ' *coincid.*

3. $X_\tau' \in |\delta(\mathcal{R})|$.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Fie $A \in |\mathcal{R}|$. Notăm $d_\tau A = B$. Deoarece $mA_\sigma' = B$, trebuie de demonstrat că $B \in |\delta(\mathcal{R})|$. Aşadar $B \mapsto d_\tau B \mapsto r d_\tau d_\tau A = rmA = mA$, deoarece $mA \in |\mathcal{R}|$. Deci $d_\tau r d_\tau B = d_\tau mA = d_\tau A = B$.

2 $\Rightarrow$ 1. Fie $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Notăm $A_\sigma' = d_\sigma A = B$.

Avem
$$d_\tau r d_\tau B \xrightarrow{d_\tau(r^{d_\tau B})} mB \xrightarrow{m^B} B.$$

Dacă $d_\tau(r^{d_\tau B}) \in \mathcal{I}so$, atunci $r^{d_\tau B} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. Ţinând cont că $mB \in |\tilde{\mathcal{M}}|$, deducem că $r^{d_\tau B} \in \mathcal{I}so$. Astfel $d_\tau B \in |\mathcal{R}|$. Deoarece $d_\tau B = d_\tau d_\sigma A = mA$, rezultă că $mA \in |\mathcal{R}|$, şi cu el şi $A \in |\mathcal{R}|$, deoarce $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

2 $\Leftrightarrow$ 3. Evident. $\uparrow$

15.2.10*. Teoremă. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\tilde{\mathcal{M}})$, *şi* $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $X \in |\mathcal{T}|$.

2. $\mathcal{S}$*-replica şi* $\bar{\delta}(\mathcal{T})$*-replica obiectului* X_τ' *coincid.*

3. $X_\sigma' \in |\bar{\delta}(\mathcal{T})|$. $\uparrow$

15.2.11. Exemple. *Vom fixa un element* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ *şi vom urmări ce-i corespunde lui în restul claselor - vârfuri ale exagonului* $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{S}), \mathbb{R}(\mathcal{S}), \mathbb{K}(\mathcal{S}), \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}), \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}), \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$ *(vezi diagrama 15.3.4).*

Există un $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ *astfel încât* $\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} \Gamma$, *de exemplu,* $\Gamma = \mathcal{R} \vee \Gamma_0$ *(Teorema 13.3.8).*

1. $\psi(\mathcal{R}) = \mathcal{S} \cap \mathcal{R}$, *sau* $\psi(\mathcal{R})$ *este subcategoria plină a tuturor spaţiilor* Γ*-complete şi cu topologia slabă. La rândul său* $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{S} \cap \mathcal{R})$.

2. $\psi_1(\mathcal{R}) = \tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R}$, *sau* $|\psi_1(\mathcal{R})| = \{mX | X \in |\mathcal{R}|\})$.

O altă descriere a subcategoriei $\varphi_1(\mathcal{R})$ *poate servi:*

$\psi_1(\mathcal{R})$ *este subcategoria plină a tuturor obiectelor cu topologia Mackey, care în toplogia slabă sunt* Γ_1*-complete, şi* $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R})$.

3. $\delta(\mathcal{R})$ *(vezi Teorema 15.2.7).* $\mathcal{R} = \gamma\delta(\mathcal{R})$.

4. $\delta_c(\mathcal{R}) = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}\delta(\mathcal{R})$, *sau* $\delta_c(\mathcal{R})$ *este subcategoria plină a tuturor obiectelor care în topologia Mackey aparţin subcategoriei* $\delta(\mathcal{R})$, *şi* $\mathcal{R} = \gamma_c\delta_c(\mathcal{R})$.

5. $\bar{\psi}\delta_c(\mathcal{R}) = \mathcal{S} \cap \delta_c(\mathcal{R})$ *subcategoria plină a tuturor obiectelor* X *pentru care* $d_\sigma X$ *este un spaţiu* Γ_1*-complet, şi* $\mathcal{R} = \gamma_c\bar{\phi}\bar{\psi}\delta_c(\mathcal{R})$.

15.2.12. Teoremă. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$. *Atunci:*

1. Subcategoriile $\delta(\mathcal{R})$ *şi* $\psi_1(\mathcal{R})$ *sunt dual izomorfe.*

2. Subcategoriile $\bar{\psi}\delta_c(\mathcal{R})$ *şi* $\psi_1(\mathcal{R})$ *sunt dual izomorfe.*

3. Subcategoriile $\delta(\mathcal{R})$ *şi* $\psi(\mathcal{R})$ *sunt dual izomorfe.*

4. Subcategoriile $\bar{\psi}\delta_c(\mathcal{R})$ *şi* $\psi(\mathcal{R})$ *sunt dual izomorfe.*

$\downarrow$ 1. Examinăm restricţia aplicaţiei $\delta : \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$ pe subclasa $\mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$ $\delta_1 : \mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$ şi $A \in |\mathcal{T}|$ avem $d_\tau(A) \in |\tilde{\mathcal{M}}|$ şi $d_\tau d_\tau(A) = mA = A$, deoarece $A \in |\mathcal{T}| \subset |\tilde{\mathcal{M}}|$. De asemenea pentru $f : A \to B \in \mathcal{T}$ $d_\tau d_\tau(f) = m(f) = f$. Astfel restricţia functorului $d_\tau : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ pe subcategoria $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R}$ şi pe subcategoria $\delta(\mathcal{R})$ stabileşte un izomorfism dual al lor.

$$\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} = \psi(\mathcal{R}) \xrightarrow{d_\tau} \delta(\mathcal{R}) \xrightarrow{\quad d_\tau \quad} \tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R}.$$

2. Rezultă din p.1* şi Teorema 14.12.1 p.7.

3. Rezultă din p.1 şi Teorema 14.12.1 p.7.

4. Rezultă din p.1-3. $\uparrow$

15.2.12*. Teoremă. *Fie* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$. *Atunci:*

1. Subcategoriile $\bar{\psi}_1(\mathcal{T})$ *şi* $\psi_1\gamma_c(\mathcal{T})$ *sunt dual izomorfe.*

2. Subcategoriile $\bar{\psi}(\mathcal{T})$ *şi* $\psi\gamma_c(\mathcal{T})$ *sunt dual izomorfe.*

3. Subcategoriile $\bar{\psi}(\mathcal{T})$ *şi* $\psi_1\gamma_c(\mathcal{T})$ *sunt dual izomorfe.*

4. Subcategoriile $\bar{\psi}_1(\mathcal{T})$ şi $\psi\gamma_c(\mathcal{T})$ sunt dual izomorfe. $\uparrow$

15.2.13. Definiţie. *Pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ perechea $(\delta_c(\mathcal{R}), \mathcal{R})$ se numeşte pereche de subcategorii (τ, σ)-conjugate, perechile $(\delta(\mathcal{R}), \psi_1(\mathcal{R}))$, $(\bar{\alpha}\delta(\mathcal{R}), \psi_1(\mathcal{R})), (\delta(\mathcal{R}), \psi(\mathcal{R}))$ şi $(\bar{\alpha}\delta(\mathcal{R}), \psi(\mathcal{R}))$ se numesc (τ, σ)-duale.*

15.2.14. Să indicăm unele rezultate ce ţin de Teorema 15.2.8.

Teoremă. *Fie $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $\gamma(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

2. $d_\tau(t^{d_\tau X}) \in \mathcal{M}_p$ pentru orice $X \in |\mathcal{C}_1\mathcal{V}|$.

3. Pentru orice obiect $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ mulţimile absolut convexe slab compacte ale spaţiilor X şi tX sunt unele şi aceleaşi.

4. Laticele $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p) \cap \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$ şi $\mathbb{K}(\delta(l\Gamma_0), \tilde{\mathcal{M}})$ sunt izomorfe.

$\downarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2. Să demonstrăm că $d_\tau(t^{d_\tau X}) : mX \to d_\tau t d_\tau X$ este $\mathcal{R}$-replica obiectului mX. Fie $Y = mX$. Atunci m^Y, şi cu el şi u^X, este un izomorf şi afirmaţia este demonstrată.

2 $\Rightarrow$ 1. În virtutea faptului că pătratul (1) (vezi 15.2.8) este cocartezian.

3 $\Rightarrow$ 1. Fie A o mulţime absolut convexă şi slab compactă în spaţiul X. Atunci ea este slab compactă şi în spaţiul tX. Astfel polara B_1 a mulţimii A în spaţiul $d_\tau X$ şi polara B_2 a mulţimii A în spaţiul $d_\tau tX$ sunt vecinătăţi ale lui zero în spaţiile respective. Avem $B_1 \subset B_2$ şi $B_1 \subset B_2 \cap d_\tau X$. Să verificăm incluziunea inversă. Fie $f \in B_2 \cap d_\tau X$. Atunci $f : tX \to K, |f(A)| \leq 1$, odată ce $f \in B_2$, deoarece $f \in d_\tau X$ f este continuu pe X. Astfel $B_1 = B_2 \cap d_\tau X$. Aşadar închiderea lui B_1 în spţiul $d_\tau tX$ este B_2.

1 $\Rightarrow$ 3. Fie A o mulţime convexă şi slab compactă a spaţiului Y. Atunci polara ei A^0 este o vecinătate a lui zero în spaţiul $d_\tau Y$. Avem $r_t^{mY} : mY \to d_\tau t d_\tau Y$ şi $d_\tau t d_\tau d_\tau Y = d_\tau t m Y = d_\tau t Y$. $r_t^{d_\tau Y} : d_\tau Y \to d_\tau tY, (r_t^Y)' : tY \to mY$.

Deoarece $r_t^{d_\tau Y} \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$ şi A^0 este o vecinătate a lui zero în $d_\tau Y$, deducem că închiderea $\bar{A}^0$ este o vecinătate a lui zero în $d_\tau tY$. Astfel polara $\bar{A^0}^0$ este o mulţime slab compactă a spaţiului tY şi $A^0 \subset \bar{A}^0$. Atunci $\bar{A^0}^0 = A$. Incluziunea $A^0 \subset \bar{A}^0$, rezultă din faptul că A^0 este o submulţime închisă în $\bar{A}^0$ în spaţiul $d_\tau tY$. Am demonstrat că A este o mulţime slab compactă în spaţiul tY.

Faptul că o mulţime slab compactă a spaţiului tY este şi o mulţime compactă şi a spaţiului Y, este evident.

Un alt rezultat referitor la demonstraţia 1 $\Leftrightarrow$ 3 vezi [Bn, 1984] Teorema 2.12.

4. Deoarece aplicaţiile δ şi γ sunt monotone. $\uparrow$

15.2.15. Să examinăm operaţiile $\delta_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}})$ şi $\gamma : \mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

15.3. Diagramele produsului semireflexiv

15.3.1. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \mathcal{K} \subset \mathcal{T}, \mathcal{U} \in \mathbb{R}_c$ *şi* $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$. *Din Teoremele 14.1.4, 14.6.4, 14.7.4, 14.7.5 şi 14.11.2 rezultă izomorfismul laticei* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi laticele* $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L}), \mathcal{N}_d(\mathcal{L})$, $\mathbb{R}^k(\mathcal{L})$ *şi* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L},\varepsilon\mathcal{T})$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_d(\mathcal{L}) \arrow[dr, shift left, "\varphi_n"] & \mathbb{R}^t_t(\mathcal{T}) \arrow[d, shift right, "\varphi^t_t"'] & \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L},\varepsilon\mathcal{U}) \arrow[dl, shift right, "\varphi_{lu}"'] \\
\mathbb{R}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[ul, shift left, "\psi_n"] \arrow[u, shift right, "\psi^t_t"'] \arrow[ur, shift right, "\psi_{lu}"'] \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{R}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \\
& \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[ul, "\psi_i"] \arrow[ur, "\psi_p"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 15.3.1

15.3.1*. Teoremă. *Fie* $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{U} \in \mathbb{K}_c, \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ *şi* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. *Din Teoremele 14.1.4*, 14.10.4*, 14.11.2* rezultă izomorfismul laticei* $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ *şi laticele* $\mathbb{K}(\mathcal{K}), \mathbb{K}(\mathcal{L}), \mathbb{K}^h_h(\mathcal{K})$ *şi* $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K},\mu\mathcal{T})$. $\uparrow$

Corolar. Fie $(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, iar $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}, \mathcal{U} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$. Atunci obţinem următoarea diagramă.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}^h_h(\mathcal{H}) \arrow[d, shift right, "\varphi^h_h"'] & \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K},\mu\mathcal{U}) \arrow[dl, shift right, "\bar{\varphi}_{ku}"'] \\
\mathbb{K}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\bar{\varphi}_1"] & \mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) \arrow[u, shift right, "\psi^h_h"'] \arrow[ur, shift right, "\bar{\psi}_{ku}"'] \arrow[l, shift left, "\bar{\psi}_1"] \arrow[r, shift right, "\bar{\psi}"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{K}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\bar{\varphi}"'] \\
& \mathbb{K}_f(\mu\mathcal{K}) \arrow[ul, "\bar{\psi}_i"] \arrow[ur, "\bar{\psi}_p"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 15.3.2

15.3.2. În cazul perechii de subcategorii conjugate $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ diagrama 15.3.1 poate fi completă în virtutea Teoremelor 14.2.2, 14.3.2, 14.4.2, 14.5.2 şi 14.6.2.

Teoremă. *Fie $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ şi $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_c$. Laticea $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ este izomorfă cu laticele* $\mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}})$, $\mathbb{R}(\mathcal{S})$, $\mathbb{N}_d(\mathcal{L})$, $\mathbb{K}^t_t(\mathcal{T}), \Gamma_\lambda(\mathcal{S}), \mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}), \mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L})$ *şi* $\Gamma_1(\mathcal{S})$. $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_d(\mathcal{L}) \arrow[dr, shift left, "\varphi_n"] & \mathbb{R}^t_t(\mathcal{T}) \arrow[d, shift right, "\varphi^t_t"'] & \Gamma_\lambda(\mathcal{S}) \arrow[dl, shift right, "\varphi_\lambda"'] \\
\mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[ul, shift left, "\psi_n"] \arrow[u, shift right, "\psi^t_t"'] \arrow[ur, shift right, "\psi_\lambda"'] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[dl, shift left, "\psi_m"] \arrow[d, shift left, "\psi_j"] \arrow[dr, shift right, "\psi_g"'] & \mathbb{R}(\mathcal{S}) \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \\
\mathbb{R}_m(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[ur, shift left, "\varphi_m"] & \mathbb{R}_j(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[u, shift left, "\varphi_j"] & \Gamma_1(\mathcal{S}) \arrow[ul, shift right, "\varphi_g"']
\end{tikzcd}$$

Figura 15.3.3

15.3.3. Teoremă. *Din Teoremele 14.2, 14.3 şi 14.8 rezultă izomorfismul laticei $\mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L})$ cu laticele $\Gamma_1(\mathcal{L})$ şi $\Gamma_\lambda(\mathcal{L})$ pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$ şi cu laticea $\mathbb{R}_g(\mathcal{L})$ pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_{ex}$.* $\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma_\lambda(\mathcal{L}) \arrow[d, shift right, "\varphi_\lambda"'] & \\
\Gamma_1(\mathcal{L}) \arrow[r, shift left, "\varphi_g"] & \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon\mathcal{L}) \arrow[l, shift left, "\psi_g"] \arrow[u, shift right, "\psi_\lambda"'] \arrow[r, shift right, "\psi_{gl}"'] & \mathbb{R}_g(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\varphi_{gl}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 15.3.4

15.3.4. Notaţii. *Explicaţiile la următoarea diagramă: $\varphi_2(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{R})$ pentru $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ (vezi Teorema 10.4.2), $\bar{\varphi}_2(\mathcal{T} = \mathcal{Q}_{\mu\tilde{\mathcal{M}}}(\mathcal{T})$ pentru $\mathcal{T} \in \mathbb{K}$* (vezi Propoziţia 10.4.1).

Aplicaţiile $\varphi, \varphi^\ell_\ell, \bar{\varphi}$ şi φ_2 sunt definite cu ajutorul operaţiei $\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}$.

Aplicaţiile $\bar{\varphi}_1, \varphi^k_k, \varphi_1$ şi $\bar{\varphi}_2$ sunt definite cu ajutorul operaţiei $\mathcal{Q}_{\mu\mathcal{K}}$.

În următoarea diagramă aplicaţiile notate cu săgeţi continui au fost definite, cele notate cu săgeţi întrerupte sunt reprezentate ca compoziţia primelor.

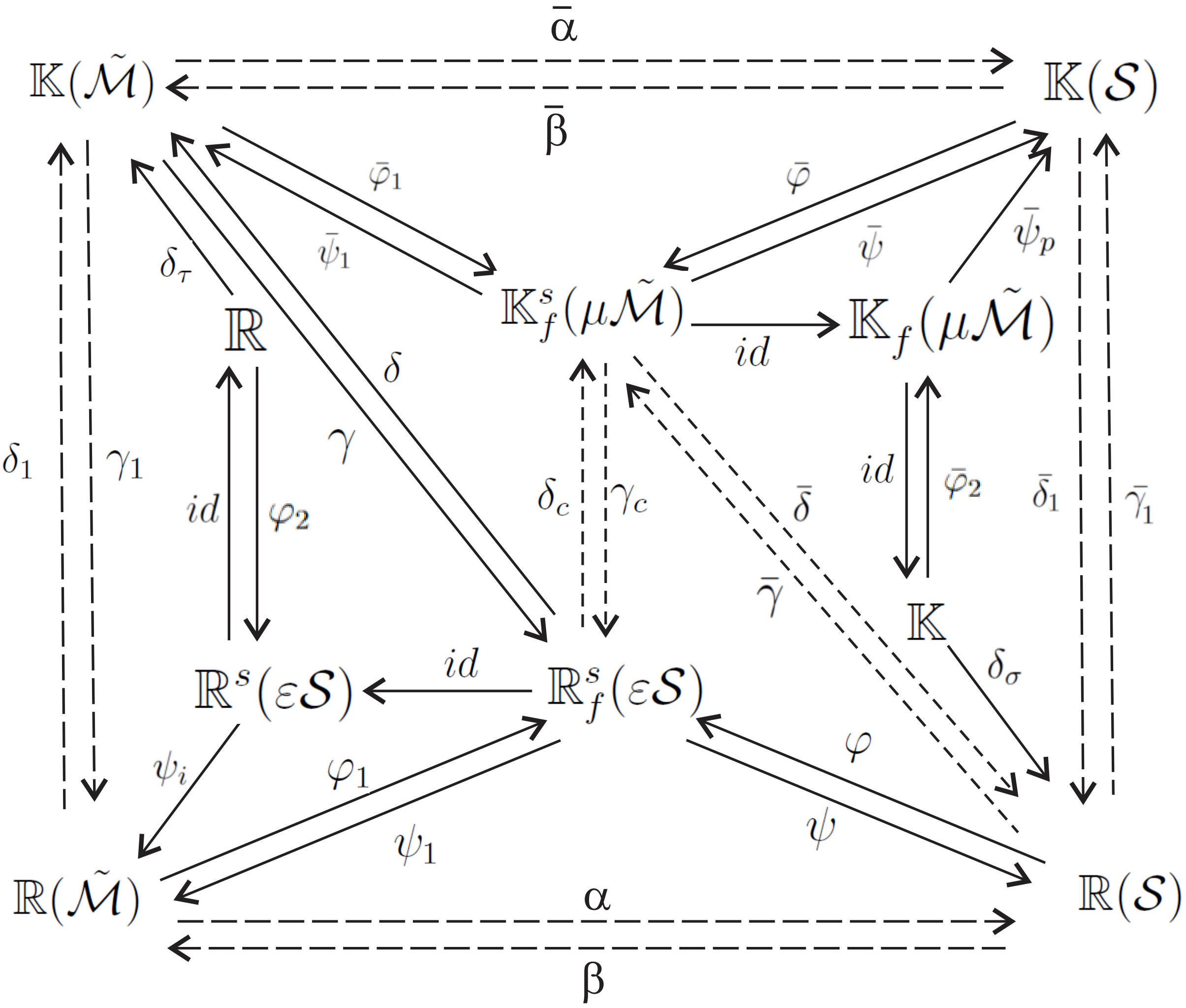


Figura 15.3.5

15.3.5. Teoremă. *Fie* $\mathcal{K}, \mathcal{T} \in \mathbb{K}, \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{T}, \mathcal{L} \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}_u), \mathcal{U} \in \mathbb{K}_c, \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ *şi* $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. *Atunci următoarea diagramă este comutativă.*

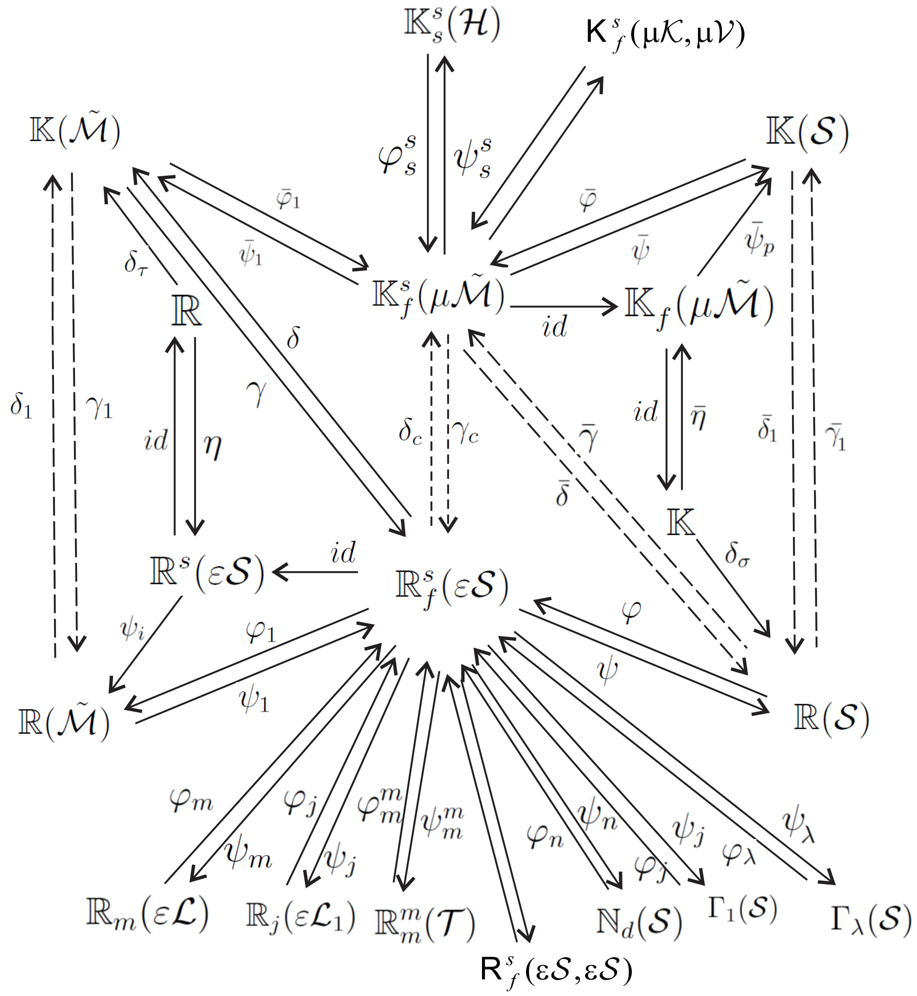


Figura 15.3.6

15.3.6. Teoremă. *Dacă excludem vârfurile* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S}), \mathbb{K}$ *şi* $\mathbb{K}_f(\mu\tilde{\mathcal{M}})$, *atunci în diagrama rămasă, orice două aplicaţii, inclusiv cele identice, cu aceeaşi sursă şi aceeaşi adresă sunt egale.*↑

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{K}(\tilde{\mathcal{M}}) \arrow[r, shift left, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[d, dashed, shift left, "\gamma_1"] \arrow[dr, shift right, "\gamma"'] & \mathbb{K}^s_f(\mu\tilde{\mathcal{M}}) \arrow[l, shift left, "\bar{\psi}_1"] \arrow[r, shift right, "\bar{\psi}"'] \arrow[d, dashed, shift right, "\delta_c"'] \arrow[dr, dashed, shift right, "\bar{\delta}"'] & \mathbb{K}(\mathcal{S}) \arrow[l, shift right, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, dashed, shift right, "\bar{\delta}_1"'] \\
\mathbb{R}(\tilde{\mathcal{M}}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] \arrow[u, dashed, shift left, "\delta_1"] & \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[u, dashed, shift right, "\gamma_c"'] \arrow[ul, shift right, "\delta"'] & \mathbb{R}(\mathcal{S}) \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \arrow[u, dashed, shift right, "\bar{\gamma}_1"'] \arrow[ul, dashed, shift right, "\bar{\gamma}"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 15.3.7

Capitolul 16. Exemple şi probleme ale subcategoriilor semireflexive

16.1. Subcateogria $s\mathcal{R}$ a spaţiilor semireflexive

16.1.1. Fie $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, iar $\mathcal{A}$ familia submulţimilor mărginite ale spaţiului (E, u). Examinăm spaţiul $(E', t(\mathcal{A}))$ (vezi §12.1).

Definiţie. *Spaţiul (E, u) se numeşte semireflexiv, dacă $(E', t(\mathcal{A}))' = E$ ca spaţii vectoriale Vom nota $s\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor semireflexive.*

16.1.2. Teoremă (vezi [Sh, 1966], cap. IV, p. 5.5). *Un spaţiu local convex (E, u) este semireflexiv atunci şi numai atunci, când E este quazicomplet în topologia slabă.* $\uparrow$

16.1.3. Teoremă. *1. $s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0$.*

2. Functorul reflector $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ poate fi obţinut reieşind din realaţia

$$s\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}} *_d (\mathcal{S} \cap q\Gamma_0)$$

(vezi §12.3).

3. Functorii reflectori $r_s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ şi $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ comută: $r_s \cdot s = s \cdot r_s$ (12.3.5).

4. Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$. Atunci functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $r_s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ comută: $k \cdot r_s = r_s \cdot k$. În particular, functorii $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{M}}$ şi r_s comută $m \cdot r_s = r_s \cdot m$. $\uparrow$

5. $(\mathcal{T}on, s\mathcal{R})$ este o pereche de subcategorii (τ, σ)-duale (vezi [Sh, 1966], *cap. IV, Teorema 5.5, p. c).*

16.1.4. Teoremă. *Pentru orice subcategorie reflectivă $\mathcal{B}$ cu proprietatea $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{N}$, avem*

$$\mathcal{B} *_{sr} q\Gamma_0 = s\mathcal{R}.$$

În particular,

$$\mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0 = u\mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0 = \mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0 = s\mathcal{R}.$$

$\downarrow$ Este suficient de demonstrat că

$$\mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0 = s\mathcal{R}.$$

Fie $X \in |\mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0|$. Atunci $\mathcal{N}$-replica nX a obiectului X aparţine subcategoriei $q\Gamma_0$. Astfel nX este un spaţiu nuclear quazicomplet. Deci el este semireflexiv (vezi [Sh, 1996], III 7.2, Corolarul 2, de asemenea IV 5.8 Exemplul 4).

Aşadar, $\mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0 \subset s\mathcal{R}$. Deoarece $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, rezultă că $\mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0 \subset \mathcal{N} *_{sr} q\Gamma_0$. $\uparrow$

16.1.5. Teoremă. *Pentru orice subcategorie reflectivă* Γ *cu proprietatea* $q\Gamma_0 \subset \Gamma \subset p\Gamma_0$, *unde* $p\Gamma_0$ *este subcategoria spaţiilor p-semireflexive, avem*

$$s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} \Gamma.$$

$\downarrow$ Conform Remărcii după Propoziţia 2.2 lucrarea [D,J, 1971], un spaţiu local convex E este semireflectiv, atunci şi numai atunci când E_σ este un spaţiu p-semireflexiv. Cu notaţiile noastre acest moment se scrie

$$s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} p\Gamma_0. \uparrow$$

16.1.7. Problemă. Este adevărat oare că $q\Gamma_0 = s\mathcal{R} \vee \Gamma_0$?

16.1.8. Remarcă. *Komura* [K, 1964], *a stabilit că există spaţii reflexive care nu sunt complete. Astfel*

$$\Gamma_0 \subset s\mathcal{R} \vee \Gamma_0, \quad \Gamma_0 \neq s\mathcal{R} \vee \Gamma_0.$$

16.2. Subcategoria spaţiilor local complete $l\Gamma_0$

16.2.1. Definiţie [Ra, 1965].*Un şir de elemente al spaţiului local convex E se numeşte şir local Cauchy, dacă el se conţine şi converge într-un careva spaţiu* E_A. *Spaţiul E se numeşte local complet dacă orice şir local Cauchy converge în E.*

16.2.2. *Tot în lucrarea menţionată D.Roïcov enumeră următoarele proprietăţi ale spaţiilor local complete:*

1. Un spaţiu local complet rămâne local complet în orice topologie local convexă cu acelaşi sistem de mulţimi mărginite.

2. Un spaţiu este local complet atunci şi numai atunci, când orice mulţime mărginită se conţine într-un disc Banach.

3. Un spaţiu este local complet atunci şi numai atunci, când este un spaţiu b-complet în sensul W.Slowikowski [Sl, 1961].

4. Cu notaţiile din 10.3 un spaţiu b-complet este un obiect al subcategoriei

$$\lambda_{\Gamma_0}(\mathcal{N}orm),$$

unde $\mathcal{N}orm$ *este clasa spaţiilor normate.*

5. Astfel putem scrie

$$l\Gamma_0 = \lambda_{\Gamma_0}(\mathcal{N}orm).$$

6. Există următoarele incluziuni

$$\Gamma_0 \subset q\Gamma_0 \subset p\Gamma_0 \subset s\Gamma_0 \subset l\Gamma_0.$$

Ultimele două subcategorii sunt diferite din următoarele considerente: spaţiul Banach c_0 cu topologia slabă nu este secvenţial complet, dar este local complet.

Remarcă.*Deoarece $\Gamma_0 = \mathcal{C}_2\mathcal{V} *_{sr} \Gamma_0$ putem spune că*

$$l\Gamma_0 = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \Gamma_0).$$

Astfel $l\Gamma_0$ ca şi orice element al clasei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ poate fi privită ca o subcategorie (c,g)-semireflexivă.

16.2.3. Teoremă. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $l\Gamma_0 = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma_0) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap \Gamma_0)$. În particular $l\Gamma_0$ este cel mai mic element al laticei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

3. $X \in |l\Gamma_0| \Leftrightarrow mX \in |\Gamma_0|$, unde mX este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui X.

4. $(\tilde{\mathcal{M}}, l\Gamma_0)$ este TTR.

5. $l\Gamma_0$ este cea mai mică subcategorie Γ a clasei $\mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ pentru care $(\tilde{\mathcal{M}}, \Gamma)$ este TTR.

6. $(\mathcal{K}, l\Gamma_0)$ este TTR pentru orice $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$.

7. Pentru orice $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}$ functorul $g_l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to l\Gamma_0$ şi $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}, l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ comută:

a) $k \cdot g_l = g_l \cdot k$;

b) $l \cdot g_l = g_l \cdot l$.

$\downarrow$ 1. Deoarece mulţimile mărginite sunt unele şi aceleaşi în toate topologiile compatibile cu aceeaşi dualitate (vezi [R,R, 1964], cap. IV, Teorema 10).

2. $l\Gamma_0 \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma_0)$. Fie $A \in |l\Gamma_0|, m^A : mA \to A$ $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui A, iar $g_0^{mA} : mA \to g_0 mA$ Γ_0-replica lui mA. Atunci m^A se prelungeşte prin g^{mA}.

$$m^A = f \cdot g_0^{mA}. \tag{1}$$

Deoarece $m^A \in \mathcal{M}_u$, iar $g_0^{mA} \in \mathcal{E}pi$, rezultă că $f \in \mathcal{M}_u$. Deci $f, g_0^{mA} \in \mu\tilde{\mathcal{M}}$, sau $g_0^{mA} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{I}so$. Astfel $mA \in |\Gamma_0|$.

$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma_0) \subset l\Gamma_0$. Deoarece $\Gamma_0 \subset l\Gamma_0$ şi $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

$\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma_0) = \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap \Gamma_0)$ în virtutea celor expuse mai sus.

3. Rezultă din p.2.

4. În virtutea Teoremei 11.4.8.

5. Deoarece $l\Gamma_0$ este cel mai mic element al clasei $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{S}) \cap \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$.

6.În virtutea Corolarului 13.3.6 p.7.

7. a) Rezultă din p.1.

b) În virtutea Teoremei 13.3.5. $\uparrow$

16.2.4. Corolar.

$$\{(\mathcal{K}, l\Gamma_0) |\ \mathcal{K} \in \mathbb{K}_c\}$$

este clasă proprie de TTR în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

16.2.5. Teoremă. *Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$ şi $\mathcal{B} \in \mathcal{B}ic$. Atunci*

1. $l\Gamma_0 \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$. $\uparrow$

16.2.6. Teoremă. *Fie $\mathcal{V} \in \mathbb{V}(\mathcal{E}pi, \mathcal{E}pi)$. Atunci functorii reflectori $v : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ şi $g_l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to l\Gamma_0$ comută: $v \cdot g_l = g_l \cdot v$.*

$\downarrow$ Vezi Teorema 13.3.4. $\uparrow$

16.2.7. Exemple. *Fie $\mathcal{L}$ o subcategorie c-reflectivă, $\mathcal{L} \neq \mathcal{S}$, iar $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$. Atunci:*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}), l\Gamma_0, \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \cap l\Gamma_0$ aparţin clasei $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$,

2. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} \cap l\Gamma_0 \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$.

16.2.8. Exerciţii. *Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi $\Gamma_0 \subset \mathcal{R} \subset l\Gamma_0$. Atunci*

1. $\mathcal{Q}_{\varepsilon\mathcal{S}}(\mathcal{R}) = l\Gamma_0$.

2. $\tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}} \cap l\Gamma_0$.

16.3. Subcateogria $i\mathcal{R}$ a spaţiilor inductiv semireflexive

16.3.1. Subcategoria $i\mathcal{R}$ se defineşte inductiv semireflxiv (vezi 12.1). Fie $(E, u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, iar $\mathcal{A}$ este o bază a topologiei u. Notăm

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A^0 | A \in \mathcal{A}\}.$$

Definiţie [Ber, 1968]. *Spaţiile $\tilde{\mathcal{A}}$-inductiv semireflexive se numesc inductiv semireflexive.*

16.3.2. Teoremă ([Ber, 1968], Teorema 1.5). *Un spaţiu local convex este inductiv semireflexiv atunci şi numai atunci, când $\mathcal{S}h$-replica lui este un spaţiu complet.*

Cu notaţiile noastre putem scrie

$$i\mathcal{R} = \mathcal{S}h *_{sr} \Gamma_0,$$

unde $\mathcal{S}h$ este subcategoria spaţiilor Schwartz.

16.3.3. Teoremă. *$i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_{fg}(\varepsilon(\mathcal{S}h))$.*

16.3.4. Din Teorema 10.2.2 rezultă

Teoremă. *Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{N}_m(i\mathcal{R}), \mathcal{T} \subset \mathcal{S}h \vee i\mathcal{R}$. Atunci functorii reflectori $t : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{T}$ şi $r_i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to i\mathcal{R}$ comută: $t \cdot r_i = r_i \cdot t$.*

16.3.5. Exemple (vezi 10.2.2). *1. Fie $A \in |i\mathcal{R}|$, iar $b : A \to X \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Atunci $b \in \mathcal{I}so$.*

2. Fie $A \in |i\mathcal{R}|$ şi $b : A \to X \in \mathcal{M}_p$. Atunci $b \in \mathcal{M}_f$.

3. Subcategoria $i\mathcal{R}$ este închisă în raport cu $(\varepsilon(\mathcal{S}h \cap i\mathcal{R}))$-subobiecte.

16.3.5. Să examinăm perechea de subcategorii conjugate $(\mathcal{K}h, \mathcal{S}h)$. În virtutea Teoremei 10.2.2 obţinem

Teoremă. *Fie $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$ şi $\mathcal{K}h \subset \mathcal{K}$. Atunci functorii $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ şi $r_i : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to i\mathcal{R}$ comută: $k \cdot r_i = r_i \cdot k$.* $\uparrow$

16.4. Subcateogria $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$ a spaţiilor $\mathcal{B}$-inductiv semireflexive

16.4.1. Definiţie [Sk, 1980]. *Fie (E, t) un spaţiu local convex, şi $\mathcal{B}$ mulţimea tuturor discurilor Banach în $(E', \beta(E', E))$. Aplicaţiile canonice $i_B : (E'_B, n_B) \to E'$ cu $B \in \mathcal{B}$ definesc topologia inductivă $j_{\mathcal{B}}$. Spaţiul (E, t) se numeşte $\mathcal{B}$-inductiv semireflexiv, dacă $(E', j_{\mathcal{B}}) = E$.*

16.4.2. Subcategoria spaţiilor $\mathcal{B}$-inductiv semireflexive a fost definită de V.Sekevanov (vezi 12.1).

Propoziţie ([Sk, 1980], Propoziţia 1). *Spaţiul local convex (E, u) este $\mathcal{B}$-inductiv semireflexiv atunci şi numai atunci, când spaţiul $(E, m(u))$ este inductiv semireflexiv, unde $(E, m(u))$ este $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica obiectului (E, u).*

Astfel spus, spaţiul local convex (E, u) este $\mathcal{B}$-inductiv semireflexiv atunci şi numai atunci, când $\mathcal{S}h$-replica lui $(E, m(u))$ este complet $(E, s_h m(u)) \in |\Gamma_0|$.

Astfel subcategoria $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R}$ a spaţiilor $\mathcal{B}$-inductiv semireflexive este un exemplu de subcategorie (c, g)-semireflexivă (vezi 12.9).

16.4.3. Teoremă. *$\mathcal{B}$-$i\mathcal{R} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{M}} \cap i\mathcal{R})$, unde $\mathcal{B} = \mu\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$.*

2. $\mathcal{B}$-$i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

3. Orice subcategorie reflectivă Γ cu proprietatea $(\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}) \vee \Gamma_0 \subset \Gamma \subset \lambda_{\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ verifică egalitatea

$$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} \Gamma.$$

4. Fie $\Gamma_1 = (\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}) \vee \Gamma_0$. Atunci

$$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{M}} *_d (\mathcal{S} \cap \Gamma_1),$$

iar functorii reflectori $r_b : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$ şi $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ comută: $r_b \cdot s = s \cdot r_b$ (vezi Teorema 12.3.5). $\uparrow$

16.4.4. Propoziţie. *$i\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset s\mathcal{R}$.*

$\downarrow$ *$i\mathcal{R} \subset \mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$.* Fie $X \in |i\mathcal{R}|, m^X : mX \to X$ $\tilde{\mathcal{M}}$-coreplica lui X şi $s_h^X : X \to s_hX, s_h^{mX} : mX \to s_hmX$ $\mathcal{S}_h$-replicile obiectelor respective. Atunci

$$s_h^X \cdot m^X = s_h(m^X) \cdot s_h^{mX} \tag{1}$$

şi $s_hX \in |\Gamma_0|$. Deoarece $s_h(m^X) \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că şi $s_hmX \in |\Gamma_0|$. Deci $X \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
mX \arrow[r, "s_h^{mX}"] \arrow[d, "m^X"'] & s_hmX \arrow[d, "s_h(m^X)"] \\
X \arrow[r, "s_h^X"] & s_hX
\end{tikzcd}$$

Figura 16.4.1

$\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R} \subset s\mathcal{R}$. Fie $(E,t) \in |\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}|$. Atunci $E'_t = (E', j_{\mathcal{B}})$ este un spaţiu tonelat ca limita inductivă a unei familii de spaţii tonelate. Astfel $E'_t = E'_\beta$ ([R,R, 1964], Cap. IV, Propoziţia 1, Corolar 1). Atunci (E,t) este un spaţiu semireflexiv ([Sh, 1966], cap. IV, Afirmaţia 5.5). $\uparrow$

16.4.5. Probleme. *1. Să se descrie subcategoria $\delta_c(\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R})$ (τ,σ)-conjugată subcategoriei $\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}$.*

2. Să se descrie subcategoria $(\mathcal{B}\text{-}i\mathcal{R}) \vee \Gamma_0$.

16.5. Subcateogria p-$s\mathcal{R}$ a spaţiilor p-semireflexive

16.5.1. Fie $(E,u) \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ şi $\mathcal{A}$ familia submulţimilor precompacte a spaţiului (E,u). Examinăm spaţiul $(E', t(\mathcal{A}))$ (vezi 12.1).

Definiţie [D,J, 1971]. *Spaţiul (E,u) se numeşte p-semireflexiv, dacă $(E', t(\mathcal{A}))' = E$ ca spaţii vectoriale.*

Vom nota p-$s\mathcal{R}$ subcategoria spaţiilor p-semireflexive.

16.5.2. *În lucrarea dată sunt menţionate următoarele proprietăţi ale subcategoriei p-$s\mathcal{R}$.*

1. p-$s\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ ([D,J, 1971] ((2.5) Proposition).

2. $s\mathcal{R} \subset q\Gamma_0 \subset p$-$s\mathcal{R} \subset s\Gamma_0$, unde $s\Gamma_0$ este subcategoria spaţiilor semicomplete ((2.4) Corollaire 2).

3. $\mathcal{S} \cap s\mathcal{R} = \mathcal{S} \cap (p\text{-}s\mathcal{R})$ *((2.2) Remarque).*

4. $p\text{-}s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{S})$ *((2.3) Corollaire 1).*

5. $s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} (p\text{-}s\mathcal{R})$ *((2.2) Remarque).*

16.5.3. Problemă. *Pentru care* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ $p\text{-}s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$?

16.6. Subcateogria Π a spaţiilor complete cu topologie slabă

16.6.1. Propoziţie. *Fie* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$. *Atunci* Π *este cel mai mic element al clasei* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

16.6.2. Teoremă. (Σ, Π) *este o pereche de subcategorii dual izomorfe.*

$\downarrow$ S-a menţionat că $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ (vezi 6.5.8). Mai departe, $\gamma(\Sigma) = \Pi$ (vezi [Gr, 1973], Cap. 4, Partea 1, Propoziţia 9). Dacă $X \in |\Pi|$, atunci $X = K^\alpha$, iar

$$d_\tau(X) = d_\tau(K^\alpha) = d_\tau(K))^\alpha = K^{(\alpha)}.$$

Astfel $\delta(\Pi) \subset \Sigma$. Deoarece Σ este cea mai mică subcategorie coreflectivă nenulă şi $\delta(\Pi)$ este o subcategorie coreflectivă, deducem că $\delta(\Pi) = \Sigma$. $\uparrow$

Problemă. *Este adevărat oare, dacă* $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, *atunci* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$?

16.7. Unele latici de tipul $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$

16.7.1. *Laticea* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Pi)$.

Deoarece $\varepsilon\Pi = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u$, rezultă că pentru orice $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ şi orice $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $r^X \in \varepsilon\Pi$. Deci $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\Pi) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

16.7.2. *Laticea* $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

1. Specific pentru subcategoria $\mathcal{S}$ *este faptul că în Figura 9.5.4. pentru* $\mathcal{B} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$ *avem* $\mathcal{L} = \mathcal{V} = \mathcal{S}$. *Astfel* $\mathcal{S}$ *este o* $\mathcal{E}pi$*-varietate şi o subcategorie c-reflectivă.*

2. $\mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \cap \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}) = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.

Formulăm următoarele proprietăţi, lăsându-le ca exerciţii pentru cititori.

3. $\mathcal{S} = \Gamma_0 *_{sr} \Pi$.

4. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $\Gamma *_{sr} \Pi \subset \mathcal{S}$.

5. Fie $\Gamma \in \mathbb{R}(\mathcal{M}_p)$. *Atunci* $\mathcal{S} = \Gamma *_{sr} (\mathcal{S} \cap \Gamma)$.

6. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{S})$. *Atunci* $\mathcal{S} = \Gamma *_{sr} \mathcal{R}$, *unde* $\Gamma = \mathcal{R} \vee \Gamma_0$.

7. Subcategoria $s\mathcal{R}$ *a spaţiilor semireflexive o putem scrie*

$$s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0 = (\Gamma *_{sr} \Pi) *_{sr} q\Gamma_0.$$

16.7.3. *Laticea* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

Avem $\varepsilon\Gamma_0 = \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Astfel, dacă $\mathcal{R} = \mathbb{R}^s(\varepsilon\Gamma_0)$, atunci $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$.

Pentru laticea $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$ *sunt adevărate următoarele proprietăţi:*

1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$ *atunci şi numai atunci, când* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u)$ *şi* $\mathcal{R}$ *este închisă în raport cu extensii:* $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$*-factorobiecte:* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0) = \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \cap \mathbb{R}_{ex}$.

2. $\mathbb{R}_c \subset \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

3. Subcategoria spaţiilor nucleare $\mathcal{N}$ *aparţine clasei* $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0) : \mathcal{N} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$.

4. Avem $\mathbb{R}_{ne} \cap \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \neq \oslash$. *Dar* $\mathbb{R}_{ne} \cap \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0) = \oslash$.

5. Fie $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{E}_u) \cap \mathcal{R}_f(\Gamma)$. *Atunci* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\Gamma_0)$ *şi* $\mathcal{R} = \Gamma *_{sr} (\mathcal{R} \wedge \Gamma)$.

16.8. Unele probleme ale subcategoriilor semireflexive

La examinarea exemplelor din laticele $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, următoarele probleme sunt standarte. Unele din aceste probleme pot fi abordate la început pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.

16.8.1. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Este adevărată sau nu incluziunea* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$?

Dacă $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$, *atunci* $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee (\mathcal{R} \vee \Gamma_0))$ *(Teorema 13.3.3). Astfel* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_{fg}^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

16.8.2. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s)\varepsilon\mathcal{L})$.

1. Întotdeauna nucleul de drepta $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ *posedă cel mai mare element?*

2. Este adevărat oare, că cel mai mare element în $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$*, dacă el există, este* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$?

3. Este adevărat oare, că $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ *este întotdeauna cel mai mare element al clasei* $N_d(\mathcal{R}, \mathcal{L})$?

16.8.3. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. *Atunci* $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathcal{N}_m(\mathcal{R})$. *În ce condiţii clasa* $\mathcal{N}_m(\mathcal{R})$ *posedă cel mai mic element?*

16.8.4. *Fie* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

1. Să se descrie elementele $\mathcal{B} \vee \mathcal{R}$ *când* $\mathcal{B} \in \mathcal{N}_m(\mathcal{R})$.

2. Să se descrie elementele $\mathcal{R} \vee \Gamma_0$.

16.8.5. *1. În categoria* $\mathcal{U}_2$ *a spaţiilor uniforme Hausdorff şi în categoria* $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$ *a grupurilor local convexe Hausdorf să se studieze subcategoriile c-reflective şi perechile de subcategorii conjugate.*

2. În categoriile $\mathcal{U}_2$ *şi* $\mathcal{C}_2\mathcal{A}b$ *să se studieze subcategoriile* $\mathcal{L}$*-semireflexive.*

BIBLIOGRAFIE

Adámek J., Herrlich H., Strecker G.E.
[A, H, S] Abstract and concrete categories. University of Bremen. 2004.

Акбаров С.С. (Acbarov S.S)
[Ac, 2000] Стереотипные локально выпуклые пространства. Известия РАН, серия математическая, 64(2000), 4, 3-47.

Акбаров С.С. Шавгулидзе Е.Т. (Acbarov S.S., Shavgulidze E.T.)
[Ac, Sh, 2003] О двух классах пространств, рефлексивных по Понтрягину. Матем. Сб., 194(2003), 10, 3-26.

Березанский И.А. (Berezanskii J.A.)
[Be, 1968] Индуктивно рефлексивные локально выпуклых пространств. ДАН СССР, 189(1968), 1, 20-22. Engl. transl. In Soviet Math. 9(1968), 1080-1082.

Bessaga C., Pelczynski A.
[B, P, 1961] On the embeddin of nuclear spaces in the space of all infinitely differentiable functions on the line. Soviet Math. Dokl., 1(1961), 1122-1125.

Ботнару Д. (Botnaru D.)
[B, 1974] Рефлексивные подкатегории и правые бикатегорные структуры. ДАН СССР, 219(1975),3, 524-526.
[B, 1976] Сопряженные пары подкатегорий. УМН, 31(1976), 3б 204-204.
[B, 1977] О подъеме корефлексивных подкатегорий рефлексивной подкатегории. Функц.анализ, Ульяновск, 9(1977), 3-7.
[B, 1979] Бикатегорные структуры и сопряженные пары подкатегорий. Диссертация. Москва. 1979.
[B, 1979] Об одной бикатегорной структуре категории отделимых локально выпуклых пространств. Функц.анализ, Ульяновск, 13(1979), 79-86.
[B, 1982] О связи между сопряженными парами подкатегорий и бикатегорными структурами. Изв. ВУЗов, Математика, 4(1982), 9-12.
[B, 1983] Композиция и коммутативность рефлексивных функторов, Функц. анализ, Ульяновск, 21(1983), 59-71.
[B, 1984] Относительные теории кручения. Мат.исслед. Кишинэу, Штиинца, 76(1984), 3-13.
[B, 1985] Относительные теории кручения категории отделимых равномерных пространств. Мат.исслед. Кишинэу, Штиинца, 85(1985), 43-57.
[B, 1986] Относительные теории кручения категории отделимых локально выпуклых пространств. Мат.исслед. Кишинэу, Штиинца, 90(1986), 28-40.
[B, 1989] Решетка пополнений категории отделимых локально выпуклых пространств. Бакинская Международная топологическая конференция, Баку, 1987, Труды, Баку: ЭЛМ, 1989, 51-59.
[B, 2010] Structures bicategoriélles complémentaires. Rev. Roumaine Math. Pure et Appl., LV (2010), 2, 97-119 .
[B, 2018a] Groupoïd des sous-catégories L-semi-reflexives. Rev. Roumaine Math. Pure et Appl., 63(2018), 1, 61-71.
[B, 2018b] Couples des sous-catégories conjughées. ROMAI J., 14(2018), 1, 23-41.
[B, 2018c] Noyaux des sous-catégories semi-réflexives. ROMAI J., 14(2018), 2, 1-32.
[B, 2020] La classe des sous-catégories L-semi-reflexives. ROMAI J., 16(2020), 1, 19-36.
[B, 2021] Certaines modalités pour définir les sous-catégories semi-réflexives, ROMAI J., 17(2021), 1, 9-15.
[B, 2022] Sous-catégories semi-reflexives. Acta et com., 2(4) (2017), 11-34.
[B, 2023] On semireflexive subcategories, Topology and Appl.
[B, 202?] Le groupoïd des sous-catégories c-réflexives, Rev. Roumaine Math. Pure e Appl.,
[B, 2023] Variétés $\mathcal{L}$-semi-réflexives, ROMAI J.,
[B, 202?] La catégories des espaces $\mathcal{B}$-inductifs semireflexifs, ROMAI J.,

Botnaru D., Baeş E.
[B,B, 2020] Clase de morfisme ereditare și teorii de torsiuni relative. Bul. Inst. Politehnic, Iași, LVII (LXI) (2010), 1, 15-28.
[B,B, 2018] The center of the lattice of factorization structures. Bul. ASR Moldova, Matematica, 1 (86) (2018), 50-66.

Botnaru D., Baeş E., Zgureanu A.
[B, B, Z, 2006] Supremul a două subcategorii reflective. Analele ATIC-2005, I(VIII), 2006, 3-11.

Botnaru D., Gisin V.,
[B, G, 1973] Устойчивые мономорфизмы в категории локально выпуклых пространств. Изв. АН МССР, Серия физ.-тех и мат.наук, 1(1973), 3-7.

Botnaru D., Cerbu O.
[B, C, 2007] Semireflexive product of two subcategories. Proc. Of the Sixth Congress of Romanuan Mathmaticians, Bucharest, 1(2007), 5-19.
[B, C, 2009] Semireflexive subcategories, ROMAI J., 5(2009), 1, 7-20.
[B, C, 2018] The cartesian product of two subcategories, Acta et com., 2(6)(2018), 133-138.

Botnaru D., Țurcanu A.
[B, T, 2005] On Girand subcategories in locally convex spaces, ROMAI J., I (2005), 1, 7-30.
[B, T, 2010] Spații Hewitt ca produs de dreapta factorizat a două subcategorii, Bul. Inst. Politeh., Iași LVII (LXI) (2010), 1, 15-28.
[B, T, 2016] On the right product of two subcategories, ROMAI J., 12 (2016), 2, 9-18.
[B, T, 2017] Some properties of left product of two subcategories, Acta et Com., 2(4) (2017), 35-44.
[B, T, 202?] Weak reflexive subcategories, Acta et Com.
[B, T, 2023] Commutative monoid of reflexive functors, ROMAI J.,

Botnaru D., Țurcanu A., Cerbu O.
[B, T, C, 2010] Bicategory structures generated by injective spaces. ROMAI J., 3(2007), 2, 31-50. [B, T, C, 2010] The factorization of the right product of two subcategories, ROMAI J., VI (2010), 2, 41-53.
[B, T, C, 2011] The Hewitt spaces as right factorized product of two subcategories, Bul.Inst.Politehii, LVII (LXI) (2011), 1, 37-46.

Botnaru D., Robu R.
[B, R, 2000] Unele aspecte categoriale ale spațiilor Tihonov. Analele științifice ale USM, Seria "Științe fiz-mat., Chișinău, 2000, 87-94.

Брудовский Б.С. (Brudovsky B.S.)
[Br, 1968] Ассоциированная ядерная топология, отображения типа s и усиленно ядерные пространства. ДАН СССР, 178(1968), 2, 271-273.

Bucur I., Deleanu A.
[B, D, 1972] Введение в теорию категорий и функторов. Москва: Мир, 1972.

Буняев М.М. (Buneaev M.M.)
[Bn, 1976] Квазитопологические векторные пространства. УМН, 31(1976), 3(189), 207-208.
[Bn, 1976] Биквазитопологические векторные пространства. УМН, 31(1976), 5(191), 229-230.
[Bn, 1977] Экспоненциальный закон для некоторых подкатегорий категории локально выпуклых пространств. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, 8 (1977), 40-44.
[Bn, 1978] Экспоненциальный закон для категорий локально выпуклых пространств. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 1978.
[Bn, 1982] К теореме о замкнутом графике. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, 19 (1982), 40-44.
[Bn, 1984] О некоторых категориях локально выпуклых пространств. Исслед. по теории функций многих вещественных переменных, Межвуз. Тематический сб., Ярославль, (1984), 41-52.

[Bn, 1985] Об изорефлексивных подкатегориях категории локально выпуклых пространств. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, (1985), 41-52.
[Bn, 1990] C-замыкание в ЛВП и теорема о замкнутом графике. Известия ВУЗов, серия математика, 10 (1990), 58-61.

Cerbu O.
[C, 2011] The left exact reflector functor, ROMAI J., 7 (2011), 1, 25-37.

Чигогидзе А.С. (Chigogidze A.C.)
[Ci, 1980] О свойствах близких к бикомпактности. УМН, 35(1980), 6(216), 177-178

Dazord J., Jourlin M.
[D,J, 1971] Sur quelques classes d’espaces localement convexes. Publ. Départément de Math., Lyon, 8(1971), 2, 39-69.
[D, J, 1972] Sur les precompacts d’un espace localement convex, C.R.Acad.Sc.Paris, 274(1972), 463-466.
[D, J, 1972a] Sur les précompacts d’un espace localment convex, C.R.Acad.Sc.Paris, 274(1972), 550-553.

Day M.M.
[D, 1958] Normed linear spaces. Springer-Verlay, Berlin. Götingen. Heidelberg. 1958.

Diestel J., Morris S.A., Saxan A.
[D,M, S, 1971] Varieties of linear topological spaces. TAMS, 172 (1972), 207-230.

Fleming R.J.
[Fl, 1969] Characterization of semi-reflexivity and quasi-reflexivity, Duke Math., J., 36(1969), 73-80.

Гисин В.Б. (Ghisin V.B.)
[Gs, 1974] Об одном классе бикатегорий. ДАН СССР, 219(1974), 6, 1288-1301.
[Gs, 1975] О связи корефлексивных подкатегорий и бикатегорных структур. УМН, 30(1975), 239-240.

Гейлер В.А. (Gheyler V.A.)
[Ge, 1972] О проективных объектах в категории локально выпуклых пространств. Функц. ан. и его приложения, 6(1972), 2, 79-80.

Гейлер В.А., Гисин В.Б. (Gheyler V.A., Ghisin V.B.)
[Ge, G, 1978] Обобщенная двойственность для локально выпуклых пространств. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, 11 (1978), 41-50.

Головин В.Д.
[Gl, 1967] О некоторых расширениях топологических векторных пространств. ДАН СССР, 174(1967), 1, 9-12.

Grothendieck A.
[Gr, 1957] Sur quelques points d’algèbre homologique. Fôhoku math. J., second series, 9(1957), 2, 3.
[Gr, 1973] Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York London Paris, 1973.

Grätzer G.
[Gre, 1978] General lattice theory. Academie-Verlag. Berlin. 1978.

Gupta M., Das N.R.
[G,D, 1983] k – reflexivity and canonical γ - completition, Collectanca Math., Univ. de Barcelona, 34(1983), 2, 169-195.

Engelking R.
[E, 1985] General topology. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1971.

Hager A.W.
[H, 1975] Perfect maps and epi-reflective hulls. Canad. J. Math., 23(1975), 11-24.

Hager A.W., Rice M.D.
[H, R, 1976] The commuting of coreflectors in uniform spaces with completitions. Çechoskovak Math. J., 26 (1976), 3, 371-380.

Isbell J.
[Is, 1964] Uniform spaces. AMS, 190, Hope Street, Porvidence, Rhode, Island, 1964.

Jarchow H.
[J, 1973] Die universalität des räumes c_0 fur die classe der Schwartz räume. Math. Ann., 203(1973), 211-214.
[J, 1981] Locally convex spaces, B.G. Teubner Stuttgart 1981.

Jurchescu M., Lascu A.
[J, L, 1966] Morfisme stricte, categorii contoriene, functori de completare. Studii şi cercetări mat. Acad. RSR, 18(1966), 2, 219-231.

Kadeburg Z., Radenovic' S., Three spaces – problem for some classes of linear topological spaces, Comment. Math., Univ. Carolin., 37(1996), 3, 507-514.

Kelly G.M.
[Kl, 1969] Monomorphisms, epimorfisms, and pullback. J. Austral. Math. Soc. 9(1969), 124-142.

Кендеров П.
[Kn, 1970] О топологических векторных группах. Мат. Сб., 81(123)(1970), 4, 580-599.

Kennison J.F.
[Ke, 1965] Reflective functors in general topology and elewhere. TAMS, 118(1965), 303-315.

Komura Y.
[K, 1964] Some examples on linear topological spaces. Math. Ann., 153(1964), 150-162.

Komura T., Komura Y.
[K,K,1966] Über die eibetung der nuclearen räume in $(s)^A$. Math., An., 162(1966), 284-288.

Köthe G.
[Kt, 1969] Topological vector spaces. I. Springer, Berlin-Heidelberg-New York. 1983.

Курош А.
[Ku, 1967] Теория групп. Москва. Наука. 1967.

Lee S.H.
[Le, 1995] Reflexivity of normed almost linear spaces, Comm Korean Math. Soc., 10(1995), 4, 855-866.

Lindestraus J., Pelczynski A.
[L, P, 1968] Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications. Stud. Math., 29(1968), 275-326.

Lurje P.
[Lr, 1974] Tonneliertheit in local convexen vektorqruppen. Manus. Math., 14(1974), 107-121.

Мальцев А.И.
[Ma, 1958] Определяющие отношения в категориях. ДАН СССР, 199(1958), 6, 1095-1098ю
[Ma, 1970] Алгебраические системы. Москва: Наука, 1970.

Martineanu M.A.
[M, 1964] Sur une propriété universe de l'espace de distributions de M.Schwartz. C.R. Acad. Sci. Paris, 259(1964), 1, 3162-3164.

Morris S.A.
[Mr, 1974] Just-non-singly generated varieties of locally convex space. Colloq. Math., 29(1974), 1, 151-153.

Morris S.A., Diestel J.
[M, D, 1974] Remarks on varieties of locally convex linear topological spaces. London Math. Soc., 2(1974), 8, 271-278.

Moscatelli V.B.
[Ms, 1975] Sur les spaces de Schwarrz et ultra-nucléaire universels. C.R.Acad.Sci.Paris, 280(1975), 937-940.
[Ms, 1977] Espaces de Fréchet λ-nucléair universels. C.R.Acad.Sci.Paris, 284(1977), 303-306.
[Ms, 1978] On the existence of universal λ-nucléair Fréchet spaces. J.Reine vangen Math., 301(1978), 1-26.

Паламодов В.П.
[Pl, 1978] Гамалогические методы в теории локально выпуклых пространств. УМН, XXVI (1971), 1(157), 3-65.

Pelczynski A., Sudacov V.N.
[P, S, 1972] Remarks on non-complemented subspaces of the spaces m(S). Collaq. Math., 9(1962), 1, 85-88.

Pietsch A.
[Pt, 1972] Nuclear locally convex spaces. Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

Понтрягин Н.С.
[Pn, 1973] Непрерывные группы. Москва: Наука, 1973.

Popescu N.
[P, 1971] Categorii abeline. Editura Academiei RSR, București, 1971.

Pumpliin D.
[Pm, 1972] Universall and spezielle problem. Math.Ann., 198(1972), 2, 131-146.

Райков Д.А. (Raïcov D.A.)
[Ra, 1962] Некоторые свойства ограниченных линейных операторов. Ученые записки МГПИ им. В.И.Ленина, 188 (1962), 171-191.
[Ra, 1964] Свободные локально выпуклые пространства равномерных пространств. Матем. Сб., 63(1964), 4, 582-590.
[Ra, 1965] Экспоненциальный закон для пространств непрерывных линейных отображений. Матем. Сб., 67(102) (1965), 2, 279-302.
[Ra, 1969] Полуабелевые категории, ДАН СССР, 188(1969), 5, 1006-1009.
[Ra, 1972] Ортогональные морфизмы и понятие бикатегории, Изв. ВУЗов (серия математическая), 4(1972), 93-101.
[Ra, 1975] Категории соответствий с квазинулевым объектом, Труды московского математического общества, 33(1975), 223-261.

Radosavljevié M.
[Rd, 1978] Quasibarreled and bornological vector groups. Математики вестник, 2(1978), 15(30), 403-408.

Randtke D.J.
[Rn, 1973] A simple exemple of a universal Schwartz space. Proc. Amer. Math. Soc., 37(1973), 1, 185-188.

Riece M.M.
[Rc, 1975] Subcategories of uniform spaces. TAMS, 201(1975), 305-314.

Ringel C.M.
[Rg, 1971] Diagonalisierung space. Math Z. 117(1970), 249-266; Math Z., 122(1971), 10-32.

Robertson A.P., Robertson W.J.
[R, R, 1964] Topological vector spaces. Combridge university Press, 1964.

Rosenberger B.
[Rs, 1973] Universal generators for varieties of nuclear spaces. TAMS, 184(1973), 275-290.

Saxon S.A.
[Sx, 1979] Embedding nuclear spaces in products of arbitrary Banach space. Proc. Amer.Math.Sos. 34(1972), 1, 138-140.

Schaefer H.H.
[Sh, 1966] Topological vector spaces. Berlin-Heidelebrg-New York, 1971.

Секованов В.С. (Sekovanov V.S.)
[Sk, 1980] В–индуктивно рефлексивные локально выпуклые пространства. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, (1980), 128-131.
[Sk, 1981] *d*-рефлексивные локально выпуклые пространства. Функц. ан., Межвуз. сб., Ульяновск, 17(1981), 111-117.
[Sk, 1984] О двух обобщениях понятия рефлексивности локально выпуклого пространства. Мат. Заметки, 35(1984), 3, 415-424.

Slowikowski W.
[Sl, 1961] On continuity of inverse operators. Bull. Amer. Math. Soc., 67(1961), 5, 467-470.

Strecker G.E.
[St, 1974] On characterization of perfect morphisms and epireflective hulls. Lecture Notes in Math., 378(1974), 468-500.

Țurcanu A.
[T, 2007] The factorization of reflector functors, Bul Institutul Politehnic din Iași, România, LIII(LVII)(2007), 5, 377-391.
[T, 2023] The left product, the ringht product end he theories of relative torsion, Acta of Comment, 2023.

Wulbur W.J.
[W, 1974] Relfective and coreflective hulls in the category of locally convex spaces. Gen. Topology and its Appl., 4(1974), 237-254.

ANEXE

1. Termeni

2. Simboluri

3. Categorii

4. Functori

5. Structuri de factorizare

6. Subcategorii şi clase de subcategorii coreflective

1.7.14 $\mathbb{K}(\mathcal{C}), \mathbb{K}(\mathcal{C}')$

4.1.5 $\mathbb{K}(\mathcal{A})$

4.2.1 Σ

6.1.6 $\tilde{\mathcal{M}}$, $\mathcal{T}on$

6.1.9 $\mathbb{K}_p, \mathbb{B}ir, \tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{T}on, \mathcal{B}or, u\mathcal{B}or, \mathcal{B}ar, q\mathcal{B}ar$

6.2.12 $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}(\mathcal{C})$, $\mathbb{K}(\mathcal{I})$

6.4.3 $\mathbb{P}_c$, $\mathbb{K}_c$, $\mathbb{K}_c(\mathcal{A})$

6.5.4 $\mathcal{K}_\Pi$

7.1.1 $\mathbb{K}(\mathcal{P}), \mathbb{K}(\mathcal{I}), \mathbb{K}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$

9.2.16 $\mathcal{K}_\tau$

9.2.21 Ch

9.2.22 $\lambda^*(\mathcal{A})$

9.2.23 ${}^c u\mathcal{N}$

9.3.1 $\mathbb{K}_{nu}$

9.4.2 $\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{I}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{V}}(\mathcal{M})$

9.4.20 $\overset{c}{\mathbb{V}}{}^s(\mathcal{B}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{V}}_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{V}}{}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{B}ir}{}^s(\mathcal{B}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{B}ir}_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$, $\overset{c}{\mathbb{B}ir}{}^s_f(\mathcal{B}, \mathcal{M})$

10.2.6 $T_g(\mathcal{T}), F_g(\mathcal{T})$

10.2.11 $F_d(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$, $T_g(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$, $F_{dv}(\mathcal{H})$, $F_{gv}(\mathcal{T})$, $F_{dc}(\mathcal{H})$, $F_{gc}(\mathcal{T})$

10.3.1 $\lambda^*_{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$, $\lambda^*(\mathcal{A})$

11.1.4 $\mathcal{K} *_s \mathcal{R}$

11.2.2 P_t^-, $\mathcal{K}^-(\tau)$, $Q^-(\tau)$, $Q^-(w_1)$

11.3.2 $\mathcal{K} *_{sc} \mathcal{R}$

12.2.1 $\mathcal{K} *^{sc} \mathcal{A}$

12.9.12 $\mathbb{K}_p$

14.1.7 $\mathbb{K}_p$, $\mathbb{R}_s$, $\mathbb{K}_r^c$, $\mathbb{R}_r^c$, $\mathbb{R}_s$,

14.1.2 $\mathbb{K}_p$

14.2.2 $\mathbb{K}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$

14.5.1* $\mathbb{B}(\mathcal{U}), \mathbb{K}_m(\mu\mathcal{K})$

14.6.1* $\mathbb{B}_j(\mathcal{U}), \mathbb{K}_j(\mu\mathcal{K})$

14.10.2 $\mathbb{K}^l(\mathcal{H})$, $\mathbb{K}_l(\mathcal{H})$, $\mathbb{K}_l^l(\mathcal{H})$

14.11.1 $\mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{U}, \mu\mathcal{V})$

7. Subcategorii şi clase de subcategorii reflective

1.7.4 $\mathbb{R}(\mathcal{C})$, $\mathbb{K}(\mathcal{C}')$

4.1.5 $\mathbb{R}(\mathcal{A})$

6.1.9 $s\mathcal{R}$, $\mathbb{R}_s$

6.2.12 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(\mathcal{C})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L})$

6.4.3 $\mathbb{P}_c$, $\mathbb{R}_c$, $\mathbb{R}(\mathcal{A})$, $\mathbb{B}ic$

6.4.7 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{R})$

6.6.15 $\mathcal{S}, \Gamma_0$

6.7.9 $\mathbb{R}_{ex}$, $\mathbb{R}_{ne}$

7.1.1 $\mathbb{R}(\mathcal{P})$, $\mathbb{R}(\mathcal{I})$, $\mathbb{R}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$, $G(\mathcal{R})$, $\bar{G}(\mathcal{R})$,

7.1.6 $\bar{\mathcal{S}}$

7.3.1 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, $\lambda(\mathcal{A})$, $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}'(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}''(\mathcal{R})$

8.5.5 $\mathbb{R}(\Gamma_0)$

9.2.1 $\bar{\mathcal{R}}$

9.2.15 $s\mathcal{R}$, $i\mathcal{R}$

9.2.16 $\mathcal{L}_\tau$

9.2.23 $\bar{\bar{\mathcal{R}}}$

9.3.1 $\mathbb{R}_{nu}$

9.3.10 $\mathbb{R}^u(\Gamma_0)$, $\mathbb{R}_e(\Pi, \Gamma_0)$

9.4.2 $\mathbb{V}^s(\mathcal{P}, \mathcal{E})$, $\mathbb{V}(\mathcal{E})$

9.4.5 $\mathcal{V}_m$

9.4.7 $\mathcal{V}(\varphi_m)$, $\mathcal{V}(\varphi)$

9.4.17 $\mathcal{K} *_d \mathcal{R}$, $\mathcal{K} *_{dc} \mathcal{R}$

8. Subcategorii şi clase de subcategorii semi(co)reflective

9. TTR

10. Aplicaţii reciprce inverse

6.6.13 φ'', ψ''
9.3.11 φ_a, ψ_a
9.3.13 φ_b, ψ_b
9.3.16 φ_α, ψ_α
12.9.12 φ_1, ψ_1
12.9.12* $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\psi}_1$
14.1.1 φ_1, ψ_1
14.1.1* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$
14.1.2 $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\psi}_1$
14.1.2* φ, ψ
14.1.4 φ_1, ψ_1
14.1.4* $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\psi}_1$
14.1.12 φ_1, ψ_1
14.1.12* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$
14.2.4 φ, ψ
14.2.4* $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\psi}_1$
14.2.6 φ, ψ, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\psi}_1$
14.3.2 φ_g, ψ_g
14.3.3 φ_g, ψ_g
14.4.2 φ_λ, ψ_λ
14.4.3 φ_λ, ψ_λ
14.5.2 φ_m, ψ_m
14.5.2* $\bar{\varphi}_m$, $\bar{\psi}_m$
14.6.2 φ_j, ψ_j
14.6.2* $\bar{\varphi}_j$, $\bar{\psi}_j$
14.7.1 φ_u, ψ_u
14.8.2 φ_{gl}, ψ_{gl}
14.9.4 φ_n, ψ_n
14.10.4 φ_t^t, ψ_n^t
14.10.4* φ_l^l, ψ_l^l
14.10.5 φ_1, ψ_1
14.10.5* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$
14.11.2 φ_{lt}, ψ_{lt}
14.11.2* $\bar{\varphi}_{uk}$, $\bar{\psi}_{uk}$
15.2.7 δ, γ
15.2.7 $\bar{\delta}, \bar{\gamma}$

11. Probleme

2.6.8
5.2.9
5.3.3
5.8.6
5.8.7
6.1.9*
6.1.12
6.2.14
6.5.7
6.5.12
6.6.23
6.7.13
7.1.12
7.5.4
7.5.5
8.4.9
9.2.23
9.3.6
9.3.15
9.5.11
10.1.13
10.1.14
10.1.15
11.1.23
11.4.14
11.5.7
12.5.19
12.9.13
13.2.4
13.5.8
16.1.7
16.4.5
16.5.3
16.8.1-16.8.5

12. Exerciţii

1.1.8;
1.2.13;
1.2.17;
1.3.3;
1.3.6;
1.3.8;
1.3.13;
1.3.15;
1.3.19;
1.4.2;
1.5.4;
1.5.14
1.5.17;
2.4.11;
2.4.13;
2.5.9;
2.6.3;
2.6.4;
2.7.9;
2.7.11;
3.1.2;
3.3.2;
4.1.5;
4.4.2;
5.2.3;
5.8.5;
6.1.5;
6.1.11;
6.2.8;
6.2.15;
6.2.20;
6.2.21;
6.2.22;
6.2.23;
6.4.4;
6.4.8;
6.4.9;
6.5.5;
6.6.19;
6.6.20;
6.6.21;
6.6.22;
6.7.12;
7.2.1;
7.3.5;
7.4.5;
8.3.2;
8.3.10;
9.1.4;
9.2.11;
9.3.2;
9.3.3;
9.3.7;
9.3.8;
9.4.19;
9.4.26;
9.4.27;
9.4.28;
9.4.29;
9.4.30;
9.5.6;
9.5.9;
9.5.10;
10.1.1;
10.1.12;
10.2.9;
10.4.9;
11.1.19;
11.1.20;
11.1.21;
11.1.22;
11.3.20;
11.5.3;
12.2.2;
12.2.3;
12.2.15;
12.2.16;
12.4.6;
12.5.18;
12.7.1;
12.7.16;
12.8.4;
12.8.5;
13.2.1;
13.5.2;
13.5.3;
13.5.5;
15.1.12;
15.1.14.

Pentru notiţe

Pentru notiţe